吳芸

地科一 114602510

數學在身體表演藝術中的實踐與應用

壹、 前言

從本課程讓我學到:藝術創作與數理邏輯並非二元對立，而是互為表裡、相輔相成。例如荷蘭版畫家艾雪（M.C.Escher）在其作品〈瀑布〉與〈相對論〉中，即是透過反向操作幾何透視邏輯，於二維平面上建構出「不可能的空間」；而在其〈蜥蜴〉與〈八頭像〉等作品中，則展現了平面拼貼與幾何分割的週期性與循環規律。這類實例充分體現了藝術家如何將抽象的數學幾何，轉化為具象視覺美學。

此種跨領域的視角，在同學的報告中亦得到了進一步的延伸與實證。以音樂學與數學的交會點而言，音樂的本質可被視為時間軸上的數學映射—包含音高與頻率的對數關係、和聲與整數比值的協和度，以及節奏的時間分割。特別是在卡農（Canon）與賦格（Fugue）等複音音樂結構中，主導動機在不同聲部間的時間平移、時值增減縮放，乃至倒影所呈現的函數對稱性，其本質皆是數學中遞迴機制的具體實踐。

此種跨領域的交織現象，進一步引發我對於數學在身體表演藝術中所扮演的角色的好奇。因此，本篇報告將焦點鎖定在「雜耍」與「花式溜冰」這兩項高度依賴身體感官與特技的表演藝術。將透過 Siteswap（位換記號）代數序列來解析雜耍動作的排列可能，並利用微積分的參數方程與數值積分，來探討花滑選手的滑行軌跡與體能優化。希望藉由這些具體的跨領域案例來重新解讀冰上與舞台間的肢體美學。

貳、 雜耍（Juggling）與數學：位換記號與結構代數

一、 位換記號（Siteswap）的數學定義與週期性

在數學與雜耍的跨領域研究中，最經典的量化工具即為「位換記號（Siteswap）」。其本質是一個建立在離散時間軸上的週期序列。

- 拋接時間點：將時間離散化為均等的滴答聲（Ticks），定義為 $t = 1,2,3,\dots$。在每一個時間點t，舞者必須且只能進行一次拋球動作。
- 數值含意：序列中的每一個數字n代表「該球在空中飛行的總時間單位（即經歷幾個 Ticks 後會落回手中）」。若 $n = 0$ 則代表該時間點手中無球且不進行拋接。
- 週期性（Period）：位換記號通常由一個長度為p的基本字串（如 531 或 441）不斷循環組成。數學上可表示為：若記號序列為S，則對任意正整數t，皆滿足 $S(t) = S(t+p)$。

二、 合法性判定：排列測試（Permutation Test）

並非任意數字組成的序列都能成為合法的雜耍軌跡。一個序列要能流暢執行的充要條件是：「不能有兩顆或兩顆以上的球在同一個時間點落回手中。」 為了檢驗序列的合法性，必須引入抽象代數中的「排列（Permutation）」概念進行測試：

(一) 數學判別式

設一週期為 p 的位換記號序列為$s_1, s_2, s_3, \dots, s_p$。我們對每一個位置$i$（$i = 1,2,\dots,p$）計算其落點時間對週期 p的同餘值（Modulus）：

$$f(i) = (i + s_i) \pmod p$$

若且唯若集合$\{f(1), f(2), \dots, f(p)\}$恰好構成集合$\{0,1,\dots,p-1\}$ 的一個雙射排列（即所有同餘值皆不重複）時，該位換記號序列才在數學上合法。

（二）實例驗證

以 531 為例（週期$\boldsymbol{p}$=$\boldsymbol{3}$）：

- $f(1) = (1+5) \pmod 3 = 6 \pmod 3 = 0$
- $f(2) = (2+3) \pmod 3 = 5 \pmod 3 = 2$
- $f(3) = (3+1) \pmod 3 = 4 \pmod 3 = 1$

