Lecture 6

課本 2.1 瞬間的意義與極限的定義

敘述並解釋 ϵ-δ 論證形式的極限定義.

課本 2.2 在一點上的導數

可補救或不可補救的不連續

左極限與右極限的定義.

不連續的情況可以分類為三種成因. (1) 函數值無法定義. (2) 左極限與右極限分別存在但不相等; 換句話說, 極限值不存在. (3) 極限值存在但不等於函數值. 其中第 (2) 種情形是無法補救的. 但其他兩種情形是可以補救的: 只要重新定義函數值為極限值就可以了.

$\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{x^2}$ 在 $x = 0$ 處沒有定義, 所以都是在 $x = 0$ 處不連續. 而且也都是不可補救的, 因為

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \text{ 和 } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

的極限都是不存在的. 第五講中 (1) 式的 $f(x)$ 也是不可補救的, 但是 (1) 式的 $g(x)$ 和 (2) 式的 $h(x)$ 都是可補救的.

習題 6

6.1 課本 **2.1** 習題 8, 11–13.

6.2 課本 **2.2** 習題 6, 22–23.

6.3 $\frac{\sin x}{x}$ 是否為可補救的不連續? 如果是, 你猜該如何補救? 你可以用 Maple 作實驗

```
f := sin(x)/x:
plot(f, x=0.001..3);
plot(f, x=-3..-0.001);
```

觀察其圖形並猜測其補救的方法.

6.4 用 Maple 研究 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 附近的圖形. 從這些圖形, 你認為要如何才能補救 $\sin\frac{1}{x}$ 使它在 $x = 0$ 處連續呢? 如果你認為不能補救, 請用 ϵ-δ 論證來說明為什麼不能? (複習連續函數的定義, 以及該定義的逆敘述).