Lecture 9

課本 3.3 面積與平均值

負的面積. 廣義的平均值. 積分的單位.

數學定義的重要性

回顧一個數列 $\{x_n\}$ 收斂的定義:

> 令 $\{x_n\}$ 爲一實數數列. 如果有某數 x, 對所有的 $\epsilon > 0$, 都找得到 $N > 0$, 使得凡是 $n > N$, 必有 $|x_n - x| < \epsilon$, 則 $\{x_n\}$ 的極限存在, 且其極限值爲 x. 記作
>
> $$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

我們說過, 通常很難直接運用這個定義來驗證一個數列是否收斂. 因為這個定義裡面的一個關鍵, 就是**如果有某數** x 這句話. 通常我們很難預知這個 x 會是誰 (電腦並不能告訴我們確實的 x, 何況在理論的證明收斂之前, 我們根本不應該使用電腦去估計其極限值). 既然不知道 x 是誰, 那又怎麼能運用這個定義呢?

數學定義的目的, 是要把直覺上似乎很清楚, 細想之下又似乎不清楚的觀念給說清楚. 而且是以合於邏輯思維的符號或語言說清楚的. 比如說, 極限的觀念, 直覺上就是距離**要多小就可以多小**. 連續的觀念, 直覺上就是函數圖形**沒有斷掉**. 曲線下的面積, 就是曲線下**分割得越來越細的矩形面積和**. 這些在自然語言上無法定量描述清楚的觀念, 都在數學領域中被簡明而嚴格的定義了.

另一方面, 數學家總是企圖找到最基礎, 通常也就是最簡短的語句, 以定量而方便運算的方式, 來作為一個觀念的定義. 這是一個漸近倒推的思考模式. 我們今天看到的, 歷經蒼桑考驗的數學定義, 都幾乎是最簡最完備的了. 數學家喜歡從越簡單越好的定義敘述中, 推導出越豐富越好的數學定理. 而一套數學定理的容易理解與否, 容易預見與否, 容易證明與否, 都和定義的敘述直接相關.

所以, 通常而言, 數學定義是不便直接拿來應用的. 它是一套最抽象, 最簡明的語言. 而從這一套語言出發, 我們可以比較清晰地推導出很多定理. 而這些定理, 才會是比較容易被拿來應用的.

比如說, 我們曾說, 因為

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n},$$

而右邊的級數發散, 所以 $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ 也就不可積. 在直覺上, 這是頗清楚的. 一般而言,

> **若** $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ **爲兩數列**, $|x_n| \geq |y_n|$ **且** $\lim y_n$ **發散**, **則** $\lim x_n$ **亦發散**.

回顧

> $\lim x_n$ **發散的定義**

我們可以證明上面的敘述. 有了這個理論, 我們就比較容易判斷數列的發散了.

判斷收斂就比較複雜了.

只是說 $|x_n| \leq |y_n|$ 而且 $\lim y_n$ 收斂是不夠的. 例如

$$x_n = (-1)^n, \quad y_n = 1 + \frac{1}{n}.$$

固然 x_n 沒有發散, 但是它也**不收斂**. (有些人會說不收斂就是發散, 我們稍微分辨得清楚一點.)

但是我們曾經直覺地說, 因為

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2,$$

所以 $\sum 1/n^2$ 收斂. 這是為什麼呢? 觀察 $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ 這個數列是漸增的, 而且它們統統都 < 2.

實數的完備性

漸增但有上界之數列必收斂這句話, 雖然在直覺上我們會同意, 可不是理所當然就是對的. 比如說在有理數數系中, 這句話就不對. 回想用牛頓法計算 $x^2 - 2 = 0$ 的零根. 如果我們從 $q_0 = 1$ 出發, 則

$$-q_1 < -q_2 < -q_3 < \cdots \leq 0.$$

這些 $\{-q_n\}$ 是在有理數系中的漸增數列. 但是它們不收斂. 因為我們私下知道, 那個將要收斂到的值會是 $-\sqrt{2}$. 而它不是有理數, 它不在有理數系裡面. 所以對有理數系而言, $\{-q_n\}$ 這個數列的極限不存在, 也就是不收斂.

等價於**漸減但有下界之數列必收斂**.

