114-2 第 20 屆文化脈絡中的數學

3 月 10 日課後筆記分享

- 數學四徐同學

3/10 艾雪，荷蘭版畫家（用木頭，銅板，石版當作作畫的媒介）

代表作：瀑布（1961）畫裡的水往上流，又得到動能，往下流轉動水車 → 永動機（impossible）

⇒ 視錯覺的藝術：假設一個看似合理的世界

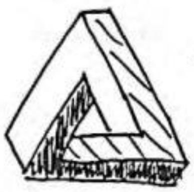
⇒ 反證法：利用矛盾來揭示真相，而前面的假設卻合乎邏輯

他用畫作重新詮釋了物理和數學概念

ex. 相對論（1953）

↳ 他受到數學家的注意，並受邀到阿姆斯特丹的數學家大會舉辦個展

↳ 潘洛斯的心得：這是最簡單的「不可能」空間結構

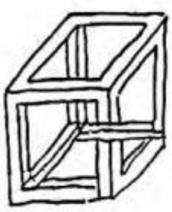


→ 潘洛斯三角形 （鴨子 vs 兔子）

這種圖案被拿來做心理測驗

（有3個直角的三角形）

ex. 瞭望台（1958）：不是最簡，但數學課常見



瀑布放了3個

潘洛斯三角形

3/10 • 畢業作：八頭像(1922) → 工藝學校，地磚壁紙

↳ 是平面上的循環，圖案互相貼合

ex. 蜥蜴也會用這樣的概念 → 平面拼貼 (Tessellation)

圖案彼此貼合，沒有背景

平面拼貼的數學：三角形、凸四邊形，正六邊形與不規則六邊形皆可拼貼

而萊斯太太發現了14種可以鋪滿平面的凸五邊形，UniMath 在2015年報導了第15種

• 連續漸變與循環：晝與夜(1938)

偶對稱 → 左右線條對稱

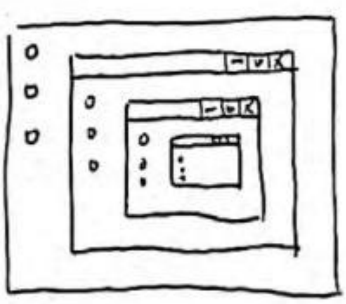
奇對稱 → 左右顏色相反 or 物質

→ 它的變形也表達了生物的滅覺與再生 $\boxed{\text{循環}}$

• 尺度的循環 \ 週期性

ex. 畫廊(1956) → 畫廊裡展示艾雪的畫 (也包含畫廊)

ex. 遠端使用電腦桌面、包裝盒上有產品本身



3/10 · 用動畫展示畫廊概念：旋轉同時縮放

⇒ 實現了旋轉型的尺度週期概念

· 無窮：ex. 龐加萊圓盤，由無窮多個三角形組

↳ 在新幾何意義下，每個三角形面積相

ex. 極限圓盤四，由天使 & 魔鬼組成

↳ 它可以被貼滿整個平面，想像它

占滿整個南半球，再投影

⇒ 形成圓盤

艾雪的視錯覺藝術作品，是否在挑戰真實性

數學的真實性跟物質沒有關係，也獨立於心靈的存在

· 課後延伸思考

在課堂上聽到老師介紹 Tessellation 時，讓我

聯想到，高中時曾聽過同學分享，他在選修課

認識到「鑲嵌」這種藝術。經過查詢後，

發現它就是老師上課時提及的 Tessellation。

而鑲嵌也跟我學習過的圖論有非常深厚的

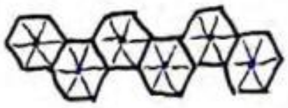
關係。

首先，任何在平面上無限延伸的鑲嵌圖形

都遵循 Euler 多面體公式：$V-E+F=2$

（V 是頂點數，E 是邊數，F 是面數）

3/10 此外，在圖論中，每個平面圖都有一個對偶圖。如果在鑲嵌圖案的每個多邊形中心點畫一個頂點，並將多邊形的中心點連起來，就會得到另一個鑲嵌圖案。例如：蜂巢狀的鑲嵌(正六邊形)的對偶圖就是正三角形鑲嵌。



