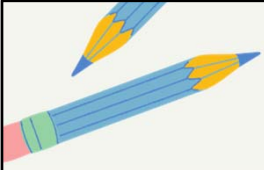

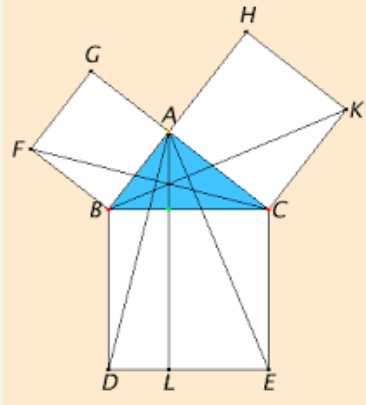






數學與文明一同演進。最初，數學源於對實際問題的應用；但隨著時間推移，許多數學理論在被創造之初，並無明確用途。直到科學發展遭遇瓶頸，人們在尋找合適的數學模型時，才赫然發現，那些塵封於古老典籍中的數學，竟早已為未來鋪好了道路。

歐幾里得的三角形內角和 180°

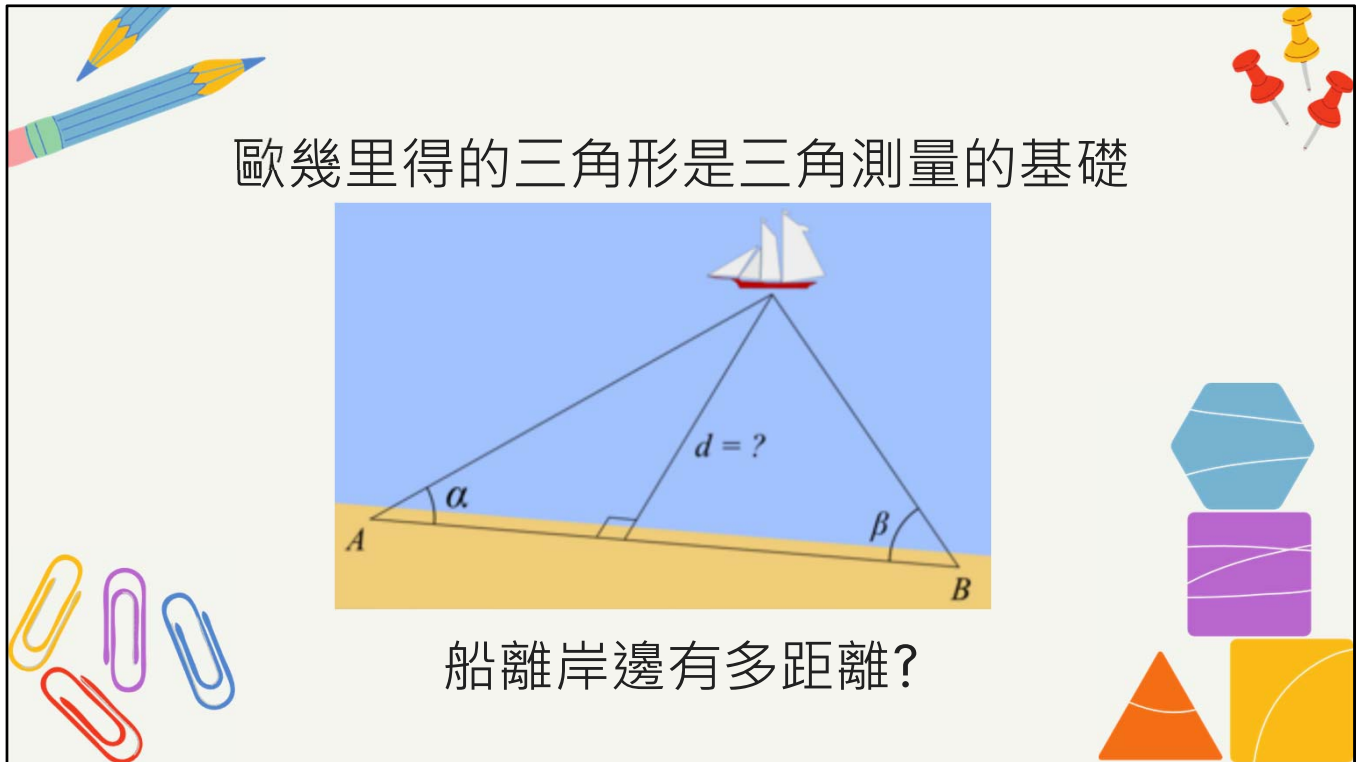



只有平面上的三角形如此



歐幾里得幾何是建立在一個理想化的、完全平坦且不彎曲的空間之上。在這樣的空間中，幾何規則非常直觀，例如：直線可以無限延伸、兩條平行線永不相交，而三角形的內角和永遠是 **180 度**。

這種幾何體系長期以來被視為理所當然，也奠定了數學與科學的早期基礎。從古希臘到文藝復興，建築、測量、航海、工程設計等領域，無不依賴這套規則。



歐幾里得幾何提供了我們理解空間的第一套完整邏輯系統，這套系統的核心，就是三角形的性質。在歐幾里得空間中，三角形的內角和固定是 **180 度**，這個特性讓我們能夠利用少量的已知資訊，例如兩個角度與一條邊，就反推出第三個點的位置，這就是三角定位（**Triangulation**）的原理。這個原理在古代就被應用於地圖製作和航海，測量師會站在兩個已知地點，用簡單的角度測量儀器，就能推算出一個未知地點的座標。而在現代，這個看似簡單的幾何概念，依然是許多高科技技術的數學基礎。



幾何光學與天文



使用反射望遠鏡觀測星體的伽利略

歐幾里得幾何不僅為建築與工程打下基礎，它也為光的理解提供了理論根基，成為幾何光學的出發點。在這個模型中，光被視為沿直線傳播的射線，能被反射與折射，而這些行為的數學描述，正是由歐幾里得的幾何規則來處理。

這些想法後來被應用到透鏡與鏡面的設計上，促成了光學儀器的誕生。十七世紀，**伽利略正是在這樣的數學背景之下，親手打造了改良過的反射式望遠鏡**，並用它指向夜空，打破了人類對宇宙的想像。他發現月球表面崎嶇不平、木星有四顆衛星繞行，這些觀察動搖了托勒密的地心說，並成為日心說的有力證據。這是一段關鍵的歷史轉捩點：數學不再只是抽象符號，它變成一種**觀察自然的工具**，並且有能力顛覆世界觀。從平面幾何到宇宙結構，數學提供了一座看見真相的階梯。