一直到 1850 年前後, 數學家才開始問道: "究竟無理數是什麼?" 為什麼我們能說 $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$? (Dedekind, 1858). 我們在初中的時候可能是這樣學的:

$$(\sqrt{2}\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2(\sqrt{3})^2 = 6.$$

所以 $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$. 但是, 別太大意了,

$$(\sqrt{2}\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2}\sqrt{3})(\sqrt{2}\sqrt{3}).$$

結合律與交換律. 從整數開始, 可以感知的運算率. 可以嚴格地推廣到有理數的運算. 但是無理數呢? 我們理所當然地這樣運算, 但是這究竟有什麼道理? 數學家就開始了一趟歷時大約五十年的找尋實數定義的旅程. 今天稱為**實數建構論**. 欲知詳情者, 請到數學系學習高等微積分或是集合論這兩們課.

我們已經知道, **稠密**和**連續不斷**或是**沒有遺漏**是兩碼子事. 比如說有理數系是稠密的, 但是它遺漏了 $\sqrt{2}$. 這個遺漏, 很不幸地, 使得像**漸增但有上界之數列必收斂**這樣, 直覺上可感知其正確性與合理性的敘述無法成立. 這也使得整個奠定在極限觀念上的微積分有所瑕疵. 因此, 且不管**實數建構論**, 讓我們就以定義的方式來彌補有理數的這個缺失; 也就是說, 我們直接就定義**實數**就是符合以下的**完備性**:

任何層層相套的閉區間

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots$$

必有非空之交集.

所以, 在某種建構論中, $\sqrt{2}$ 其實就是被像 $\{q_n\}$ 這樣的有理數數列所定義的. 我們不詳細說了. 從這套 (其實是三套不同但等價的說法) 實數的建構論中, 我們就可以證明無理數乘法的結合律和交換律了. 所以, 也就為這幾百年來大家一直在做的事情, 補發了一張使用執著.*

有了**完備性**這個定義 (和數列收斂的定義), 我們就可以證明

實數中漸增但有上界之數列必收斂

這個定理.

若

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le M$$

是一個實數中漸增但有上界之數列. 令 $a_1 = x_1$, $b_1 = M$, 取 m_1 為 $[a_1, b_1]$ 之中點:

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

---

* 有些人認為實數的建構論是數學上非凡的成就之一, 另外一些人則認為這沒什麼大不了的, 因為實數已經有了很清楚的直覺意義了. 但是我想兩方都會同意, 把實數的特性總結歸納到一個簡單明瞭的**完備性**, 是一個非凡的成就.

若 m_1 仍是 $\{x_n\}$ 數列之上界, 則定義 $[a_2, b_2] = [a_1, m_1]$; 否則定義 $[a_2, b_2] = [m_1, b_1]$. 也就是說, 我們保持 b_2 仍是 $\{x_n\}$ 數列之上界, 但 a_2 又必落在數列之中. 換句話說, 存在某數 N_2,

$$a_2 \le x_n \le b_2, \quad \forall n \ge N_2 .$$

依此類推, 若已經定義了區間 $[a_k, b_k]$, 則取 $m_k = (a_k + b_k)/2$, 而定義

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, m_k] & \text{若 } m_k \text{ 仍是數列之上界,} \\ [m_k, b_k] & \text{否則.} \end{cases}$$

於是, 必存在某數 N_{k+1}, 使得

$$a_{k+1} \le x_n \le b_{k+1}, \quad \forall n \ge N_{k+1}.$$

這樣一來, 我們就有了一組層層相套的閉區間

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots .$$

根據實數的完備性, 這些閉區間有個非空集合的共同交集 $\cap[a_k, b_k]$. 但是因為

$$b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}},$$

所以 $\lim b_k - a_k = 0$, 亦即 $[a_k, b_k]$ 的長度趨近於零. 其實 $\cap[a_k, b_k]$ 之中只有一個點, 名之曰 ξ. 現在我們證明 ξ 就是數列 x_n 的極限.

任給一個 $\epsilon > 0$, 必有某數 K, $b_K - a_K < \epsilon$. 而且存在某數 N_K, 使得

$$a_K \le x_n \le b_K, \quad \forall n \ge N_K.$$

現在, 取 $N = N_K$, 則每當 $n \ge N$,

$$|x_n - \xi| \le b_K - a_K < \epsilon.$$

故得證.

實數的完備性, 也締造了實數的另一個特殊的性質. 這是一個在直覺上很簡單的性質, 稱為**最小上界定理**.

實數中的非空子集合, 若有上界則有最小上界.