得出的同餘集合為$\{0,2,1\}$，完全沒有重複，因此 531 是一個合法的雜耍動作。

以 432 為例（週期$\boldsymbol{p = 3}$）：

- $f(1) = (1+4) \pmod 3 = 5 \pmod 3 = 2$
- $f(2) = (2+3) \pmod 3 = 5 \pmod 3 = 2$
- $f(3) = (3+2) \pmod 3 = 5 \pmod 3 = 2$

得出的同餘集合為$\{2,2,2\}$，發生嚴重的落點碰撞（三顆球會在同一時間落地），因此 432 在物理上是不可能實現的非法序列。

三、 守恆定律：平均數定理與道具總球數

位換記號中序列本身的算術平均數直接決定了系統內運行的道具總球數。

定理內容：若一個合法的位換記號其週期為p，則這套動作所需的總球數 N 剛好等於該基本週期內所有數字的算術平均值。公式如下：

$$N = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} s_i$$

實例計算：

- 動作 531 的總球數：$N = \frac{5+3+1}{3} = 3$ 顆球。
- 動作 441 的總球數：$N = \frac{4+4+1}{3} = 3$ 顆球。

- 動作 5551 的總球數：$N=\frac{5+5+5+1}{4}=4$ 顆球。

四、 狀態轉移圖（State Diagrams）與路徑代數

當我們想知道某個動作（例如 531）如何流暢地過渡、變奏到另一個動作（例如 441），或者想探索特定球數下所有可能的道具軌跡時，數學上的「有限狀態自動機（Finite State Automata）」與「有向圖論（Directed Graphs）」便成為核心工具。

(一)狀態的二進位表示法（Bitmask）

我們可以用一串二進位編碼（如 10110）來量化某一瞬間空中所有球的相對落點狀態：

- 從右往左數（或從左往右數，依定義而定），第 k 位若為 1，代表從當下算起第 k 個時間點會有一顆球落回手中；若為 0 則代表該時間點是空的。
- 編碼中 1 的總個數，必須恆等於系統的總球數 N。例如，在 3 球系統中，一個合法的狀態編碼可能為 111（代表連續三個時間點都有球落地）或 1011。

(二)狀態轉移機制

當時間推移一個單位（Tick），原本處於最前端（最快落地）的球會被拋出（設拋出高度為 n）。這在數學上對應著兩步操作：

1. 將原狀態碼**向右移位**（Shift），移除已落地的第一位。
2. 在右移後的編碼中，找到第 n 位並將其由 0 **修改為** 1（填補新拋出球的落點）。

（三）有向圖的建構與拓樸路徑

將所有合法的二進位狀態視為圖論中的**頂點**（Vertices），而合法的拋接高度 n 視為連接狀態與狀態之間的**有向弧**（Directed Edges），便能建構出完整的「雜耍狀態轉移圖」。

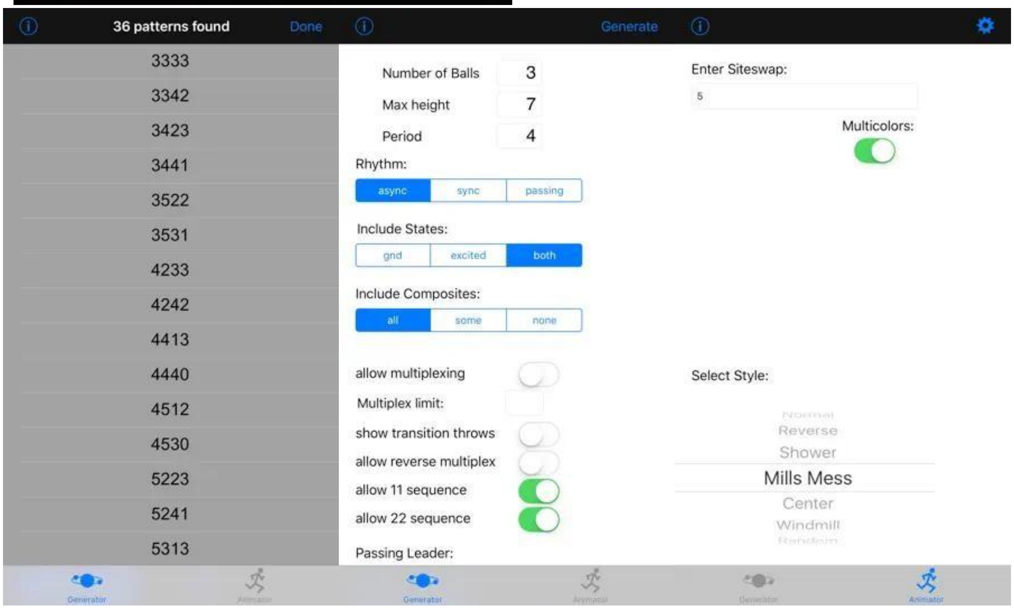
- **動作的本質**：在圖論視角下，一個合法的位換記號序列（如 531）本質上就是該有向圖中的一個**閉合迴路**（Closed Loop/Cycle）。