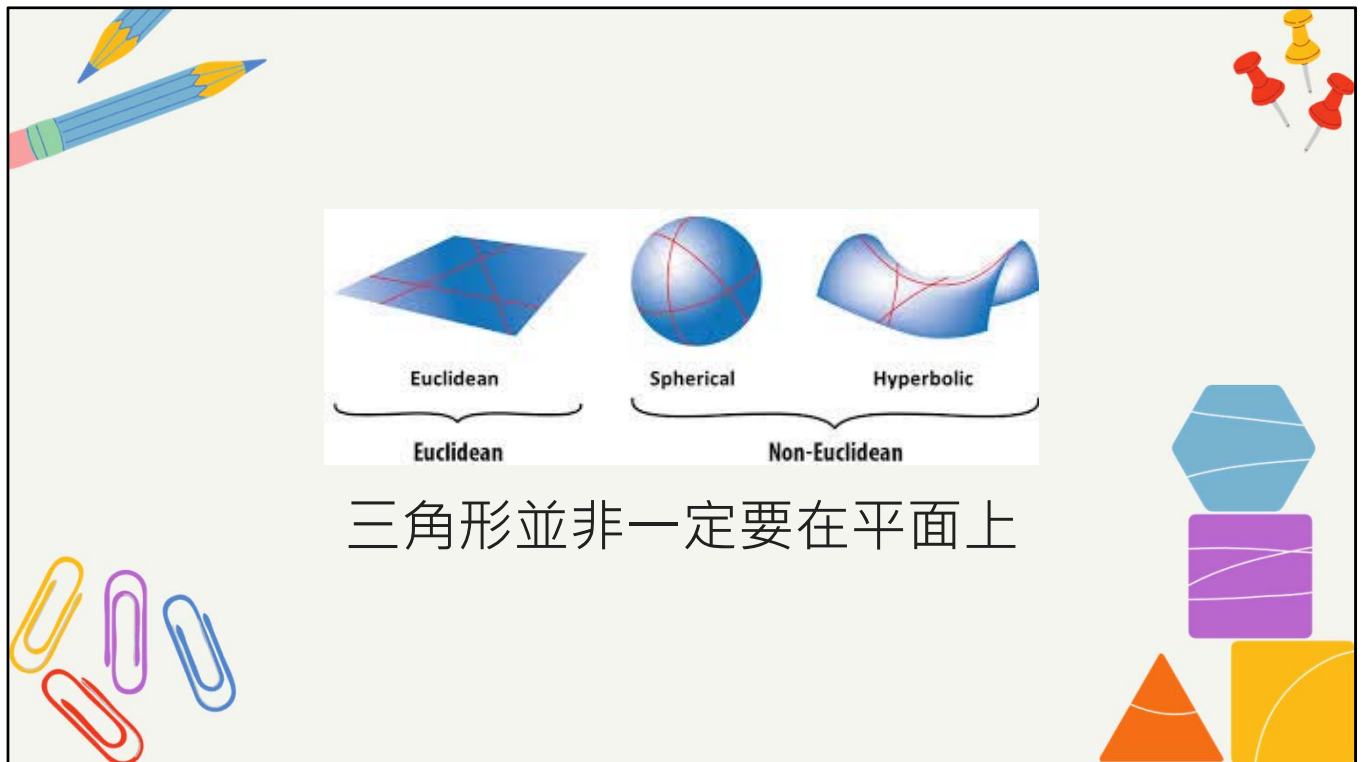


船長必學就是三角測量及觀星

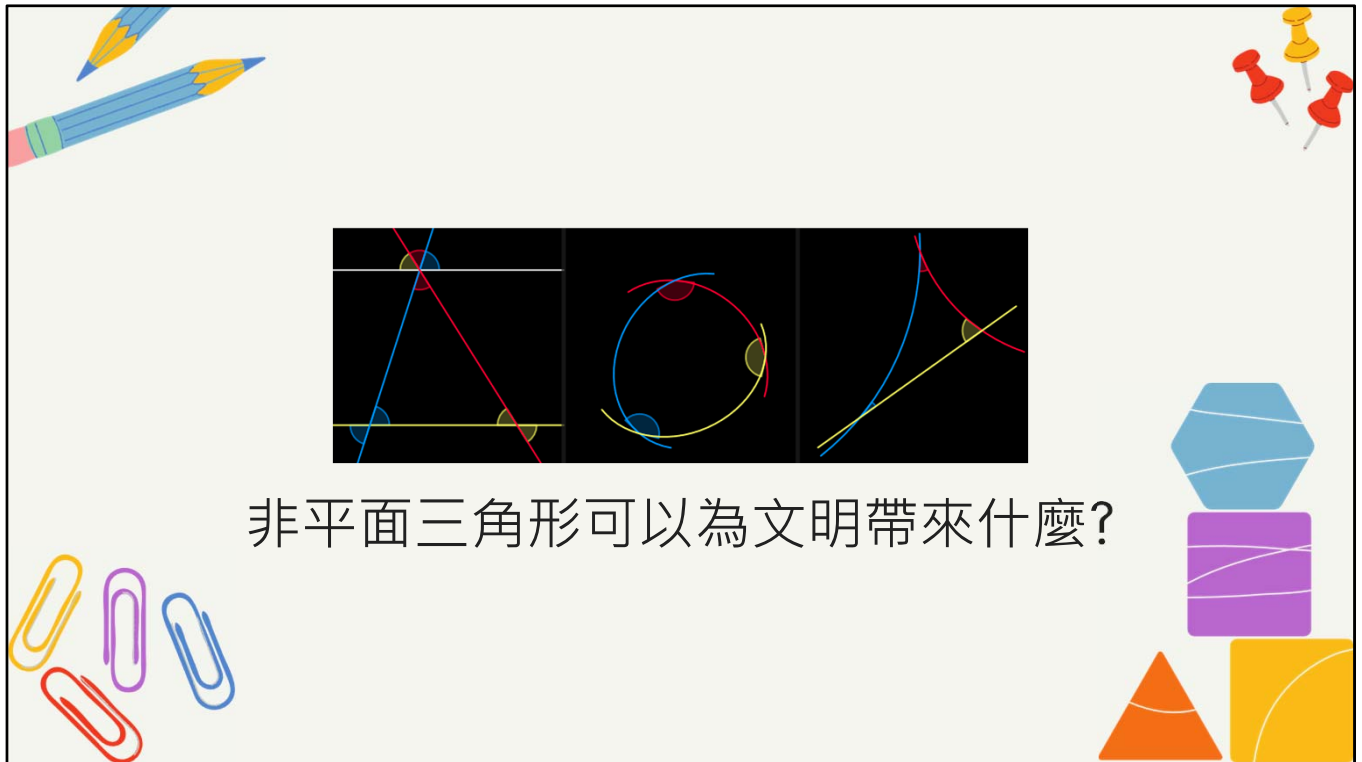
在航海時代，三角測量與觀星術幾乎是每位船長的必修課。因為在浩瀚無邊的大海上，沒有地標，也沒有路牌，唯一能依靠的，只有天空中的星星與手中的數學。三角測量法讓船長可以根據兩個已知的參考點（例如海岸、燈塔、或是星體的位置），再結合測量的角度與距離，推算出自己的正確位置。這種方法，建基於歐幾里得幾何，是古希臘時代就已經發展出來的技術，但到了大航海時代，才真正大放異彩。

