114-2 第 20 屆文化脈絡中的數學

5 月 19 日課後筆記分享

- 機械四張同學試將 Nabla 算子作用在四元數上，還原了它更多的性質

一、筆記

・實數是什么？是數線上的一个点座標，所有点的集合

・複數有而實數沒有的運算性質：

三一律 ⇒ 需在一條數線上，給定一方向，複數沒有大於小於的觀念（$z^2+1>0$ 無意義）

複數的絕对值才有大小於。

※平面上的点是可以用來計算的（即複數）。

・令 2 个 unit circle 上的複數 $u=a+bi \to re^{i\alpha}$，$v=c+di \to se^{i\beta}$

$$\frac{u}{v}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{|c^2+d^2|_{=1(\text{單位圓})}}=\frac{|u|}{|v|}\left[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)\right]=\frac{r}{s}e^{i(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{1}{|c^2+d^2|}\left[\underbrace{(ac+bd)}_{\text{內積}}-\underbrace{(ad-bc)}_{\text{行列式（有向面積）}}i\right]$$

・高斯嘗試把平面數 $(a+bi)$ 推廣到空間數 $(a+bi+cj)$ 但失敗 ⇒ 不符合內部一致性

・漢彌爾頓發展了「四元數」：$\underline{u}+a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$，若 $b=c=0$ ⇒ 降維成複數；$b=c=a=0$ ⇒ 降維成實數

純量這項是必需的

・定義 i.j.k 相乘的規則：

$i^2=-1$　$j^2=-1$　$k^2=-1$

$ij=k$　$jk=i$　$ki=j$

$ji=-k$　$kj=-i$　$ik=-j$

① 不滿足交換律 ⇒ 在此之前，數学裡沒有不滿足交換律的乘法

② 其實就是外積的右手定則

・四元數的除法 ⇒ 乘以倒數：

共軛四元數：$p'=u-a\vec{i}-b\vec{j}-c\vec{k}$

絕对值：$pp'=u^2+a^2+b^2+c^2=|p|^2$

則四元數倒數 $\frac{1}{p}=\frac{p'}{|p|^2}$

保留：結合、分配律

拋棄：交換律

・一直到 Maxwell 整合电磁学，才第一次出現了「非四元數不能解」的問題：

Maxwell 方程組

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

・黑維塞把四元數簡化，只保 Maxwell 方程組會用到的部份 ⇒ 变空間向量 $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ 与把實數項拋棄

但空間向量不属於數学中任何一个數系：

① 不相容於 real number

② 不成代數体系（內積非向量，是純量）

③ 不滿足結合律 $(\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{j}=-\vec{i}$，$\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{j})=\vec{0}$

④ 無消去律（外積不保持非零）

後來，空間向量自成一个体系叫《Vector Analysis》

二、心得與聯想：這禮拜的課程，讓我最感興趣的是「四元數」的內容，一開始看到時還沒覺得有多特別，看起來只是空間向量再加一項而已，但仔細想想，一直一來我們都是拿純量和向量2种，從來沒有看過這种純量和向量放在一起的東西，因此我覺得特別神奇。老師在後面提到了∇"Nabla算子，看到這个我非常熟悉，這是我在「向量微積分」裡學过的，它的定義是：

$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$，和它有很大關係的有3个 ①gradient ②散度 ③旋度

其中gradient是給純量場的，表示此純量場在空間中變化最劇烈的方向；散度是給向量的，表示出此純量場的發散or收斂程度，也可代表「通量」；而旋度代表了此向量場的旋転趨勢，而其中散度是$\nabla\cdot\vec{v}$，旋度是$\nabla\times\vec{v}$，一个是內積一个是外積，但是如老師所說，內積和外積是在向量calculus發明後才有的，因此我就好奇在內積外積發明前，人們是否可用四元數來算散度和旋度？這个猜想的依據便是Maxwell equations就是2个散度和2个旋度。首先我令一个四元數 $Q=S+F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$，S是純量，用老師上課提到的「四元數乘法規則」($ex: i^2=-1, ij=k \cdots$) 乘上Nabla $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$：

$$\nabla Q=\underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial S}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial S}{\partial z}\vec{k}\right)}_{\nabla S}+\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left(F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}\right)}_{\nabla F}$$

展開∇F：

①$\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}$乘進去：

$\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}(F_x\vec{i})=\frac{\partial F_x}{\partial x}i^2=-\frac{\partial F_x}{\partial x}$

$\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}(F_y\vec{j})=\frac{\partial F_y}{\partial x}ij=\frac{\partial F_y}{\partial x}\vec{k}$

$\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}(F_z\vec{k})=\frac{\partial F_z}{\partial x}ik=-\frac{\partial F_z}{\partial x}\vec{j}$

②$\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$乘進去(依此類推)：

$-\frac{\partial F_x}{\partial y}\vec{k}$、$-\frac{\partial F_y}{\partial y}$、$\frac{\partial F_z}{\partial y}\vec{i}$