這說明不同形狀之間內在的對稱邏輯

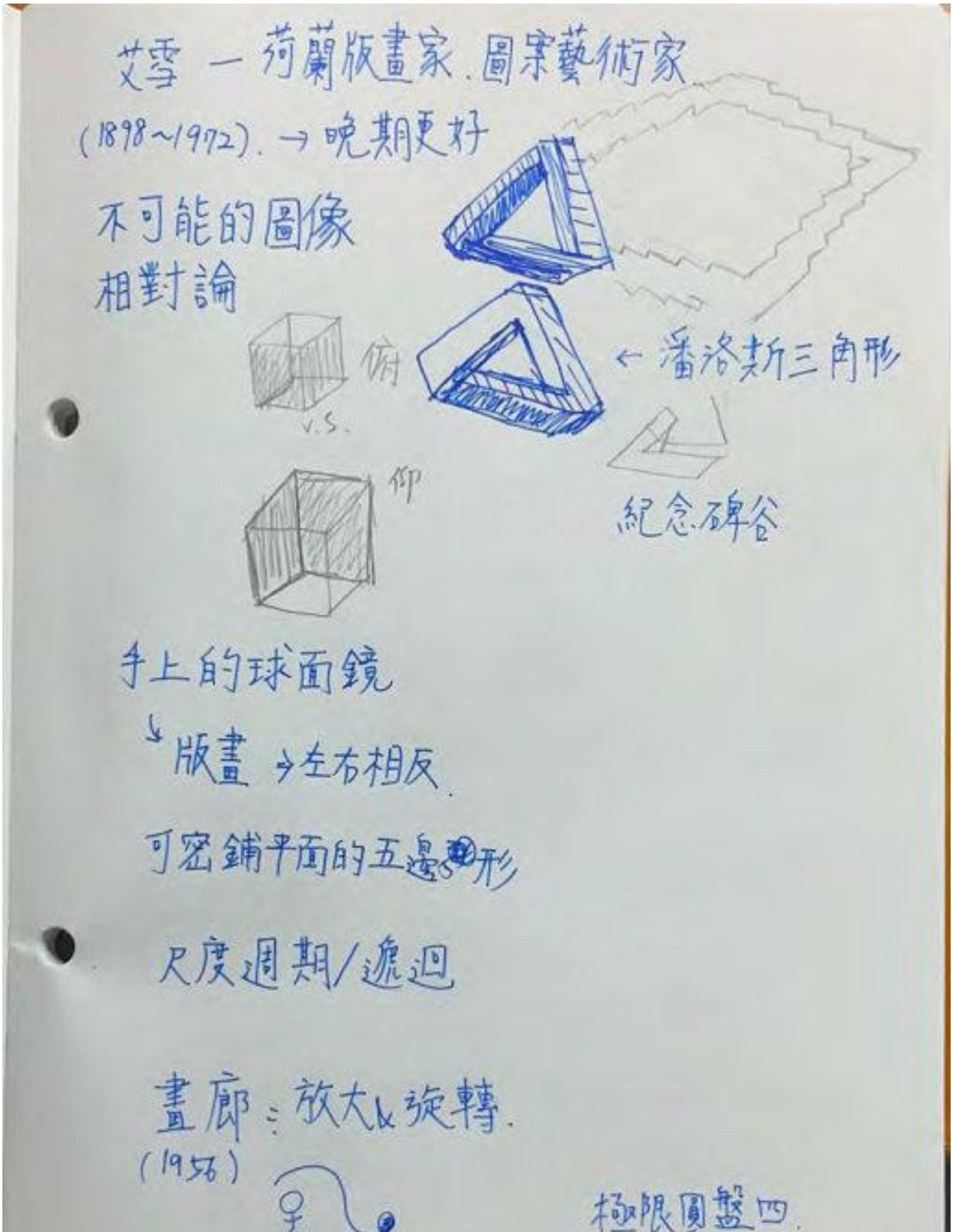
鑲嵌也可以被視為一種特殊的正則圖，例如：正方形鑲嵌是一種4-正則圖，六邊形鑲嵌是一種3-正則圖。