而天文觀測則讓航海者能在完全看不見陸地的情況下，根據太陽或恆星的高度角計算緯度。例如白天用六分儀測太陽高度、夜晚看北極星的仰角。這些操作看似浪漫，但背後其實充滿了幾何、三角函數與精密計算。

這也說明了一個歷史事實：從數學推導出來的理論，最終成為了跨越海洋、開啟新世界的實際工具。航海地圖的繪製、航線的規劃、甚至最後新大陸的發現，都與這些看似抽象的幾何知識密不可分。



我們從小就被教導：三角形的內角和是 **180 度**。但這條規則只成立在平面上——也就是歐幾里得幾何所描述的世界。然而，**三角形並不一定存在於平面上**。試想，你若在地球表面畫一個三角形：從赤道上的某點往北極畫一條直線，然後向東轉 **90 度** 沿著另一條經線回到赤道，最後沿著赤道回到原點——這三條直線（在地球上最直的路：大圓）構成了一個三角形，而它的內角和會超過 **180 度**。這就是**非歐幾里得幾何**的開始：在彎曲空間中，三角形的規則不再遵循傳統定律。當我們離開了平面，幾何開始變得『有彎曲感』，這種幾何也正是後來**愛因斯坦的廣義相對論**所依賴的空間模型——**彎曲的時空幾何**。也就是說：**當世界彎曲了，數學也必須改變**。非歐幾何，就是為了彎曲的宇宙而生的數學。



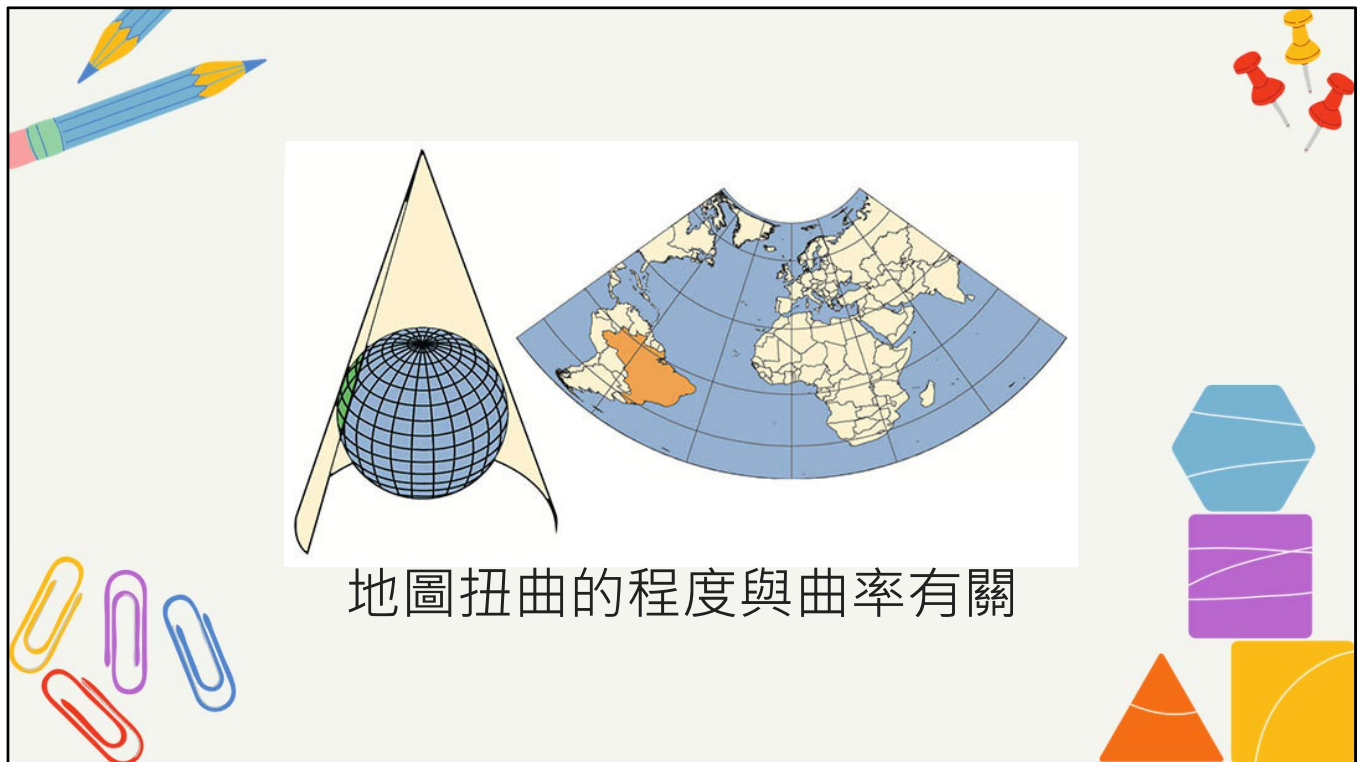
如果三角形離開了平面，它能夠為文明帶來什麼？

這個問題聽起來有點抽象，但其實，它正是近代文明跳躍的起點。

當人類開始思考『如果空間不是平的，那數學還能成立嗎？』這樣的問題時，非歐幾何誕生了。它不僅推翻了幾千年來對空間的直覺想像，也提供了描述**彎曲空間**的新語言



地球不是平的，所以地圖當然也不可能是真正平的。
地圖學的發展，從來都不只是把地球畫下來那麼簡單。它背後的挑戰，是要把一個三維的球面，攤平成一張二維的紙張。而這個過程，就牽涉到**非歐幾何與投影變換**的知識。地圖學的發展，正是人類如何用數學去理解彎曲世界的故事