- **變奏與傷害防治編排**：教練或編舞者可透過尋找兩個迴路之間的公用頂點（過渡狀態），利用電腦計算出最短路徑，從而規劃出最省力、最流暢且不易因突兀變奏而拉傷肌肉的動作轉接軌跡。

動態圖可參閱網站:https://juggle.fandom.com/wiki/Siteswap

五、 科技與實務訓練應用

這種數學系統推動了雜耍的技能發展與數位化教學。林惟庸與陳俊安等學者針對「Siteswap 對於雜耍技能發展的影響」進行行動研究，證實引入數學記號能有效協助習藝者理解動作結構。配合現代數位工具，如 Juggling Lab 模擬軟體或手機應用程式（如 iJuggle APP），習藝者可以輸入任意的 Siteswap 數列，由電腦即時運算出精準的動畫與拋物線路徑。這種「先數學模擬，後身體實踐」的訓練模式，顯著縮短了盲目嘗試的錯誤時間。



六、藝術呈現

世界著名的當代馬戲編舞家西恩·甘蒂尼（Sean Gandini）便迷於這套系統，他曾表示:「雜技，是數學最完美的視覺呈現。」甘蒂尼劇團（Gandini Juggling）不僅在早期便吸納了 Siteswap 的發明者之一麥克·戴（Mike Day）加入，更將這套純粹的數字邏輯直接轉化為舞台上的編舞指令。

Gandini Juggling《Smashed》圖片

來源：甘蒂尼劇團官方網站

在甘蒂尼劇團（Gandini Juggling）

的經典劇作《搞砸了》(Smashed）中，椅子橋段不僅是全劇的視覺高潮，更是一場將抽象代數與拓樸流動具象化演繹的舞台實驗。這段表演在時空維度上，完美體現了以下雙重的

數學本質：

（一）時間維度的位換記號（Siteswap）與週期排列

在時間軸上，每位演員拋擲蘋果的高度與節奏，皆遵循著嚴格的位換記號（Siteswap）編碼。為了解決多人在群體交錯拋接時的時間流暢度，演員們必須將蘋果拋物線的頂點精準控制在相同的水平線上，這在物理上穩定了每顆球的飛行時間單位（Ticks)。

更進一步地說，劇團在編排此多道具系統時，本質上是在執行數學上的「排列測試（Permutation Test)」。透過嚴密的同餘方程運算：

$$f(i) = (i + s_i) \pmod p$$

預先確保在任何週期p內，集合中的落點時間皆為雙射排列，從而在排練階段便能以理性公式預先排除兩顆蘋果同時落入同一隻手的物理衝突（Collision)。同時，整套變奏動作亦遵循平均數定理，讓系統內的道具總球數在動態交換中始終保持恆定守恆。

（二）空間維度的置換矩陣（Permutation Matrix）與群論實踐

在此橋段中，演員的舞台調度打破了傳統原地拋接的局限，必須在離散的椅子之間進行複雜的集體換位。這種「人員的空間互換」與「道具的時間拋接」相互交織，在數學本質上正是抽象代數中「置換群（Permutation Groups)」的動態實踐。

若將舞台上的每張椅子與每位演員視為一個離散的代數元素，整個群體的空間移動便能被量化為一個高維度的置換矩陣（Permutation Matrix)。每位演員共享同一套代數對稱規則，當他們在椅子間穿梭時，矩陣中的元素便隨之轉置。

