Lecture 8

在前言中, 我們說過, 牛頓與萊布尼茲在西元 1680 年前後, 發展了今天所謂的**微積分基本定理**, 使得微分 (求瞬間變化率) 與積分 (求曲線下面積) 這兩回事變成了一套互為正逆的運算. 從此之後的五十年, 應用微積分這套技術的數學家或科學家們, 都在技術上把積分當做是求反導函數的運算. 也就是說, 當他們需要求 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的時候, 就找一個函數 $F(x)$, 而它滿足 $F'(x) = f(x)$, 再以 $F(b) - F(a)$ 來當做其積分值. 只有在找不到這樣的一個 $F(x)$ 的時候, 才利用積分的面積意義, 求得一個近似的積分值.*

在 1820 年以前的數學理論中, 並沒有什麼函數是**可積分** (integrable), 什麼是**不可積分**, 這一類的觀念. 因為, 在理論上, 甚至沒有積分的定義. 只是直覺地認定它就是曲線下的面積, 而求反導函數就是其計算的技巧: 能找到反導函數的就是可積的函數, 不能找到的, 就不知道了. 一方面, 這樣的直覺顯然基礎鬆散; 另一方面, 求反導函數的技術也不夠解釋許多一般性的情況. 比如說

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{when } 0 \le x < 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(χ 是個希臘字母, 唸做"開." 這個函數稱做**特徵函數**, 仔細的說, 又稱做 $[0,1]$ **區間上的特徵函數**.) 直覺上 $\int_{-A}^{A} \chi(x)\,dx$ 顯然是可積的 (只要 $A > 1$), 其積分值應該是 1. 但是我們無法在基本函數中找到 $\chi(x)$ 的反導函數.

因此, 當微積分的技術在自然科學的領域中大放異彩的同時, 數學家也在為它找尋一套嚴格的定義. 我們已經看到了微分的定義, 那是一個用極限的觀念寫出來的定義. 而極限的定義是用 ϵ-δ 論證的形式處理的. 那麼積分呢?

可微 (有導數) 的定義只有一種, 但是可積的定義卻有好幾種. 每一種定義的方式都會和牛頓與萊布尼茲的微積分基本定理"相容." 也就是說, 不論依照哪一種定義, 凡是找得到反導函數的函數, 在那個定義下都會是可積的, 而且其積分值都是 $F(b) - F(a)$. 所以, 這些不同定義的些微差距都發生在那些找不到反導函數的函數上. 這些定義, 使得可積的函數種類越來越豐富, 也使得微積分的理論越來越豐富.

但是, 那些在某種定義下可積, 卻又找不到反導函數的函數, 要如何求得其積分值呢? 只有在極少數的情況下, 我們可以運用其他的數學技巧求得其積分值. 絕大部分的情況下, 我們只能用數值計算的方法 (numerical quadrature), 求其積分的估計值.

讓我們首先來看看柯西在 1823 年為閉區間內連續函數的積分所下的定義—也就是說, 連續函數在閉區間內的曲線下面積的定義. (但我們用的是一般教科書上常見的寫法.)

---

* 我們還沒有正式講過求導函數及求反導函數的技巧. 目前, 請就以高中時代所學習的基本技巧為思考上的範例. 比如說, x^2 的導函數是 $2x$, 而 x 的反導函數就是 $\frac{1}{2}x^2$.

令 $f(x)$ 爲閉區間 $[a,b]$ 上的連續函數. 令 n 爲一正整數, 取

$$\Delta_n x = \frac{b-a}{n},$$

而且

$$x_0 = a, \quad x_k = x_0 + k\Delta_n x, \text{ for } k = 1, 2, \ldots, n.$$

令 ξ_k 是 $[x_{k-1}, x_k]$ 中的任意一點, 而且

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_n x. \tag{1}$$

則若

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

存在, 其極限值就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的積分值, 並記作

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

在此定義中說的 $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ 稱作 $[a,b]$ 區間中的一個**均勻分割**. 而且, 觀察 $\int$ 符號其實就是拉長的 S, 有長度的 $\Delta_n x$ 在取了極限後寫成 dx. $\int_a^b dx$ 符號的意義是從 a 到 b 對 x 變數做積分.

而所謂**柯西積分定理**, 就是說

閉區間上的連續函數必可積.

也就是說, 如果 $f(x)$ 是閉區間 $[a,b]$ 上的連續函數, 則前述定義中的 $\lim S_n$ 極限必存在.

現在, 我們必須為

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

下定義.

令 $\{x_n\}$ 爲一實數數列. 如果有某數 x, 對所有的 $\epsilon > 0$, 都找得到 $N > 0$, 使得凡是 $n > N$, 必有 $|x_n - x| < \epsilon$, 則

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

的極限存在, 且其極限值爲 x.

這個定義的方式和 ϵ-δ 論證很類似, 卻不盡相同. 我們稱它為 ϵ-N 論證. 暫時, 我們不討論其細節. 但是各位可能已經知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{6n^2}=\frac{1}{6}.$$

我們將會證明, 柯西的積分定義和古典的微積分基本定理是相容的. 也就是說, 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間中有反導數 $F(x)$, 則 $f(x)$ 在柯西的定義之下的積分值是 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

柯西提出了他的積分定義之後三年, 黎曼 (Riemann) 才出生. 黎曼在二十八歲 (西元 1854 年) 的時候就任德國哥丁根大學的教授. 在其就職演說中, 他提出了柯西的積分定義的推廣. 使得這個定義可以含蓋不連續函數的可積 (或不可積). 今天的教科書大都直接以黎曼的定義作為可積的定義. 而類似 (1) 式中的和, 則稱為**黎曼和** (Riemann sum).