地圖的扭曲程度，其實與地球表面的**曲率**息息相關。

曲率，簡單來說，就是空間『彎曲』的程度。平面空間的曲率是零；球面像地球這樣的表面，則具有**正曲率**。而當我們嘗試把一個有曲率的球面攤平時，就必然會產生**幾何上的失真**。

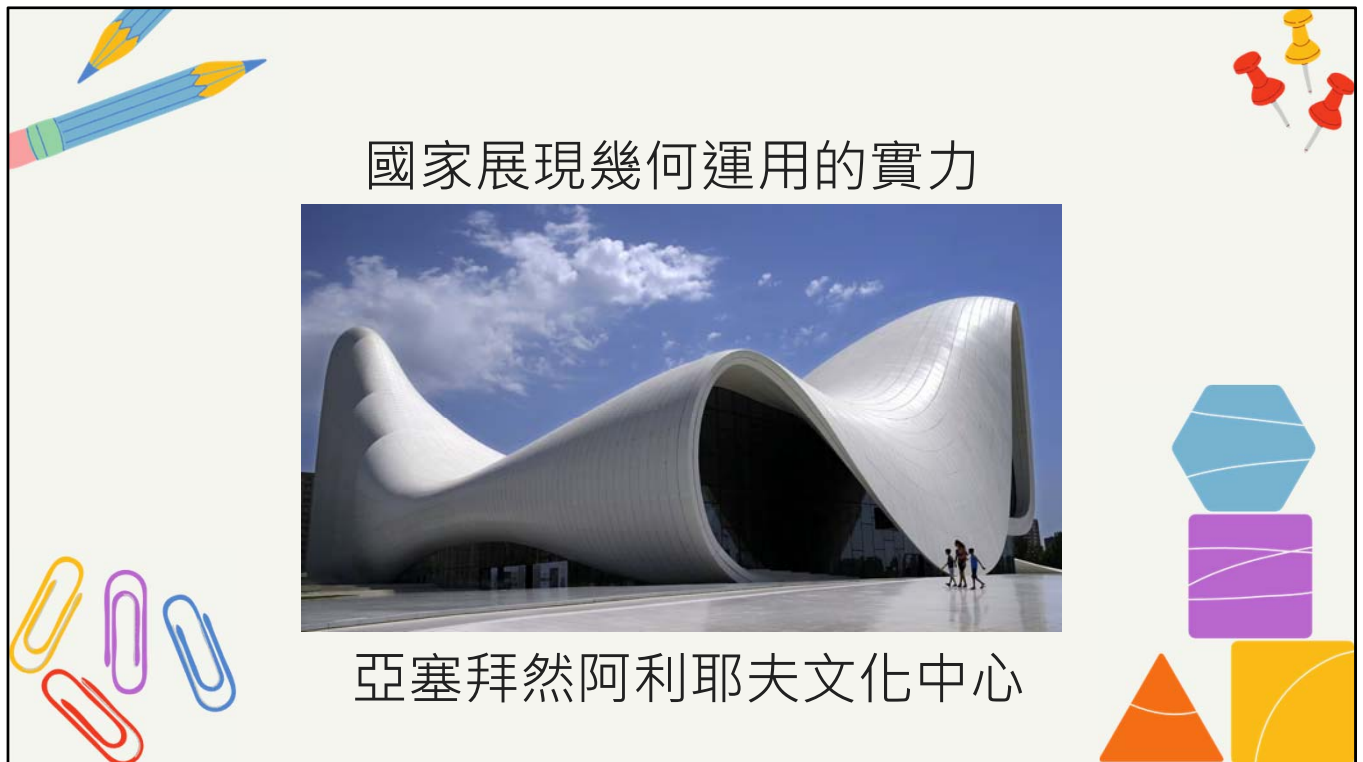
這就像你試圖把一顆橘子皮攤平成一張紙——不是撕裂，就是皺摺。地圖投影的難題就在於此：**我們無法不犧牲某些幾何性質，就把球面變成平面**。

