Calculus (ME 1C) NAME _____

期中考 Dec 2, 1996 **學號** _____

1 (5 points) 以下命題的極限值是多少?

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}$$

(A) 2
(B) ∞
(C) $\frac{1}{2}$
(D) 0

2 (5 points) 令 $f(x)=x^3+1$, $g(x)=2^{x^2+1}$, $h(x)=\sqrt{x+1}$, $k(x)=\log_2 x$. 以下敘述何者為真 (單選)?
(A) $h(g(x))=2^{x+3}$.
(B) $h(x)$ 的定義域和 $k(x)$ 的定義域一樣.
(C) $k(g(x))=g(k(x))$.
(D) $k(f(x))$ 的定義域是 $\{x>-1\}$.

3 (5 points) 下列敘述中, 哪一個和其他三個在邏輯上比較沒有關係?
(A) 實數的完備性.
(B) 函數 $\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 處不連續.
(C) 漸增有上界之實數數列必收斂.
(D) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 內為連續函數, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$, 則必有一 $c\in[a,b]$ 使得 $f(c)=0$.

4 (5 points) 下列敘述中, 哪一個和其他三個在邏輯上比較沒有關係?
(A) 數列 $\{x_n\}$ 收斂到 $\hat{x}$ 的 ϵ-N 定義.
(B) 函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間內的曲線下面積.
(C) 函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中的反函數.
(D) 函數 $f(x)$ 在 x_0 處的切線斜率.

5 (5 points)　令 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上連續. 下列敘述中, 哪一個不是 $f(x)$ 必然具備的性質?

(A) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 內有界.

(B) $f(x)$ 在 (a,b) 內可微.

(C) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 內可積.

(D) 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$, 且 $\hat{x} \in (a,b)$, 則 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\hat{x})$.

6 (5 points)　敘述柯西-西瓦茲不等式 (Cauchy-Schwatz inequality).

利用它來證明

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}, \quad \forall x, y \ge 0.$$

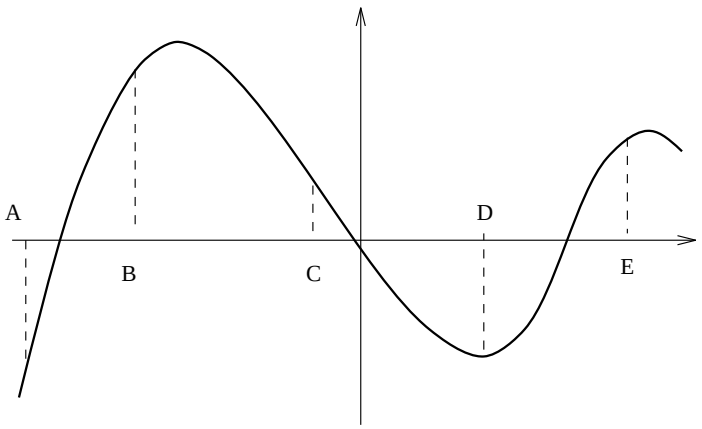
7 (10 points) 敘述實數完備性的定義.

陳述五條與實數完備性有關的定理.

8 (5 points)　下圖是某 $f(x)$ 的圖形. 在標示的 A, B, ..., E 之中, 哪個點的

(a) $f(x)$ 最大?　　(b) $f(x)$ 最小?

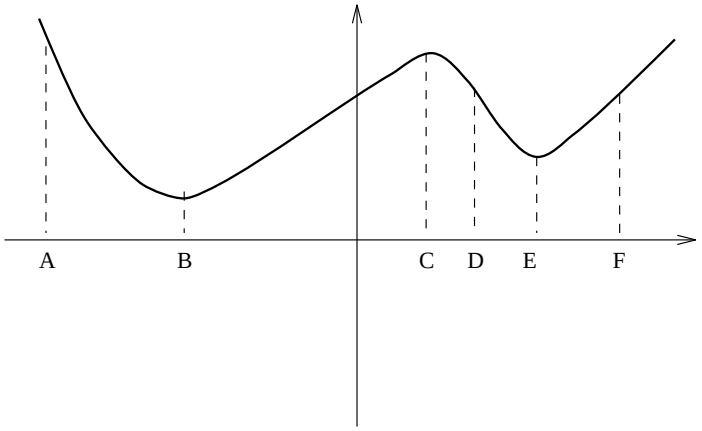
(c) $f'(x)$ 最大?　　(d) $f'(x)$ 最小?



9 (5 points)　下圖是某 $f'(x)$ 的圖形 (注意, 不是 $f(x)$). 在標示的 A, B, ..., F 之中, 哪個點的

(a) $f(x)$ 最大?　　(b) $f(x)$ 最小?

(c) $f'(x)$ 最大?　　(d) $f'(x)$ 最小?



10 (10 points)令 $0 < a < 1$ 為一常數. 考慮數列

$$x_n = a^n, \quad n \geq 1.$$

證明 $\{x_n\}$ 收斂.

現在我們知道, 存在某數 $\hat{x}$, 使得 $\lim x_n = \hat{x}$. 你認為 $\hat{x}$ 是什麼數呢?

用你自己觀察的 $\hat{x}$ 值以及 ϵ-N 論證, 證明

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \hat{x}.$$

11 (10 points)敘述函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 區間中均勻連續的 ϵ-δ 定義.

我們知道 x^2 在 $[a, b]$ 中是連續的, 所以 x^2 在 $[a, b]$ 中是均勻連續. 請針對這個例子, 找出定義中的 δ 與 ϵ 的關係.

12 (10 points)敘述極限的夾擊定理.

若 $\xi \in [x, x + h]$, 證明

$$\lim_{h\to 0} \xi = x.$$

13 (10 points)敘述中間值定理.

敘述連續函數的積分平均值定理.

證明連續函數的積分平均值定理.

14 (10 points)敘述 (第一型式的) 微積分基本定理.

用中文解釋上述定理的涵義.

如果 $f(x)$ 是連續函數, 利用積分平均值定理, 證明上述定理.

$\mu = 60.7$, $\sigma = 15$.

$$\{95, 91, 91, 85, 83, 82\} \geq \mu + \sigma,$$

$$\{34, 34, 38, 41, 41, 43, 44\} \leq \mu + \sigma.$$