什麼是實數的子集合呢? 空集合 $\emptyset$ 和實數本身 $\mathbb{R}$ 都是的. 現在我們只討論非空子集合, 也就是把 $\emptyset$ 排除在外. 並不是空集合特別困難而我們故意要排擠它, 而是因為它其實並不重要,

而它的存在卻會使得某些敘述變得麻煩.* 我們見過的實數子集合的例子有閉區間 $[0,1]$, 開區間 $(0,1)$, 半閉區間 $[0,\infty)$, 數列 $\{x_n\}$, 還有某函數 $f(x)$ 的定義域, 值域這一類的集合. 例如 $\sqrt{1-x}$ 的定義域是 $(-\infty,1]$, $\sin x$ 的值域是 $[-1,1]$.

如果 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集合, 記做 $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathbb{R}$, 若有某數 M 大於或等於 $\mathcal{A}$ 中的每個數, 記做

$$x \leq M, \quad \forall x \in \mathcal{A},$$

則稱 $\mathcal{A}$ 有上界, 而 M 是 $\mathcal{A}$ 的一個上界. 例如 $\mathbb{R}$ 沒有上界, (a,∞) 沒有上界; $(-\infty,1]$ 有上界, 比如說 1 就是一個上界, 2 是一個上界, 3 也是一個上界.

什麼是**最小上界**呢? 就是說比這個數再小一點點, 就不是上界了. 什麼叫做小一點點呢? 現在我們應該已經知道了, 凡是一點點的數量, 我們都可以用 ϵ 的形式語言來說:

> $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathbb{R}$, **若有某數** ω **是** $\mathcal{A}$ **之上界, 但是對任意** $\epsilon > 0$, **都存在** $x \in \mathcal{A}$ **使得**
>
> $$\omega - \epsilon < x.$$
>
> **則稱** ω **爲** $\mathcal{A}$ **之最小上界.**

例如 $[0,1]$ 很明顯地有最小上界, 就是 1; 而且它在區間內. $(0,1)$ 也有個最小上界, 也是 1; 但是它不在區間內.

但是如果限制在有理數系統中討論, 則所有介於 0 和 $\sqrt{2}$ 之間的有理數成一個子集合, 它 (在有理數中) 有上界, 比如說 2, 但是它 (在有理數中) 就沒有最小上界. 因為, 只要 $q \in \mathbb{Q}$ 是一個上界, 則 $q > \sqrt{2}$. 所以 $\delta = (q - \sqrt{2})/2 > 0$. δ 不是有理數. 但是我們取 $\bar{\delta}$ 為 δ 之十進位表示式之第一位非零位. 例如若 $\delta = 0.08578\cdots$, 取 $\bar{\delta} = 0.08$. 則 $\bar{\delta} \leq \delta$ 而且 $\bar{\delta} \in \mathbb{Q}$. 您可以看到, $\sqrt{2} < q - \bar{\delta} < q$. 所以 q 不是個最小上界. 同理可證 $q - \bar{\delta}$ 也不會是個最小上界. 依此類推, 上述集合在有理數中根本沒有最小上界.

習題 9

9.1 課本 **3.3** 習題 2, 3, 4, 12.

9.2 用 ϵ-N 論證 (的逆敘述) 證明

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

不存在. 也就是說, 數列 $\{(-1)^n\}$ 不收斂.

9.3 若 "漸增但有上界之數列必收斂" 這個敘述正確, 請證明 "漸減但有下界之數列必收斂" 這個敘述也就必然正確; 反之亦然.

---

* 試想, 當我們說, $\forall x \in \mathcal{A}$ 的時候, 是不是要費些口舌, 解釋如果 $\mathcal{A}$ 是空集合的話, 又該如何如何呢?

9.4 模倣最小上界定理, 敘述並證明一個最大下界定理.

9.5 證明最小上界定理. [我建議您詳讀 "漸增但有上界之數列必收斂" 的證明, 並且依樣畫葫蘆. 您可以在 $\mathcal{A}$ 任取一數 (一定有的, 因為 $\mathcal{A}$ 非空集合), 稱做 a_1. 然後任取 $\mathcal{A}$ 的一個上界, 稱做 b_1. 然後取其平均值 c, 如果 c 仍是 $\mathcal{A}$ 的上界, 取 $[a_1, c]$ 為 $[a_2, b_2]$; 否則取 $[c, b_1]$ 為 $[a_2, b_2]$. 接下來, 您就應該知道怎麼做了.]