不同的地圖投影法，對曲率的處理方式不同，因此也會產生不同類型的變形。

有些選擇保留角度（等角投影），有些選擇保留面積（等積投影），但無一能同時保留全部。

從數學角度來說，這就是**高斯曲率與黎曼幾何**的核心問題——彎曲空間無法與平面完全等價，也無法以單一視角全貌呈現。

所以我們所看的每一張地圖，背後其實都隱藏著一場**幾何妥協**的故事。

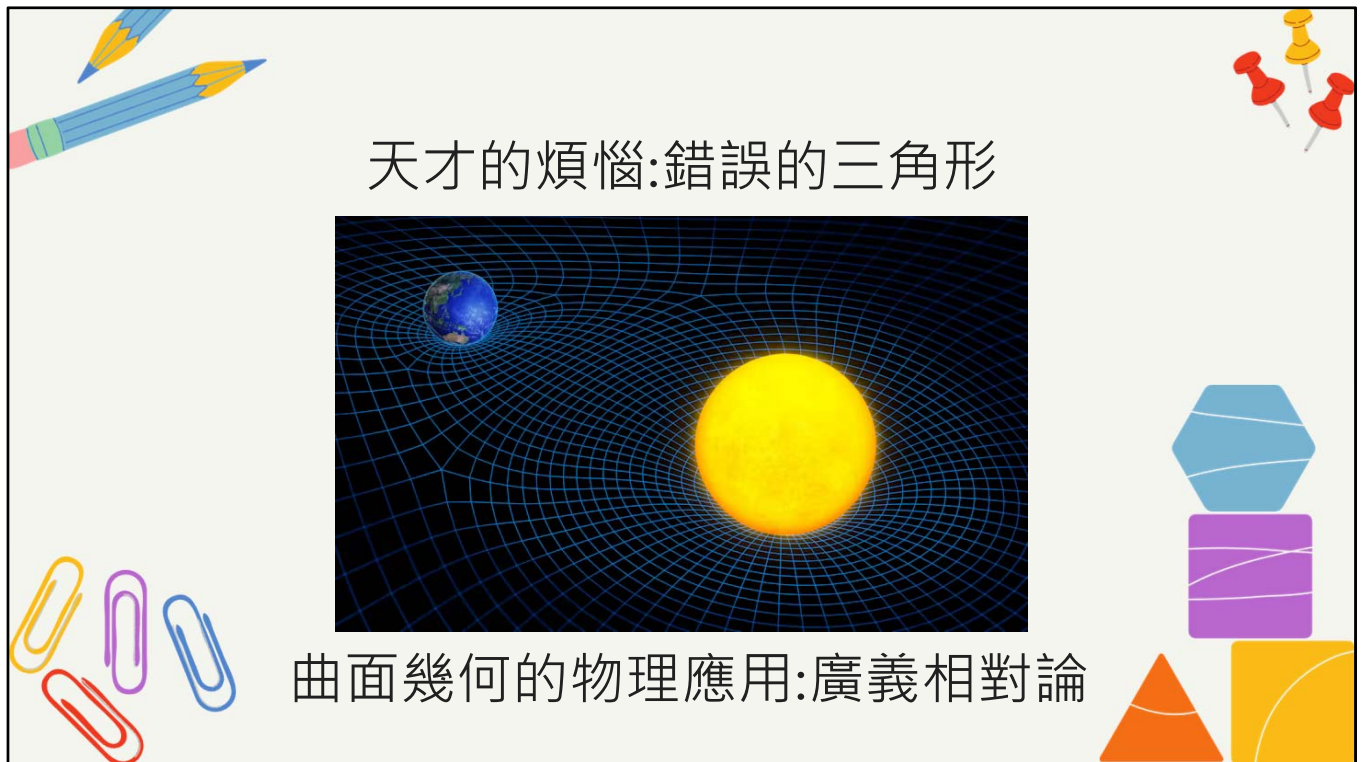


以亞塞拜然的阿利耶夫文化中心（Heydar Aliyev Center）為例，這座建築由札哈·哈蒂（Zaha Hadid）設計，其整體造型不再依循傳統建築那種剛硬、筆直、對稱的線條。取而代之的是流動、延展、宛如自然生成的流形曲面。

這種設計語言的背後，其實是一種深層的幾何革命——建築師開始運用非歐幾何與流形（manifold）的概念，讓空間不再侷限於直角與平面，而是可以如同水面般自然彎曲，彼此銜接卻無斷裂。

札哈曾說過：她的建築不是被設計來站著的，而是被設計來流動的。

這代表的不仅是形式上的改變，更是人類審美觀與幾何理解能力的昇華。當我們能夠精準地計算與建造這些複雜曲面時，幾何就不再只是數學家的工具，而成為藝術與文化的語言。



1907年，愛因斯坦正為一個看似簡單卻極深的問題苦惱：如果重力可以彎曲光線，那它是不是也會彎曲空間本身？

這個想法就是廣義相對論的胚胎。

但當他試圖用當時的數學模型來描述這種『被重力拉彎的空間』時，他發現——三角形壞了。

在這個彎曲空間裡，三角形的內角和不再是 180 度，平行線可能會相交，甚至一條『直線』也未必真的筆直。對於習慣了歐幾里得幾何的世界而言，這是一次天翻地覆的震撼。愛因斯坦知道自己需要一套全新的數學語言，但他當時根本不知道那是什麼。

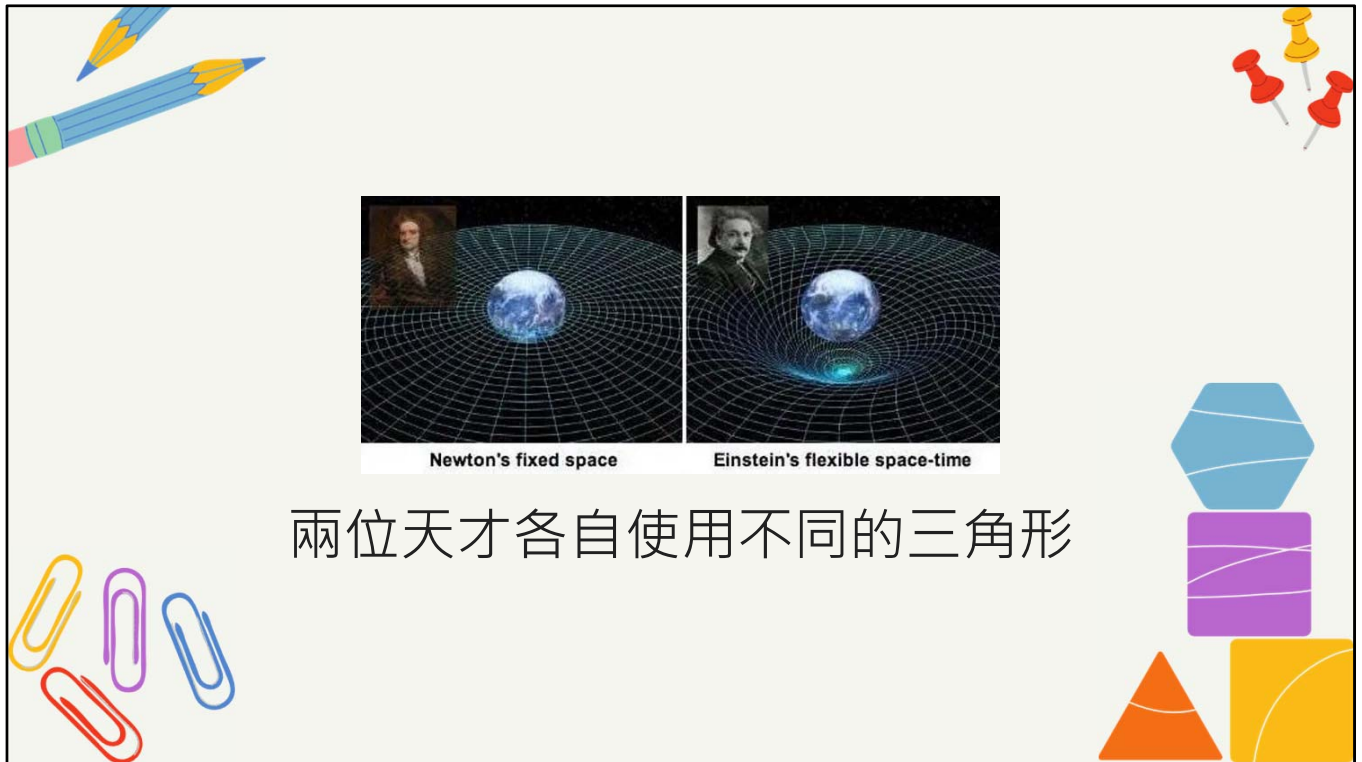
這個煩惱，持續了七年。

直到他讀到了黎曼幾何與張量微積分（特別是克里斯托弗符號與黎曼曲率張量），他才終於找到了描述彎曲時空的方法。

這一刻，物理終於追上了數學。那些曾被視為『沒有用的抽象幾何』，如今成為理解宇宙的關鍵鑰匙。

而這也揭示了一個深刻的真理：當數學走在應用之前，它並不是多餘；它是在為未來鋪路。

廣義相對論的誕生，就是這場鋪路工作開花結果的最佳證明



兩位天才各自使用不同的三角形

兩位天才，各自使用不同的三角形。

牛頓與愛因斯坦，橫跨兩個世紀的巨人，他們看著同一個宇宙，卻繪出不同的幾何。

在牛頓的宇宙中，時空是絕對的、筆直的，像一張永遠不會彎曲的紙。光在這張紙上行走，重力在這張紙上作用，一切運動都服從幾何與時間的『絕對座標系』。牛頓的三角形，是歐幾里得式的：內角和 180 度、平行線永不相交。他用這樣的三角形，打造了經典力學，解釋了蘋果為何落下，行星如何繞行太陽。