這種將「時間位換記號的有向狀態轉移」與「空間置換矩陣」高度結合的編舞手法，不僅大幅提升了舞台畫面的幾何美感，更透過數學結構的嚴謹性，達成了極佳的運動傷害防治 —舞者無需在舞台上盲目試誤，而是透過科學化的動線規劃，將集體碰撞與肌肉拉傷的風險降至最低。

参、 花式溜冰（Figure Skating）與數學：冰上幾何與微積分應用

一、 核心數學概念：參數方程式、微積分

花式溜冰是一門將體育競技與絕美藝術表現完美融合的冰上運動。當選手以極高的速度在長至少 56 公尺、寬 26 公尺的長方形冰面上滑行、旋轉與跳躍時，如果從鳥瞰的角度觀看，整個節目編排本質上可以被視為二維平面上質點的運動學，甚至是一個複雜的動態系統。為了將這些抽象的滑行軌跡量化、分析，並達成運動傷害防治的目的，數學中的參數方程式（Parametric Equations）與數值積分（Numerical Integrations）等微積分工具，便扮演了極其關鍵的角色。

二、 滑行軌跡與數學參數曲線

優秀的花滑選手擁有流暢且平穩的滑行能力，這能賦予其在跳躍或旋轉後更佳的平衡感與速度感。選手腳下冰刀切過冰面所留下的每一道弧線，在數學上都能對應至特定的二維平面參數曲線。

（一）基礎大圈滑行：橢圓軌跡（Ellipse）

當選手對整個冰面進行大圈滑行時，其軌跡通常可視為一個橢圓。在直角坐標系中，其方程形式為：

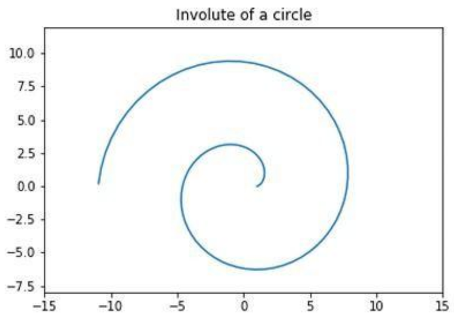
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

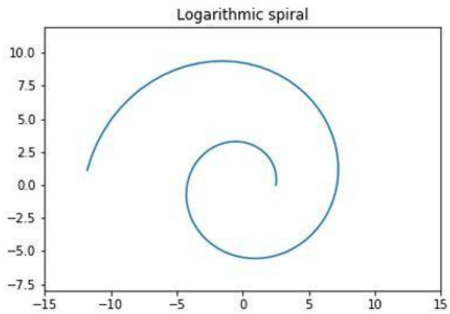
其中 a 與 b（a>b）分別代表橢圓的半長軸與半短軸。引入半焦距$c=\sqrt{a^2-b^2}$後，可進一步推導出焦距與半長軸的比值，即離心率（Eccentricity）e = c/a（0<e<1）。在不同長寬比例的冰場中，選手滑出的橢圓曲線其離心率亦不相同。若將其轉換至極坐標系統並引入角度參數 θ，橢圓軌跡可參數化表示為：

$$\begin{cases} x(\theta) = a\cos\theta \\ y(\theta) = b\sin\theta \end{cases} \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