③$\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$乘進去(依此類推)：

$\frac{\partial F_x}{\partial z}\vec{j}$、$-\frac{\partial F_y}{\partial z}\vec{i}$、$-\frac{\partial F_z}{\partial z}$

故將完整展開後：

$$-\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial x}\vec{k}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\vec{j}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\vec{k}-\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial y}\vec{i}+\frac{\partial F_x}{\partial z}\vec{j}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\vec{i}-\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$=-\underbrace{\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)}_{\nabla\cdot\vec{F}}+\underbrace{\left[\vec{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\right]}_{\nabla\times\vec{F}}$$

$$=-\mathrm{div}\vec{F}+\mathrm{curl}\vec{F}$$

因此把一个4元數展開後，我發現：

$$\nabla Q=\nabla(S+\vec{F})=\nabla S+(-\nabla\cdot\vec{F})+(\nabla\times\vec{F})$$

展開後的純量部份S，其實就是純量場S取gradient「∇S」，而向量部份$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$，展開後就是負的$\vec{F}$取散度$-\nabla\cdot\vec{F}$加上$\vec{F}$取旋度$\nabla\times\vec{F}$。

經由这些自己實際操作一次四元數的運算、展開，我第一个想法是覺得
很神奇，因為我一開始預期是只有要找散度和旋度，但最後的結果是不只
散度和旋度，連"gradient"都出現在了展開後的式子，这也再次表現了我真的
很先入為主的把純量和向量切割開來，但其實四元數裡本來就同時包含
純量和向量。我第二个想法是感覺我更了解向量場、Nabla、向量微積分这些
math 概念，真正自己算过一次四元數後才体会到原来这些知識是全部串在一
起的，但同時我也体会到，四元數的運算真的非常麻煩、耗時，遠不如
把 gradient、散度、旋度等概念拆開來的易学，因此我最大的感悟是，四
元數就觀念学習、統整來說，非常好，內容很完整，但如果是實務上應
用的話，四元數未必是好的選擇，因其效率實在是不佳，在学習時
易使人「失焦」而忽略了真正要学的內容。因此我会說四元數是一套好的
「教材」，但不是好的「工具」。

（後面還有）

● 企管四張同學延伸到無窮集合的寓言故事

上課重点　　　延伸.

實數：Real Number，填滿了幾何數線，數線上的任一點都對應了一個實數。

↓

統計學上之定義

離散：(Discrete)可數無限/有限，資料取值可用1、2、3……一個一個列舉出來。，→使用PMF 機率質量函數

連續：不可數無限。無論像是身高、体重、時間皆是，只要工具無限精準，它的數值可以在某個区間有無限可能→使用PDF

聯想：探討實數的悖論(希爾伯特旅館悖論)

一間擁有無限多間的旅館，此時已經客滿了(每個整數間都有人)

(一)來了一位新客人：1号房→2号房；2号房→3号房，以此類推每人都搬到(n+1)号房，結果空出一号房，順利入住。(無限+1=無限

(二)來了無窮位客人，搭乘一輛無限巴士：請原本的客人搬到自己房間号的2倍(n→2n)，結果所有房客都進入了「偶數房」空出了所有「奇數房」給無窮多位的新客人順利入住。

(無限＋無限＝無限)

但是，如果今天來了一輛「連續型實數巴士」，裡面坐著0~1之間所有實數點的客人，但旅館就算騰出再多奇數，翻倍再多次亦無用。因為實數的不可數無限是更高階的無限。

複數整理：複數揭開了二維平面旋轉的秘密. → 數學家嘗試尋找三維空間數. → 高斯嘗試用3個元素(a+bi+cj)鎩羽而歸 ——→ 漢彌爾頓跨越直覺,用4個元素(四元數)成功稱霸三維空間的旋轉(四元數在現代極其重要,它是今天3D遊戲動畫引擎、VR虛擬實境、以及太空船/無人機計算3D空間旋轉時最核心的數學工具。

上課公式解釋意義

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\ u = a+bi \qquad \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\ v = c+di$$

$$\frac{u}{v}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{\overbrace{(ac+bd)}^{\text{實部}\to\text{向量內積}}+\overbrace{(bc-ad)}^{\text{虛部}\to\text{向量外積}}i}{\underbrace{c^2+d^2}_{|v^2|\ \to\ \text{向量 } v \text{ 長度之平方}}}$$

歐拉公式(極式)

$$\underbrace{\frac{r}{s}}_{\text{伸縮}}e^{i(\alpha-\beta)}=\frac{|u|}{|v|}\left(\cos(\underbrace{\overset{|\theta|}{\alpha-\beta}}_{\text{旋}})+i\sin(\underbrace{\overset{|\theta|}{\alpha-\beta}}_{\text{轉}})\right)$$

代數運算 & 空間幾何旋轉融為一体

四元數脈絡 漢彌爾頓發明了偉大但太複雜的四元數(對當時而言) → 馬克士威用四元數寫出電磁學公式,但太難理解 → 吉布斯 & 黑維塞嫌四元數太難用,聯手把四元數拆開,閹割純量部份 → 提鍊出更好用的現代向量分析.