

114-2 第 20 屆文化脈絡中的數學

4 月 7 日課後筆記分享

- 地科—吳同學呼應「勇氣」

* 數學作浪—種語言

教學 vs. 英文
 名詞
 · 沒有面積
 — 沒有厚度

數學脈絡改善教育
 · 老師引入
 全新數學物件
 · 鍛鍊教學邏輯的勇氣
 國高中老師
 可能不被白取代

$y = (x-k)^2 + k$

* π

西元前 1900 年 巴比倫人 $\frac{1}{38}$
 1600 埃及人 $4 \times (\frac{8}{9})^2$
 900 印度天文學家 $\frac{331}{108}$
 250 古希臘人 阿基米德 $3.14084 < \pi < 3.14289$

π 從哪來

- 級數
- 機率 — 布魯投針
- 演算法
- 積分
- 幾何

$\frac{1}{2}B$
 $A=B=1$
 $\frac{1}{2}B$ 無窮極

* 卡片筆記法

連結：「知」「識」

核心重點「分類轉向「連結」

上課筆記

靈感筆記) 永久筆記
文獻筆記

主動學習

培養自己建立架構的能力

提升判斷力

筆記工具 notion

知識不只是獲取訊息，而是要有自己的看法

* 從比魯尼的「弦」到現代訊號：
一場跨越千年的幾何接力

● 古人眼中的星軌運動 = 實驗室裡的正弦波

星軌 → 發電機

旋轉產生規律的重複

弦 → 波

古代 = 測量土場的靜態幾何

現代 = 描述訊號的動態波形

傅立葉的數學稜鏡

18世紀的絕對真理 = 任何連續的複雜波形，皆可由無數個正弦波疊加而成

數位音樂

捨棄無用頻率 代價 完美的參數，抹除人的「溫度」
「瑕疵」的美學。

Auto-tune 濾掉雜訊

真實的本質，數學模型是完美的，但文化是破碎而真實的

* 從三角比到三角函數及傅立葉分析的應用

探索古人為什麼沒有發現三角比的週期性

為什麼在直角座標發明後他們發現了週期性

角度認知 視幾何圖形 只有 $0 \sim 180$ 度

↓ 直角座標發明後

角度是沿著座標軸轉出來的 歐拉引入單位圓

連續的概念 = 靜態幾何量 \rightarrow 動態的變數

θ = 自變數
黑 θ = 應變數
幾何代數化

牛頓把三角函數展開成無窮級數

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

* π

π 是圓周長與直徑的比值，與圓的大小無關

古代方法逼近 π

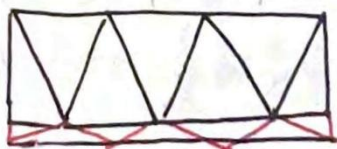
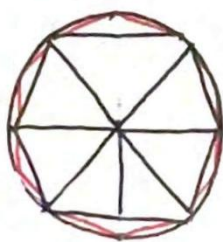
邊數越多的多邊形，越接近圓

「極限」概念的雛形

劉徽 = 割圓數

阿基米德 = 窮舉法 =

正 96 邊形夾擠法



Gregory - Leibniz 級數 - 用無限加法表示 π

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots \quad (|x| < 1)$$

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \quad \text{無限交錯級數}$$

Wallis 公式，無限乘積表示 π 。

從一條彎曲的線，到無窮多個數的乘積， π 始終在那裡。
等待不同數學語言重新發現。

數學脈絡改善教育 — 鍛鍊數學邏輯的勇氣

如果教育強調的是答案而不是脈絡，那學生就會傾向避免錯誤而不是探索可能。當結果被放在最前面，學習就容易變成追求正確的過程，而不是理解的過程。

AI可以快速給出答案，人們學習的價值不再只是掌握知識本身，而是是否仍保有願意自己推理、承受不確定的能力。

以下節錄 靜宜大學林昶伶校長寫的〈AI崛起，你更需要讀大學〉 2026年1月29日出版

AI的確能快速給出答案、生成文字、寫程式、做簡報，但它無法替人「成為一個成熟、能負責任思考的人」。大學存在的核心目的，從來不只是「傳授知識」，而是培養一個人如何：