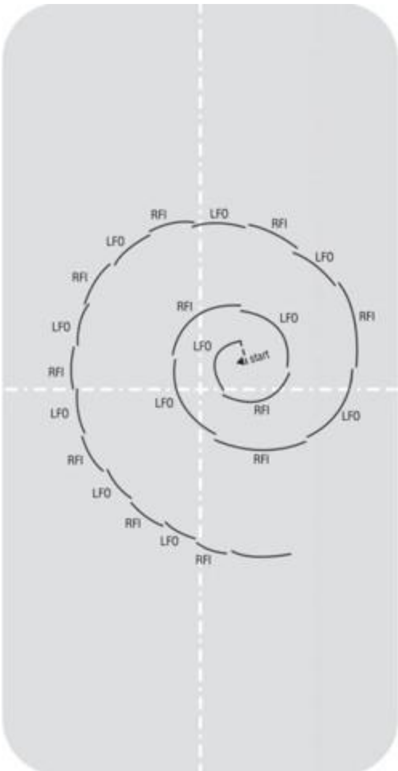
（二）選手進場步法：漸開線與對數螺線

當單人滑選手從冰場側邊進場並滑行至冰面中心就定位時，其滑行曲線可巧妙地對應為「圓的漸開線（Involute of circle）」或「對數螺線（Logarithmic spiral）」。這兩款螺線能使進場動作呈現出流暢的向心收斂感，其參數方程式分別為：





$$\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta + \theta\sin\theta \\ y(\theta) = \sin\theta - \theta\cos\theta \end{cases} \quad (0 \le \theta \le 4\pi) \qquad \begin{cases} x(\theta) = \exp(\theta/6)\cos\theta \\ y(\theta) = \exp(\theta/6)\sin\theta \end{cases} \quad (0 \le \theta \le 3\pi)$$

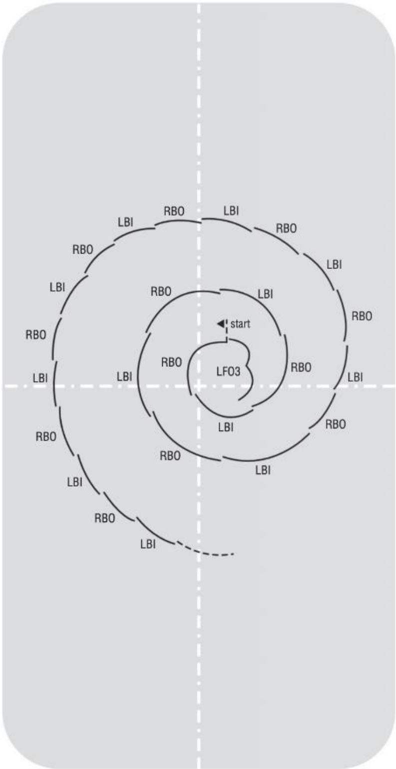


Krigor Studio - USFS Moves in the Field Diagrams: Juvenile Level (Stroking_Forward Power Circle)

幾何特徵：本圖為 Juvenile 檢定的「前行強力圓」軌跡。選手由中央出發（start），以左前外刃（LFO）與右前內刃（RFI）進行連續交叉步（Crossovers）。隨著滑行速度遞增，軌跡半徑逐漸向外擴張，形成覆蓋半場的螺旋線。

數學與物理意義：此軌跡本質上是一條曲率半徑 R 隨時間 t 動態遞增的非線性螺旋線。由於速度 v 上升且半徑 R 同步擴大，選手承受的向心加速度 $a_c = \frac{v^2}{R}$處於雙重變數的動態變化中。為了維持核心技術焦點「力量（Power）」並抵抗離心力，選手必須依瞬時曲率微調身體傾斜角（Tilt Angle），是動態微分幾何與冰面力學的實體結合。

圖片來源：Krigor Studio 官方網站。



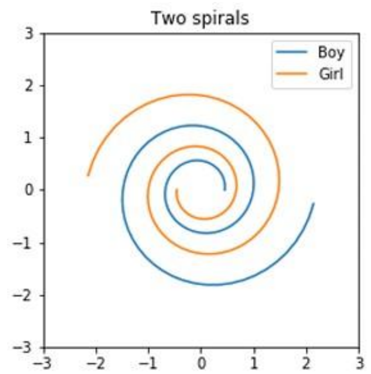
Krigor Studio – USFS Moves in the Field Diagrams: Juvenile Level (Stroking_Backward Power Circle)

幾何特徵：本圖為 Juvenile 檢定的「後退強力圓」軌跡。選手由中心點出發（start），先以左前外刃滑行並透過一次三周轉體（LFO3）變向，隨後交替使用右後外刃（RBO）與左後內刃（LBI）進行後退交叉步。隨著速度加快，軌跡呈現向外擴張的非線性螺旋波形。