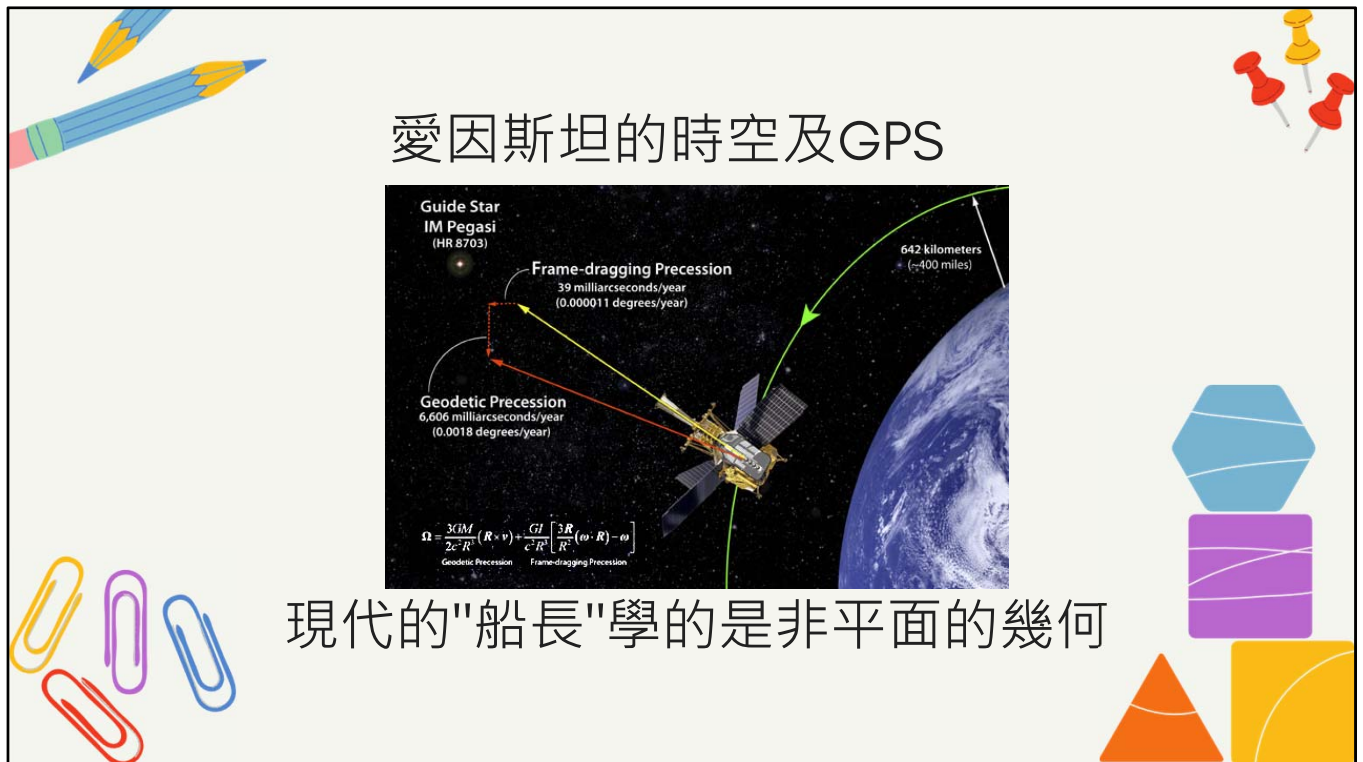
而愛因斯坦則來到了一張彎曲的宇宙帷幕上。

在他眼中，重力不是一種『力』，而是時空本身被質量彎曲的結果。他用的是非歐幾何的三角形：一個彎曲曲面的三角形，其內角和可以大於或小於 180 度，直線與直線也可能再相交。這樣的幾何，才能描述光線如何在星體附近彎曲，時間如何因重力而變慢，甚至黑洞如何形成。

這不是誰對誰錯，而是數學隨著觀察的深化而拓展了它的語言。

兩位天才用不同的三角形，看見了宇宙的兩個版本——一個是穩定不變的機械宇宙，一個是流動可塑的時空織網。

而我們今天的物理學與科技，正建構在這兩種幾何的交界之上



在航海時代，船長仰賴星星與三角測量來導航。他們學的是歐幾里得幾何，使用的是紙上可以畫出直線與角度的世界。

但今天，船長換人了。

我們每天使用的 GPS 系統，其實就是現代的『船長』——不再是站在甲板上的人，而是繞行地球的數十顆衛星，以及背後複雜的數學模型。

更關鍵的是：這些衛星系統並不是運作在平面的幾何世界中，而是在愛因斯坦所揭示的彎曲時空之中。

GPS 系統若僅使用牛頓力學來計算時間與位置，平均每天會出現高達 10 公里的誤差。因為衛星與地面之間存在重力場差異與相對速度差異，時間在衛星上會走得比地面快。這就是廣義相對論與特殊相對論同時發揮作用的地方。

因此，現代的『船長』，學的不是直線三角形的幾何，而是非平面的幾何：

一種描述彎曲、動態、相對的宇宙語言。

我們用這門語言，讓飛機不偏航，讓手機知道你在哪裡，讓全世界的定位系統可以在分毫之間達成同步。

這就是數學的力量：它不只改變了我們如何看世界，還重新定義了我們在世界中的位置。



龐加萊，這位 20 世紀初的數學天才，提出了一個問題後來被稱為**龐加萊猜想**。這是一個關於三維空間結構的問題，它問的是：如果一個三維空間像二維球那樣沒有『洞』，那它是不是就一定是個三維球？