提問而非只接受答案。

判斷資訊的真偽與價值

在不確定中做出負責任的決策

與他人合作，對社會產生影響

AI讓「知道答案」變得更容易，卻也凸顯「知道該問什麼問題、為什麼這樣做」的重要，這正是大學教育無可取代的價值。

AI越冷靜，我們越要保持熱情。

科技越進步，人愈需要教育；工具愈強大，價值判斷愈重要。

從直角座標到單位圓、連續的概念，再到波奧無窮級數，這些內容雖然都學過，但彼此之間是斷裂的。

直到這次聽同學報告，我才第一次把這些零散的知識串起來，逐漸了解數學的脈絡。這也讓我重新了解到知識是要看到它們之間的關聯才是真正理解它。

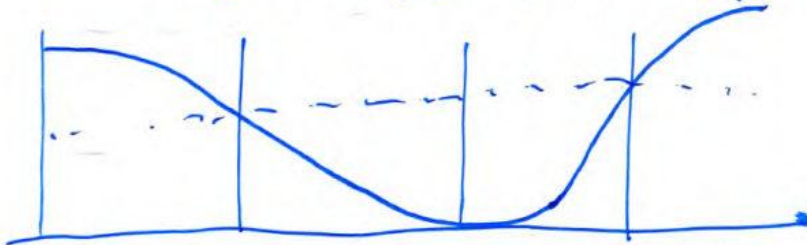
(後面還有)

- 地院一陳同學對傅立葉感到「豁然開朗」

I 從比魯尼的「弦」到現代訊號 \Rightarrow 一場跨越千年的
幾何接力

II 沙漠中的測量者 \Rightarrow 生活和信仰的幾何學 \Rightarrow 看法
 高山上的數學家 \Rightarrow 吐出地球的軌
 古人眼中的星軌運動 \Rightarrow 現代正弦波

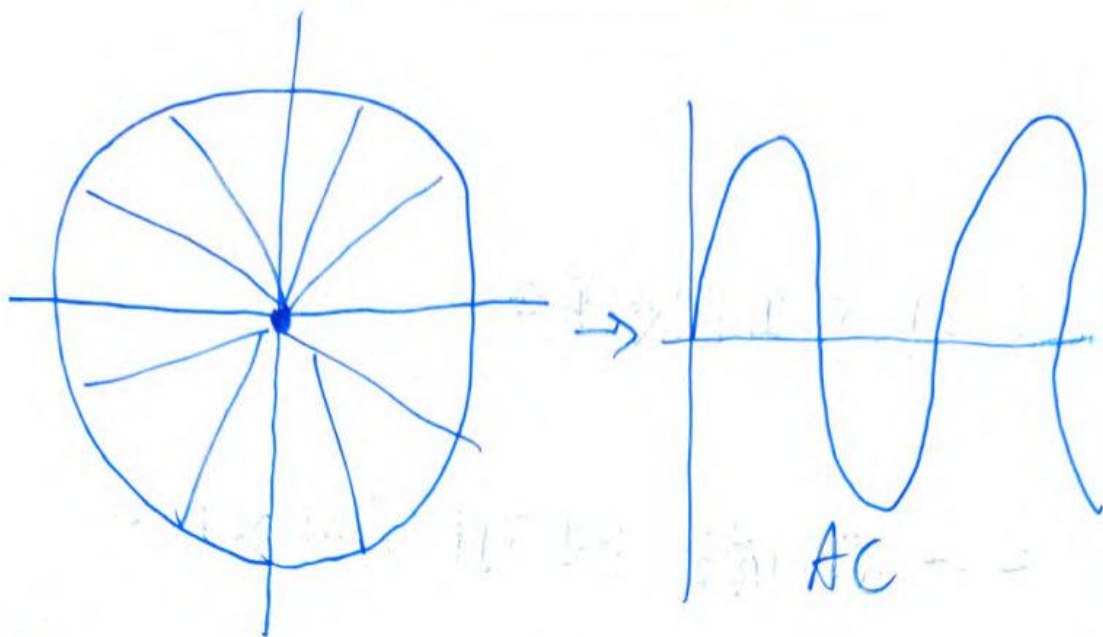
III 從星軌到發電機 \Rightarrow 規律的本質 \Rightarrow 週期性
 \Rightarrow 古代 \Rightarrow 觀測星體運行軌跡 \Rightarrow 圓周運動
 現代 \Rightarrow 發電機的轉子在磁場中 \Rightarrow 旋轉運動



● \Rightarrow 共同的數學語言 \Rightarrow 只要有旋轉 \Rightarrow 有規律的重
 復

IV 旋轉的攝影 \Rightarrow 幾何變成波

\Rightarrow 圓周上的垂直投影 \Rightarrow 連續的正弦波
 相量 \Rightarrow 將空間中的幾何 在扁分析訊號的利器
 for 古人 \Rightarrow 星軌運動 \leftrightarrow for 工程師 \Rightarrow 交流電 (AC)