數學與物理意義：起點的「LFO3」轉體在極短時間內創造了軌跡切線方向突變的臨界點。進入後退加速段後，選手處於盲區滑行狀態，必須利用膝蓋與腳踝的壓刃質量，來抵抗因速度增加而劇烈變化的離心力。整個動線完美展示了多變數動態系統（Dynamic System）在實務軌跡控制中的剛性規律。

圖片來源：Krigor Studio 官方網站。

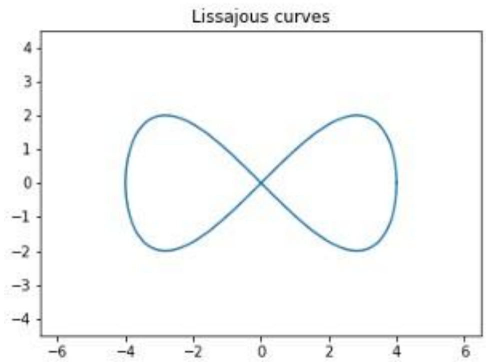
雙對數螺線（亦常用於雙人滑或冰舞中男女搭檔由外向內滑行的「雙螺線 Two spirals」旋轉設計）：



$$\begin{cases} x(\theta) = \exp(\theta/6)\cos\theta \\ y(\theta) = \exp(\theta/6)\sin\theta \end{cases} \quad (0 \le \theta \le 4\pi)$$

（三）轉場與造型步法：利薩茹曲線、心臟線與水滴線

為了照顧全方位觀眾席的來賓，選手常需要在節目中左右換邊以表演組合旋轉或跳躍，此時多採用圖形相似於扭結的「利薩茹曲線（Lissajous curve）」或「雙扭線（Lemniscate）」。以利薩茹曲線為例，其參數方程為：



$$\begin{cases} x(\theta) = 4\cos\theta \\ y(\theta) = 2\sin 2\theta \end{cases} \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

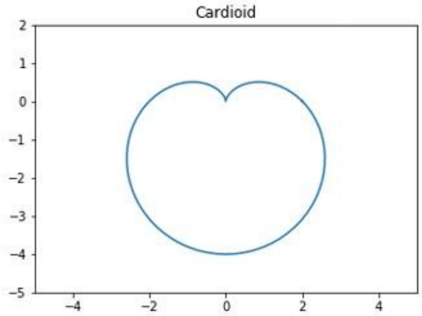
Krigor Studio – USFS Moves in the Field Diagrams: Preliminary Level (Forward Circle Eight)

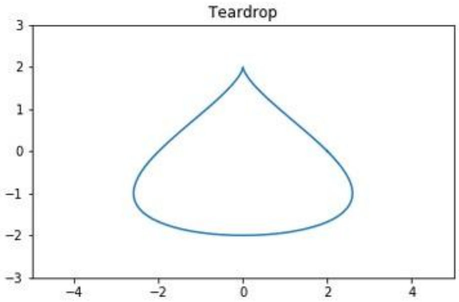
幾何特徵：本圖為初階檢定的「前行八字雙圓」軌跡。選手由中心點出發，交替使用左右腳的外刃（RFO/LFO）與內刃（RFI/LFI），在冰面上割出兩個直徑相等、高度對稱的完美圓形。

數學與物理意義：在雙圓交會的中心點，軌跡呈正切相交。選手變換冰刃與支撐腳時，滑行軌跡在數學上必須滿足一階導數連續（C^1 連續）。亦即速度的「切線方向」不能有突兀的折角，才能確保流暢滑行而不失速。

圖片來源：Krigor Studio 官方網站。

而在表演滑（Gala exhibition）中，配合浪漫樂曲，選手還能利用冰刀前端的鋸齒設計進行急剎轉折，在冰面上輕鬆滑出擁有一處折點（臨界點）的「心臟曲線（Cardioid）」或「水滴曲線（Teardrop）」獻給粉絲，將幾何圖形轉化為具象的視覺情感。





$$\begin{cases} x(\theta) = 2(1-\sin\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = 2(1-\sin\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x(\theta) = 2\cos\theta - \sin 2\theta \\ y(\theta) = 2\sin\theta \end{cases}$$