聽起來很抽象，甚至.....一點用也沒有。

事實上，當時他所研究的這一領域——**拓撲學 (Topology)**，也被許多人戲稱為『橡皮筋數學』，因為它關心的不是角度或距離，而是物體在不撕裂、不黏合的情況下能否彼此變形。這門學問既不實用、也看不出未來會有什麼應用價值，長期以來被歸類為「沒有用的數學」

但命運總喜歡開玩笑。

一百年後，隨著人類對宇宙結構、時空拓撲、以及高維空間的探索愈加深入，拓撲學逐漸從冷門的純粹理論，走進了**物理學、天文學、甚至電腦科學與人工智慧**的核心。而那道難解的龐加萊猜想，則成了整個三維拓撲研究的關鍵門檻。

最終，它由俄羅斯數學家**佩雷爾曼**於 2003 年成功證明，這不僅解開了數學的百年難題，也象徵著『沒有用的數學』走進了現實的中心。

這段歷史讓我們意識到：

有些數學，不是沒用，而是還沒到它被需要的時候。



從龐加萊猜想開始，拓撲學讓我們開始用全新的視角去理解空間與形狀：不看長度、不看角度，只看『能不能變形為另一個形狀』。這種『橡皮筋式』的數學觀點，後來演化出了另一個令人意想不到的分支——**結理論（Knot Theory）**。

你可能會以為『打結』是生活中的瑣事，但數學家卻認真地問了一個問題：有沒有一種方法，可以精確描述一個結是什麼？不同的結要怎麼區分？哪些結彼此等價、哪些不能互相變形？

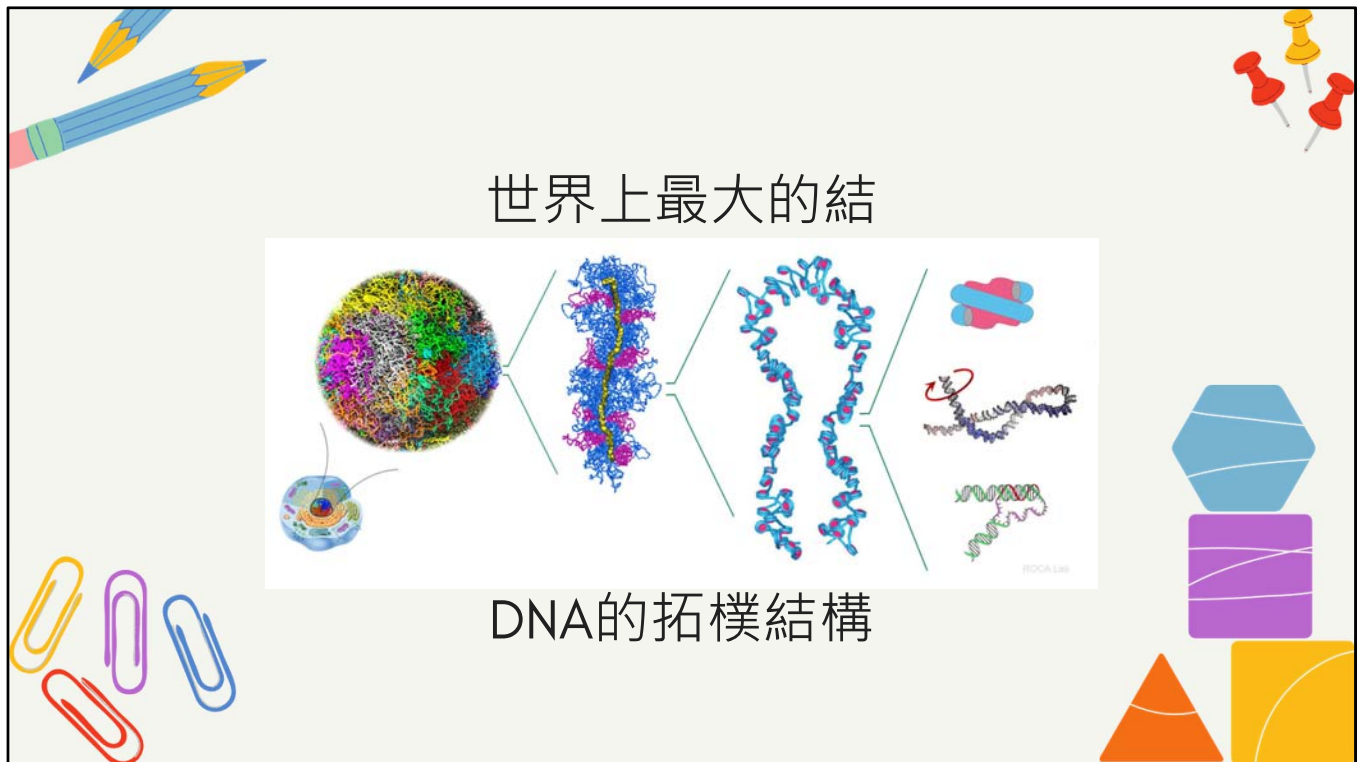
這些問題，正是結理論要回答的。而這些問題，來自拓撲學。結理論研究的是一條繩子閉合後打結的所有可能狀態，只要不能靠『不剪斷』的方式還原，就算是不同的結。這門看似純理論的學問，現在被用在**DNA結構、蛋白質摺疊、甚至量子電腦與加密學**上。

但最讓人驚訝的是：**竟然連我們每天綁的鞋帶，也能用數學模型來描述！**

科學家研究了不同的鞋帶綁法，發現每種打結方式對應到不同的結類型，有的結更穩，有的則容易鬆脫。而這些差異，竟然能用結理論來預測。

也就是說，**你鞋子為什麼老是鬆開，其實是數學的問題！**

從宇宙的曲率到腳下的鞋帶，數學無所不在。它不僅描述星體運行，也悄悄綁住了我們的生活。



世界上最大的結，是藏在我們每一個細胞裡的 DNA。

如果你細胞裡所有的 DNA 拉直來看，它的總長度超過 2 公尺但這麼長的分子，卻被精巧地包裝進只有幾微米大小的細胞核裡。為了塞得下、複製快、表現穩，DNA 在空間中會自我纏繞、打結、盤旋，形成錯綜複雜的三維結構。

這些結構不是亂糟糟的，而是高度組織的。

它們包括：超螺旋（supercoils）、結圈（loops）、拓撲異構體（topoisomers），有時甚至會打出真實的數學結（knots）與連結（links）！