(雷)

電對於我們現代生活有很大的影響，讓我脫離了蒸氣時代。不過我其實很迷戀這種工業風格。我記得它好像被稱作蒸氣維多利亞時期，真一種蒸氣龐克。回到正題，我第一次接觸關於電的知識是在國中理化。我不知道為什麼我在其它理化篇章，ex: 力學、氧化還原都不知道都特別慘，但一碰到電類的篇章，ex: 電路、發電機都是第一名的存在。因為我個人覺得電力在某面很人性化，不像力學都只有冷冰冰的數字。電力的走法

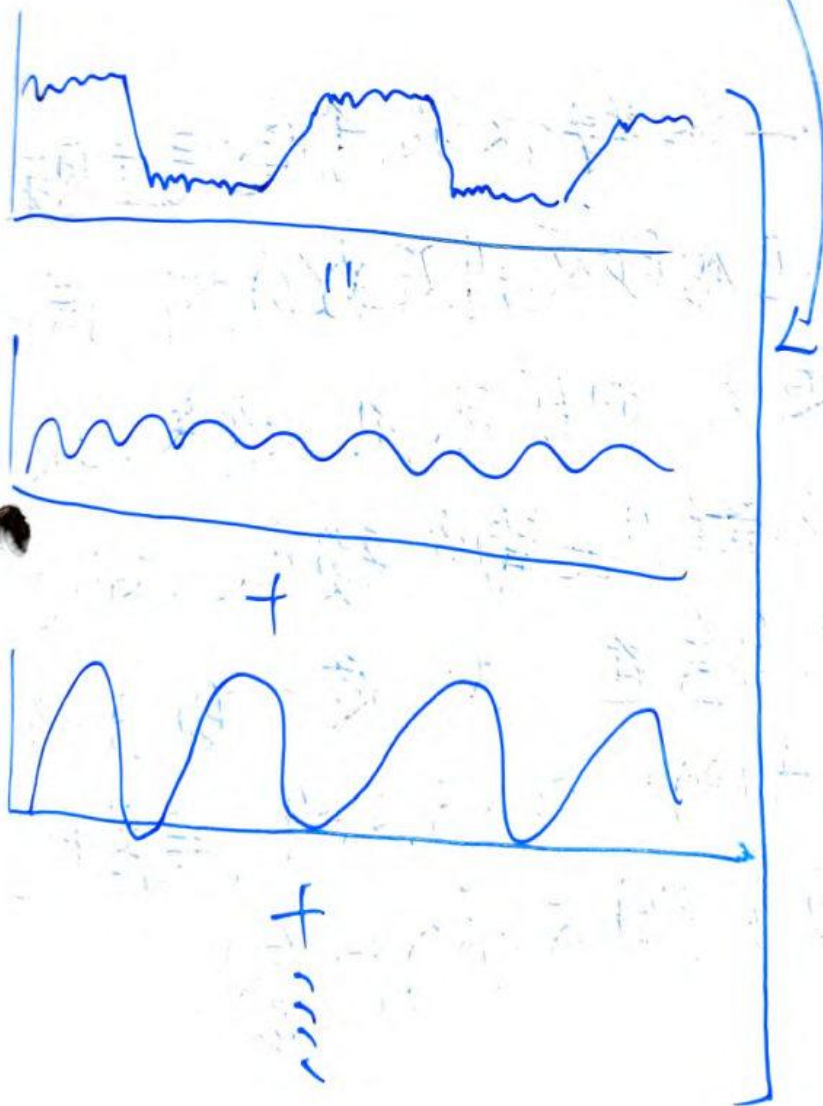
就很符合我的自覺

工訓號的數學稜鏡

⇒ 白光 ⇒ 複雜的現實訊號

單色光 ⇒ 純粹的正弦波

● 18世紀的絕對真理 ⇒ 任何連續的複雜波可
由無數的正弦波組成



VI 數位音樂的復原術

⇒ 從時間走向頻率

⇒ 保留關鍵頻率，丟棄我們聽不到的新數據

⇒ 現代數位原型的傳 損上是由數十個
的三角函數的狂奔
心得>

第一次聽到傅立葉轉換的，我覺得這個東西超級難，尤其因為涉及到兩個領域，才讓我對它有更深刻的印象，但後來知道後，感覺它基本上和泰勒展開很類似，都是用不同的函數組合在一起，使我們且數無限地接近我們的目標函數，讓我們有種瞬間豁然開朗的感覺。