Calculus (ME 1C) NAME _____

期末考 Jan 22, 1997 **學號** _____

1 (5 points) 以下命題的極限值是多少?

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$$

(A) 2

(B) ∞

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 0

2 (5 points) 以下命題的極限值是多少?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}.$$

(A) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx.$

(B) ∞

(C) 1

(D) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx.$

3 (5 points) 下列敘述中, 哪一個是錯的?

(A) 若 $f(x)$ 在區間 (a,b) 內可微, 則 $f(x)$ 在 (a,b) 內有反函數.

(B) 若 $f(x)$ 在 $\hat{x}$ 處連續, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$, 則 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\hat{x})$.

(C) 漸增有上界之實數數列必收斂.

(D) 若 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上連續, 且 $f(a)\cdot f(b) < 0$, 則必有一 $c\in[a,b]$, 使得 $f(c) = 0$.

4 (5 points)　下列敘述中, 哪一個和其他三個在邏輯上比較沒有關係?

(A) 微積分基本定理.

(B) (連續函數的) 中間值定理.

(C) 積分平均值定理.

(D) 微分平均值定理.

5 (5 points)　下列敘述中, 哪一個和其他三個的數學模型比較不同?

(A) 求 $y = f(x)$ 之曲線繞 x 軸旋轉所圍成的體積.

(B) 求火箭脫離地球所需要的功.

(C) 在固定邊長之條件下, 求矩形的最大可能面積.

(D) 求一個機率分佈函數的平均值.

6 (5 points)　下列敘述中, 哪一個是錯的?

(A) 每一個實數都是某一個漸增有理數數列的極限.

(B) 不管 $|x|$ 有多大, $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ 必定收斂.

(C) 不管 $|x|$ 有多大, $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$ 必定收斂.

(D) $\pi + (x - \pi) + 2!(x - \pi)^2 + 3!(x - \pi)^3 + \cdots$ 可能是某個函數在某個點附近的泰勒級數.

7 (5 points)　下列敘述中, 哪一個是錯的?

(A) $1 + \frac{1}{2!}\cos(x + 2) + \frac{1}{2!}\sin(x + 2) + \frac{1}{4!}\cos(x + 4) + \frac{1}{4!}\sin(x + 4) + \cdots$ 是某個函數在 $[-\pi, \pi]$ 內的傅立葉級數.

(B) $x^3 + x - 1$ 在 $x = 0$ 附近的泰勒級數是 $x^3 + x - 1$.

(C) $e^x \cos x$ 在 $x = 0$ 附近的泰勒級數是 $1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{24}x^4 + \cdots$.

(D) 令 $p_3(x)$ 是 $\ln x$ 在 $x = 1$ 附近的三階泰勒多項式. 若 $0 < x < 2$, 則存在某個介於 0 和 x 之間的 ξ, 使得

$$|\ln x - p_3(x)| = \frac{1}{4}|\frac{x - 1}{\xi}|^4.$$

8 (5 points)　下列函數中, 哪一個在 $[1, \infty)$ 上的廣義積分不可積?

(A) $\dfrac{1}{1 + e^x}$

(B) $\dfrac{1}{1 - \cos x}$

(C) $\dfrac{\sqrt{x}}{1 + x^2}$

(D) $\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

9 (5 points)　下列函數中, 哪一個收斂到 0 的速度最快?

(A) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$

(B) $\lim_{x\to 0} x - \sin x$

(C) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

(D) $\lim_{x\to 0} \sqrt{1+2x} - (1+x)$

10 (5 points) 求

$$\int_0^1 x \arctan x^2 \, dx.$$

(A) 0

(B) $-\dfrac{1}{4}$

(C) $\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\ln 2}{4}$

(D) $\dfrac{1}{8}(\pi - \ln 2)$

11 (10 points)敘述 (第一型式的) 微積分基本定理.
證明上述定理.

12 (10 points)假設你開了一家板凳工廠, 而且訂立了以下的促銷策略: 若一次購買 1–300 只板凳, 則每只單價 900 元整. 但若一次購買 300 只以上的板凳, 則超過 300 只的部分, 每多一只, 多出的那只的單價比前一只減 5 元. 例如買 302 只, 則前 300 只每只 900 元, 多出的兩只, 一只 895 元, 另一只 890 元. 假如每只板凳的成本是 500 元. 請考慮, (1) 哪種數量的定單使你一次賺最多錢? (2) 你有賠本的可能嗎? 如果有, 在什麼情況下會賠本? (3) 如果你希望在每張定單上至少賺 1000 元, 那麼該在這份促銷策略上附加什麼但書呢?
[建立數學模型並說明如何求解: 7 分. 計算出結果: 3 分.]

13 (10 points)假設你開了一家加油站. 有一個地下油槽. 這個油槽是個圓柱體, 直徑 3 m, 長 4 m, 水平橫躺置於地面至下, 其圓柱之上側距加油管口的高度差是 3 m. 請問, 要將滿滿的一槽油全部抽上來, 總共需要作多少功? (汽油的密度是 673 Kg/m^3.)
[建立數學模型並說明如何求解: 7 分. 計算出結果: 3 分.]
[加分題. 最多加 10 分. 假如抽油馬達每施功一焦耳的成本是 0.08 元. 如果你想保持每抽一公升 (0.001 m^3) 汽油的抽油成本在 2 元以下, 你該怎麼做? (以上假設的成本都沒有事實根據, 純屬假設.)]

14 (10 points)(1) 請寫出, 在十進位計數系統中, $0.\bar{9}$ (0.9 循環) 的定義.
(2) 證明 $0.\bar{9} = 1$.

15 (10 points)當 $x \neq 0$ 時, 定義 $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. (1) 必須定義 $f(0) =?$ 才使得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 處連續?

(2) 現在, 令 $f(x)$ 如你所下的定義. 證明 $f(x)$ 在每一點 x 皆可微.

(3) 令 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的一次導函數. 證明 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 處不連續.

$\mu = 56.6$, $\sigma = 11.0$.

$$\{80, 75, 74, 71, 70, 69, 69, 68\} \geq \mu + \sigma,$$
$$\{32, 35, 38, 40, 41, 41, 44, 43, 45\} \leq \mu - \sigma.$$