其中角度範圍皆介於$0 \le \theta \le 2\pi$。

三、 現實滑行軌跡的追蹤與力學邊界修正

前面提到的數學公式雖然能勾勒出完美的幾何圖形，但在真實的冰場上，選手的身體並不是一個單純的「質點」，其運動軌跡更受到物理力學的嚴格制約。參考當代運動科學文獻 《Trajectory tracing in figure skating》 的研究方法，要將理論曲線應用於現實，必須引入以下三項關鍵修正：

1. **攝影影像軌跡追蹤（Trajectory Tracing）：**

   在實務分析中，研究人員會在溜冰場上方或四周架設高解析度相機，透過電腦視覺與影像識別技術，動態捕捉選手身體控制點（如骨盆中心或冰鞋）的二維坐標 (x_t, y_t)。這種由實體影像轉化而來的真實離散數據，正是我們進行微積分參數擬合與誤差修正的基礎。

2. **向心力與摩擦力的力學邊界：**

   網頁模擬或 Python 畫圖可以畫出任意銳利的彎道，但現實中冰刀與冰面之間的摩擦係數非常低（通常 $\mu \approx 0.01 \sim 0.03$）。這代表選手在執行高難度壓刀轉彎或弧線時，其產生的向心力$F_c = \frac{mv^2}{R}$（R 為參數曲線的曲率半徑）不能超過冰面摩擦力的極限。因此，在透過微積分進行節目動線優化時，必須一併算出符合物理極限的安全速度曲線，避免選手因向心力過大而側摔。

3. **剛體模型與重心投影偏差：**

   花滑選手在做大圈橢圓滑行或進入螺線旋轉時，身體通常會向內側傾斜一個角度（Tilt Angle ϕ）。此時，選手整體的「身體重心投影軌跡」和冰刀

在冰面上割出的「實體冰痕軌跡」其實是不一樣的。透過剛體動力學（Rigid Body Dynamics）方程的修正，將身體傾斜角納入參數，才能真正將真實的身體姿態與幾何公式完美連結，達到評估體能消耗、減少膝關節與阿基里斯腱拉傷的臨床防護效果。

四、 體能消耗與微積分數值積分

在一場國際滑冰協會（ISU）規範的短曲（約 2 分鐘 40 秒）或長曲（長達 4 分鐘 10 秒）節目中，選手的體能消耗與滑行總距離（軌跡總長）具有正比關係。若一套節目編排超出了運動員的體力負荷上限，便容易導致後半段動作失誤甚至受傷。微積分中的參數曲線弧長公式，提供了精準量化總滑行距離的科學手段：

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

以左右寬幅設定為 8 單位、長度為 12 單位的冰場中的利薩茹曲線為例，將其微分項 $x'(\theta) = -4\sin\theta$ 與 $y'(\theta) = 4\cos 2\theta$代入公式，並利用倍角公式整理後，可得到如下的弧長積分式：

$$S = 16\int_0^{\pi/2} \sqrt{4\sin^4\theta - 3\sin^2\theta + 1}\, d\theta$$

由於該被積分函數一時無法找出其反導函數，導致微積分基本定理無法直接使用，此時便必須引進數值積分法來求解近似值：

1. **高斯積分公式** (Gaussian quadrature)：

   這是一種積分點不等距、計算複雜度低但精度極高的積分法則。將整段曲線的積分上下界分成 10 個小區段並轉換至［-1, 1］區間，使用高斯 5 點公式加總後，可估算出近似值$S_{app_G5} \approx 24.3889$ 單位長。

2. **複合型梯形積分法** (Composite trapezoidal method)：

   將積分區域直接分為 360 等分進行計算，同樣可得出極其相近的近似值 $S_{app\_CT} \approx 24.3889$ 單位長。

根據此數值積分結果，此利薩茹曲線的總軌跡大約為 24.39 單位長。經等比例換算至長 54 公尺、寬 26 公尺的真實冰面上，其滑行軌跡長度大約為 109.75 公尺。結合美國國家健康研究中心（NIH）的數據（滑冰每小時依體重標準約消耗 637 大卡)，教練團便能精準估算選手滑行該路線時的熱量與體能消耗，從而達成科學化的節目編排調度。