這就是結理論與拓撲學進入生命科學的地方。

生物學家與數學家合作，利用拓撲不變量、結分類法，來分析 DNA 在不同狀態下的形狀、功能與變異。

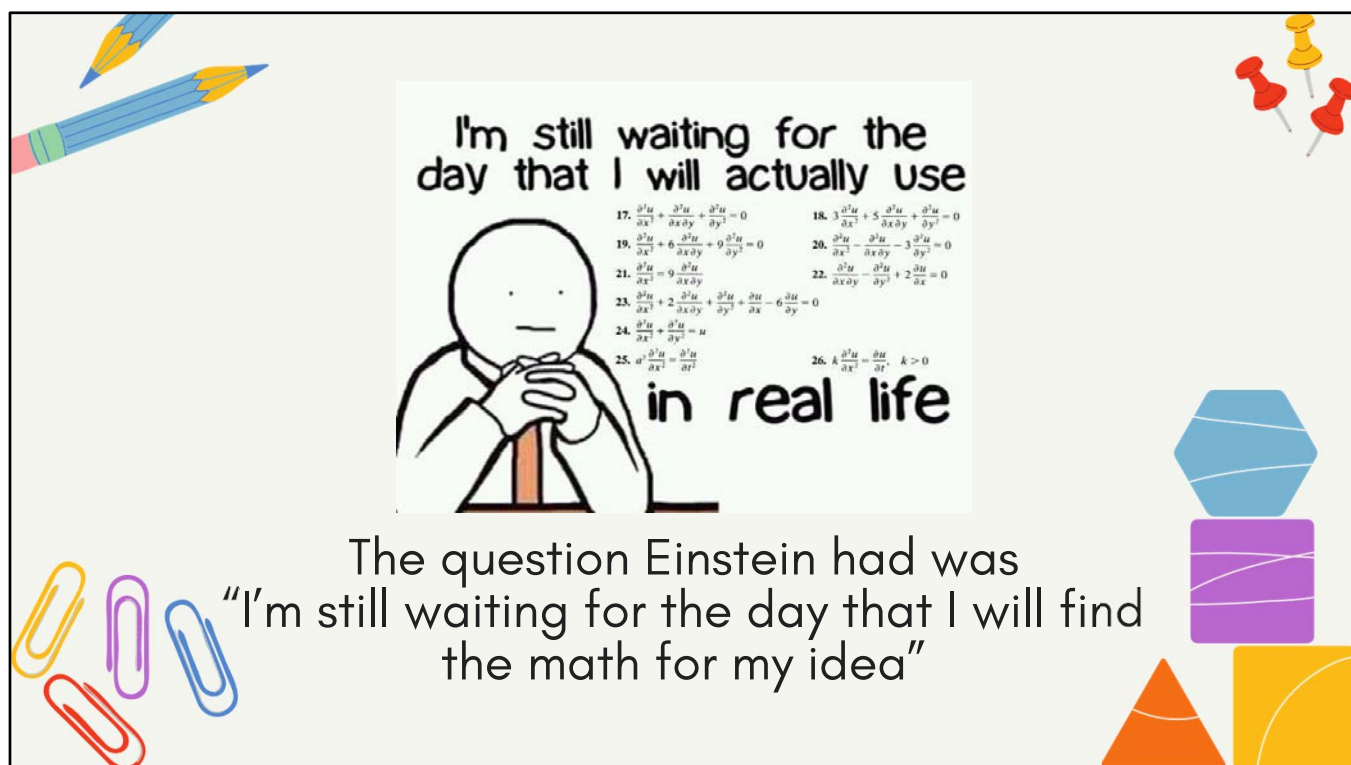
例如，**拓撲異構酶（topoisomerase）這類酵素，就像細胞裡的解結高手，能切開、旋轉、再重新接合 DNA，用來解開複製或轉錄過程中的扭曲與打結。

如果這些結解不開，細胞就無法順利分裂或運作。

也因此，某些抗癌藥就是針對這些 DNA 解結酶設計的這是結理論真正走進藥物設計的實例。

DNA 的形狀與功能，離不開結與拓撲的語言。

生命，是數學在時間與空間中編織出來的結。



我想大家多少都有問過自己類似的問題如“數學課上學了一堆虛無飄渺的東西，結果出了教室幾乎沒用到”

你記得你在教室外的環境算積分嗎?我想很難吧!

這張圖很有趣，因為它代表了一種普遍的心聲：我們為什麼要學這些？它到底哪時候會派上用場？

但其實，這正是愛因斯坦當年面對的問題。

他早就有了關於時空彎曲、重力並非一種力的革命性想法，但他苦思多年，找不到一套數學能描述它。

對他來說，問題不是『這些數學何時會用到？』

而是『我什麼時候才能找到能夠用來描述真實世界的數學？』

最後，他遇見了黎曼幾何與張量分析，一門在當時被認為沒有應用的純數學，才讓廣義相對論誕生。

所以或許，當我們今天還在等那一天來臨時某些數學，其實也還在等我們，等我們去發現它的用處、創造它的世界。



單維彰老師您好：

我是生醫系大二的蔡汶官，想藉由這封訊息向您獻上這學期的期末大回饋。其實早在高中時我就知道您的名字了。還記得高三時，有次老師用積分來證明圓的面積公式，我怎麼看都看不懂，直到有天偶然看到您講解的影片，才豁然開朗。那一刻讓我對您留下了極深的印象。

<https://www.youtube.com/watch?v=xcQxptkTTCQ> (影片連結)

這次上完您的課，讓我真正體會到什麼是"通識課"。這門課不只是傳授知識，而是帶我回顧數學的歷史脈絡與誕生的背景。從小到大，我們所受的填鴨式教育，往往只重視技術和解題，卻很少告訴我們這些抽象概念是怎麼被發明出來的、為什麼存在。這門課幫我補上了這個缺口，讓我終於能理解：我們所學的數學，其實是經過後人不斷精緻化、系統化之後的成果，它是為了教育與應用而被整理出來的形式，而它原初的模樣與故事，反而鮮少被提起。

沒有這樣的脈絡，學生很難被真正說服去學習這麼抽象又生硬的東西。但現在，我終於能從歷史的角度理解數學，也多了幾分尊敬與興趣。謝謝老師讓我看見這些，最後，也附上我的期末報告〈科學未及之處，數學先行〉做為這趟課程旅程的總結與回應，我的投影片裡面有放了備忘演講稿老師如果有時間可以看一下，我有使用AI潤飾了一下我的文筆。

敬祝教安