圖論中著名的「四色問題」也能被應用於鑲嵌 它的條件是：相鄰的多邊形顏色不能相同。而我們要討論最少需要幾種顏色。例如：正方形鑲嵌需要2種，而正六邊形需要3種。

高中剛認識鑲嵌時，只覺得它是一種有規律的藝術表現，在課後詳細研究後才發現原來隱涵了這麼豐富的數學概念，果然很適合作為多元選修的教材 ><

（後面還有）

● 大氣三蔡同學


艾雪 — 荷蘭版畫家.圖案藝術家
(1898~1972). → 晚期更好

不可能的圖像
相對論

俯
v.s.
仰

← 潘洛斯三角形

紀念碑谷

手上的球面鏡
↳ 版畫 → 左右相反.

可密鋪平面的五邊形

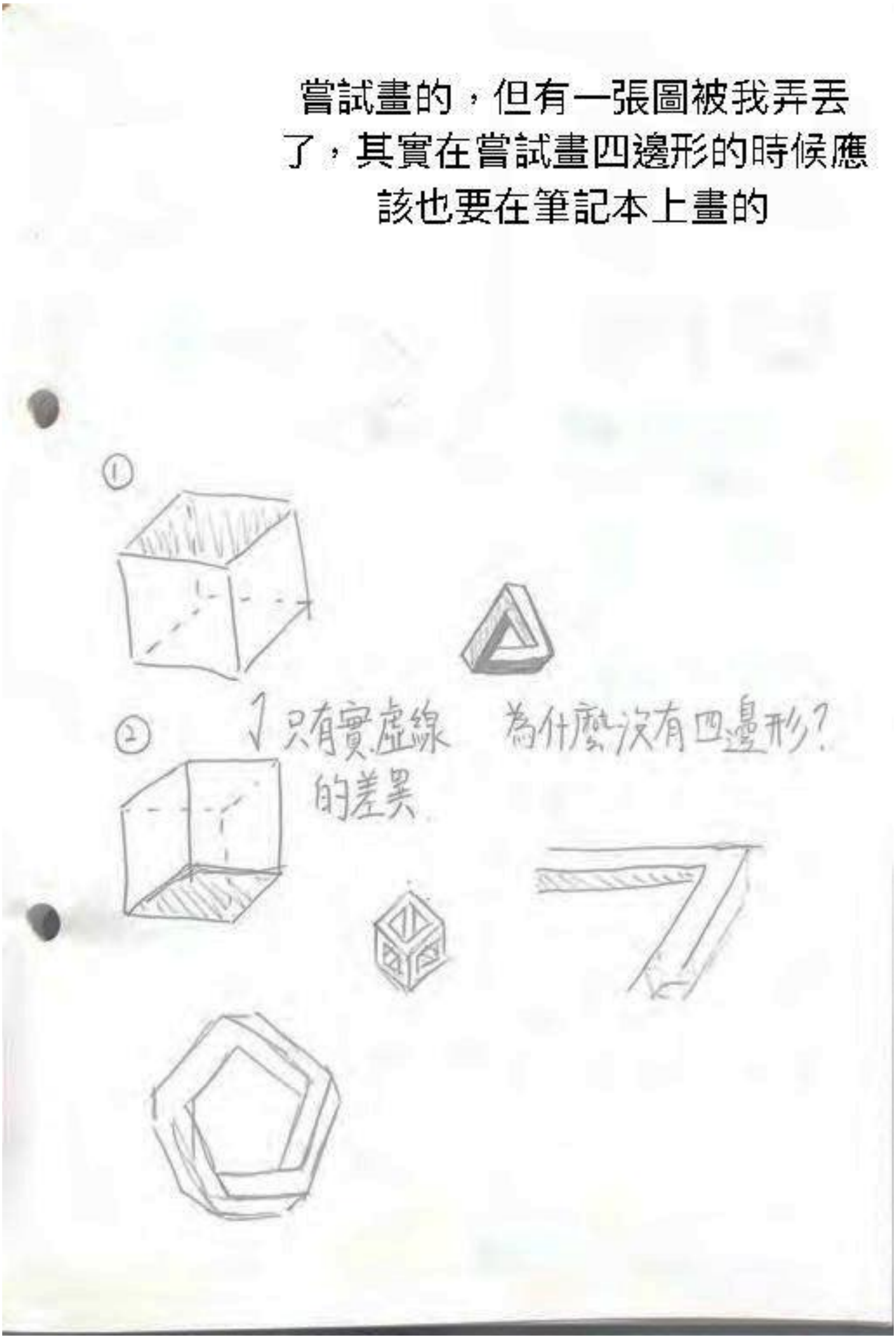
尺度週期/遞迴

畫廊：放大&旋轉.
(1956)

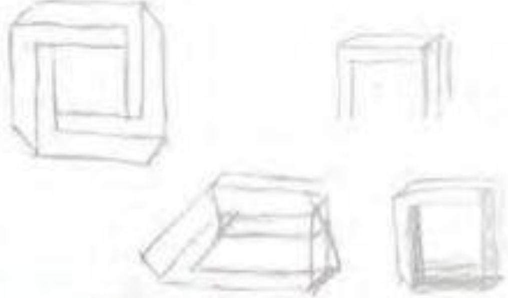
same.

極限圓盤四.
天使與魔鬼

嘗試畫的，但有一張圖被我弄丟了，其實在嘗試畫四邊形的時候應該也要在筆記本上畫的



真實性.
心靈
物質
數學



非課程內容之思考:

1. 為什麼潘洛斯三角形沒有四邊形的圖像?又或者其實也存在?(但只查到正方體).