肆、 結論

當代雜耍中看似複雜多變的拋接軌跡，本質上受到離散代數序列（Siteswap）與置換矩陣的精準制約；而花式溜冰選手在冰面上割出的優美弧線，亦能透過微積分參數方程與數值積分進行定量拆解，進而精確計算出低能耗的優化動線。這些跨領域的交會表明:感性且直覺的肢體表達，其底層結構往往依賴於嚴密的理性數學邏輯。

這種科學化的分析方法，為表演藝術的實務應用帶來了結構性轉變。傳統的編舞與技術訓練，長期依賴經驗累積與感性直覺；而現代電腦數值模擬的介入，不僅拓寬了動作設計的創新邊界，更能將「運動傷害防治」提昇至定量評估的層面—透過事前篩選與動線優化，有效避開易造成肌肉拉傷的危險軌跡。這種將幾何公式與運動力學結合的視角，為肢體美學提供了更具實證基礎的解讀方式。隨著動態捕捉技術與人工智慧（AI）軌跡模擬的技術迭代，數學與身體藝術的融合將更趨緊密。當抽象的代數方程與具體的生物力學動態進一步結合，這種實證科學與舞台藝術的互補，將持續為動態系統模擬、跨領域編舞等應用，開創出更具前瞻性的研究與實踐空間。

伍、 參考資料

1. 陳俊安、陳儒文、葉時廷、楊益全、林惟庸、許值銓（2025.6）。〈Siteswap 對於雜耍技能發展的影響〉。《國立臺灣戲曲學院學報 第三十二期》。

2. Matrix67:The Aha Moments（無日期）。 〈位換記號、排列測試與狀態圖：雜耍中的數學〉。位换记号、排列测试与状态图：杂耍中的数学 | Matrix67: The Aha Moments

3. 白斐嵐（2014.8）。〈 西恩·甘蒂尼 雜技，是數學最完美的視覺呈現〉。《PAR 表演藝術雜誌》。

4. 東海大學應用數學系胡馨云教授（2022.07）《淺談「冰上幾何學」》（Geometry on Ice: A Brief Exploration）

5. Meghan Rhodes, Vakhtang Putkaradze（2021.08）《Trajectory tracing in figure skating》，https://arxiv.org/abs/2108.05915

6. Krigor Studio. (n.d.). USFS Moves in the Field Diagrams: Complete Visual Guide for Every Level. Krigor Studio Official

Website. https://www.krigorstudio.com

陸、AI 工具使用說明

本報告在撰寫與修訂過程中，部分內容借助生成式 AI 模型（Google Gemini）進行輔助處理，具體使用範疇與說明如下：

1. **文字潤飾與學術語氣調校**：本報告之初稿由作者獨立撰寫，為提升學術論文之嚴謹度並統一全篇筆調，利用 AI 工具對「壹、前言」、「肆、結論」段落及全篇文獻資料進行結構整理、詞彙精煉與句結構優化，將口語化表達轉化為符合學術規範之書面語體。
2. **英文文獻翻譯**：本報告於探討「花式溜冰（Figure Skating）」章節時，參考了國外英文學術文獻（如《Trajectory tracing in figure skating》）與國際滑冰總會（ISU）之官方規範。過程中利用 AI 工具進行學術文獻翻譯。
3. **多元資料之邏輯整合**：過程中利用 AI 工具對每一項資料進行個別的重點梳理與精煉整理，隨後再運用 AI 將這些性質各異的內容進行全局的交叉比對與統整。
4. **LaTeX 公式生成與代碼統整**：本報告涉及多項複雜的物理幾何運動方程（如雜耍的同餘判別式、花滑的心臟線與水滴線參數方程等）。在作者確立參考資料的數學基礎後，利用 AI 輔助將文獻中零散的數學方程進行個別的重點梳理，並請 AI 統整、轉譯生成為精確的 LaTeX 數學式代碼。