黎曼的積分定義與柯西的積分定義之間只有微妙的不同.

Definition of Riemann integrals

重要的是, 黎曼可以從他的定義裡面推導, 什麼樣的不連續函數會是可積的. 如果一個函數在黎曼的定義之下可積, 我們稱它為**黎曼可積**. 黎曼的可積定義相容於柯西的積分定義. 也就是說, 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中是個連續函數, 則它是黎曼可積, 而且其積分值與柯西的積分值相同. 基本上, 黎曼所推廣的是, 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間中是**有界函數*** 且只有有限多個不連續點, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間中是黎曼可積. 這個結果符合我們直覺上對面積的認識 (答案是 1).

如果 $f(x)$ 只有在 $d_1<d_2<\cdots<d_m$ 點上不連續 ($a<d_1$ 且 $d_m<b$), 而且 $f(x)$ 分別在 $[a,d_1]$, $[d_1,d_2]$, $\cdots$, $[d_m,b]$ 這些區間上都可以被補救成連續函數. 那麼, 補救後的 $f(x)$ 分別在 $[a,d_1]$, $[d_1,d_2]$, $\cdots$, $[d_m,b]$ 有柯西積分值. 而 $f(x)$ 在整個 $[a,b]$ 區間上是黎曼可積, 且其積分值為各區間中柯西積分值的和:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{d_1} f(x)\,dx+\int_{d_1}^{d_2} f(x)\,dx+\cdots+\int_{d_m}^{b} f(x)\,dx.$$

這個推廣, 使得像 $\int_{-2}^{2}\chi(x)\,dx$ 這樣的積分有了理論上的基礎, 而且其結果又符合我們直覺上面積的意義.

此外, 黎曼的積分理論使得我們可以討論無界函數的可積性, 例如 $\int_0^1\frac{1}{x}\,dx$, $\int_0^1\frac{1}{x^2}\,dx$; 以及在 $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$, 或 $(-\infty,\infty)$ 這些無界區間上的可積性, 例如 $\int_1^\infty\frac{1}{x}\,dx$, $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\,dx$. 在

* 也就是說, $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 中沒有趨向無窮大之處. 亦即存在 $M>0$, 對所有的 $x\in[a,b]$, 皆有 $|f(x)|\le M$. 但是這並不表示 $f(x)$ 在不連續點處都是可補救的. 例如 $\sin\frac{1}{x}$ 就是一個有界函數, 但是它在 $x=0$ 處有一個不可補救的不連續點.

大部分的情況下, 我們對黎曼可積定義的依賴, 僅止於此. 或許是為了這個原因, 在一般的應用科學領域中, 我們只學習黎曼的積分理論.

但是在更深一層的領域中, 黎曼的可積定義有其不夠完備的地方. 問題在於, 如果 $f_n(x)$ 是一系列的函數, $f(x)$ 是它們的極限函數; 記作 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (我們以後再解釋其意義). 比方說

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{when } x \in \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad , \quad x \in [0,1]. \tag{2}$$

那麼即使每一個 $f_n(x)$ 都是黎曼可積的, 只有在很特別的情況下, 才能保證其極限函數 (如果存在的話) 也是黎曼可積的. 以今天的眼光來看, 最完備的可積定義是由勒貝格 (Lebesgue) 在本世紀初提出的. 數學系的實變函數論的課程中, 主要就是討論由勒貝格的積分理論所導出的數學. 我們不在這裡討論勒貝格的可積定義.

課本 3.1 左右黎曼和

當 (1) 式中的 ξ_k 總是取 x_{k-1} 的時候, S_n 稱作左黎曼和; 當它總是取 x_k 的時候, S_n 稱作右黎曼和. 如果 $\int_a^b f(x)\,dx$ 存在, 則當 n 越來越大的時候, 左右黎曼和的值會趨近於同一個數, 也就是積分值. 這是以計算機估計積分值的最基本辦法.

課本 3.2 定積分

當 a, b 是定數 (常數) 時, $\int_a^b dx$ 稱做**定積分** (definite integral).

習題 8

8.1 證明柯西的積分定義和古老的面積定義是相容的. 也就是說, 若矩形的長寬是 A 和 B, 則其面積是 AB. 放到積分的符號上, 令 $f(x) = B$ (常數函數), 請用柯西的定義證明

$$\int_0^A f(x)\,dx = AB.$$

8.2 試證明, 對每個 (固定的) 正整數 n, (2) 式中的 $f_n(x)$ 是黎曼可積. 你如果可以想像 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 是什麼樣子, 請說明你的想像.

8.3 課本 **3.2** 習題 1, 2, 5. (用某種電腦語言 (BASIC, FORTRAN, C, ...) 寫一個簡單的程式協助你作答.)

8.4 如果 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 中是連續的, 請證明它在 $[a,b]$ 中也必是有界的. 反之如何? 也就是說, 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間中是有界的, 那麼它一定會是連續的嗎? 解釋你的答案.