嘗試想像四邊形的樣子,但發現想像不出來...(後來想出來了).

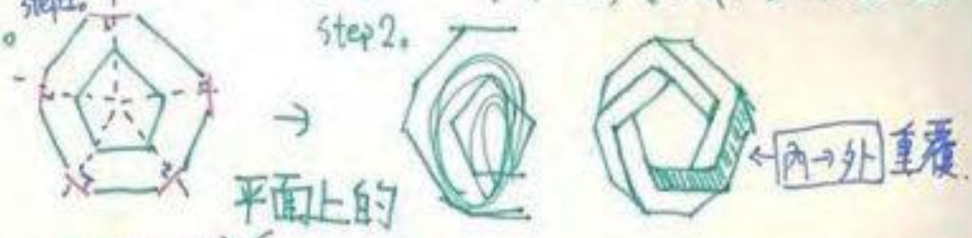
我認為我想像不出來四邊形是因為一直被真實世界所理解的四邊形固化了,所以畫了好幾個後,在畫邊角時只看邊角,思考這個小角能畫出的所有正方體結構後,再思考什麼樣的規律可以畫出.

所以我畫出的結果是:

① 和潘洛斯三角形對比,可以看出:兩者的每個"面",皆是由上一條"邊"內側,連接至下一條"邊"外側.

② 且邊緣皆有一垂直於線段交角的線。

由①和②這兩個我觀察到的東西，可以繪出更多邊形的：ex。



2。思考人類觀察平面上的物體時，如何由線與面觀察平面上的圖想呈現的立體物品。

我認為是視覺慣性（ex。立體物品有影子，透過陰影，大腦就會辨識出這是立體的）。

ee題：

我不同意「數學」的真實性獨立於「心」和「物」之外。我認為「數學」的源頭是「物」的真實性，並透過「心」的真實性將之潤色與詮釋，以成為「數學」這個可使人理解之抽象概念。

因此我認為「數學」具有其真實性，且這個真實性是「心」與「物」的真實融合而成的結果。