

文化脈絡中的數學

從弦表到對數

單維彰

中央大學數學系、師培中心、文學士班
民國115年6月2日

三角關鍵訊息

- ◆ 角是中國與西方數學的初始分岔點。
- ◆ 三角比來自弦表，弦是史上第一個**函數**。
- ◆ 三角的教學帶出**函數**思維，但記憶特殊角限制為代數。

單維彰 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

[2]

劉徽二懸念

球體積

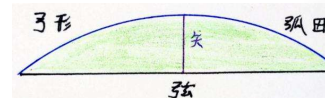
弦矢求弓形面積

單維彰 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

[3]

九章有「弧田術」

- ◆ 由弦矢求弓形面積
 - 劉徽發現有誤，但亦不能改
 - 等價於弦矢求弧
- ◆ 真正關鍵是弧弦互算
 - 也就是「三角比」



單維彰 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

[4]

但實際頗管用

$$0 < \frac{\text{矢}}{\text{弦}} \leq \frac{1}{2}$$

當 $0.2 \leq \frac{\text{矢}}{\text{弦}} \leq 0.5$ 相對誤差 < 2%

九章僅以 $\pi = 3$ ，劉徽改良但未用於弧田

[5]

Excel 試算

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	弦	矢	半徑	半心角	弧田面積	弓形面積	R-Err%	以3代Pi	R-Err%3
2	1	0.02	6.2600	4.58	0.0102	0.0133	24	-0.1279	108.0
3	1	0.04	3.1450	9.15	0.0208	0.0267	22	-0.0445	146.8
4	1	0.06	2.1133	13.69	0.0318	0.0401	21	-0.0080	499.2
5	1	0.08	1.6025	18.18	0.0432	0.0536	19	0.0169	155.9
6	1	0.10	1.3000	22.62	0.0550	0.0672	18	0.0371	48.1
7	1	0.12	1.1017	26.99	0.0672	0.0809	17	0.0551	21.9
8	1	0.14	0.9629	31.28	0.0798	0.0948	16	0.0720	10.9
9	1	0.16	0.8613	35.49	0.0928	0.1088	15	0.0881	5.3
10	1	0.18	0.7844	39.60	0.1062	0.1231	14	0.1039	2.2
11	1	0.20	0.7250	43.60	0.1200	0.1375	13	0.1195	0.4
12	1	0.22	0.6782	47.50	0.1342	0.1522	12	0.1350	0.6
13	1	0.24	0.6408	51.28	0.1488	0.1671	11	0.1508	1.2

[6]

古中國不曾量角

◆ 有「三角形」：圭田

- 關心它的面積（半底乘以高）
- 秦九韶：三斜求積術（海龍公式）

◆ 大地測量：只用勾股

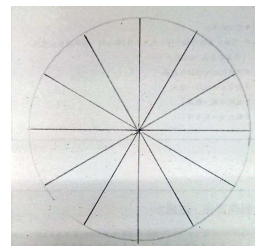
- 從直角三角形的相似獲得比例式
- 不曾想過勾股之比值（tan）

[7]

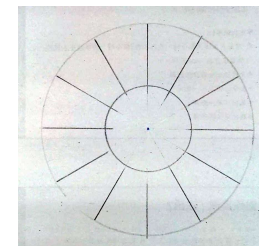
中國不量角而測弧

◆ 天文測量：用羅盤

- 唐朝之前已將圓周劃分 365 ¼ 度



巴比倫、古希臘量天



古中國量天

[8]

單維彰 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

單維彰 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

單維彰 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

單維彰 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

《九章》9：勾股

- ◆ 兩邊可測
 - 由畢氏定理知第三邊
- ◆ 一邊可測
 - 由相似觀念知另兩邊
- ◆ 高遠皆不可測 (直接測量)
 - 重差術 (兩個共邊的勾股及兩勾差)
 - 劉徽續《九章》10：〈海島算經〉

單維彰 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

[9]

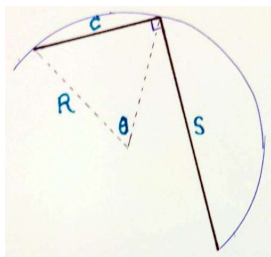
沒有「角」...

- ◆ 不能發現
角 \leftrightarrow 勾股比
後來的「三角比」
 - ◆ 弧弦不能互算
 - 1300年後傷及天象曆算
- 弦 = $R \text{crd} \theta$ θ = 弧所對的圓心角

單維彰 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

[10]

弧與弦的對應觀念



θ ：圓心角
所對弦長 $c = \text{crd} \theta$
輔助 (補) 弦 s
和角、半角需輔助弦
但三倍角不必：

$$\text{crd}(3\theta) = 3 \text{crd} \theta - \text{crd}^3 \theta$$

伊斯蘭文明在西元1200年之後才知

單維彰 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

[11]

$\text{crd} \theta$

沒有「公式」

(直到牛頓與關孝和)

可能因此沒有發展

單維彰 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

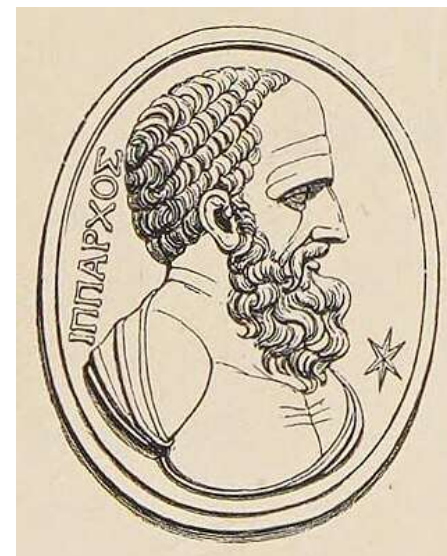
[12]

希臘天文學可能經由羅馬貿易管道傳入印度，但蠻奇怪的，所傳入者是 Hipparchus 之天文學著作，而非較晚的托勒密之《天文學大成》（Almagest）。

Hipparchus 的著名天文成就是發現了春分的歲差，亦即地球自轉軸的緩慢旋轉。他的數學名聲是開創了三角學，他首創 chord 函數，製作了第一張弦表。他的天文與數學被托勒密蓋過，阿拉伯吸收後者而忽略 Hipparchus。但是他的知識卻傳入印度，在印度變成正弦，從印度傳入阿拉伯，仍間接影響了歐洲。

Hipparchus (-150) 製作弦表，設定半徑為 3438 單位，解析度 7 度 30 分。

Il p.3



Hipparchus 始

希臘化時期後期的數學家們，在研究的主題上，開始轉向實用性與計算性。例如，以三角形面積公式聞名的海龍，同時是希臘的數學家，也是測量學家。在數學方面最能代表其成就的著作，是他的《度量論》（*Metrica*）。全書共分為三卷，第一卷由矩形和三角形開始，討論平面圖

還有巴比倫，他們根本不算分數

海龍繼承埃及的測量科學並發揚光大，他另一部有關於測地學的著作（*Dioptra*）也很有名，這部著作中，海龍對如何在隧道兩端同時動工而能使之銜接提出說明，也解釋如何測量兩地的距離，以及如何在


p.96

托勒密王朝毫無關係。他的天文學、地理學以及地圖之製作，和他的數學成就一樣為人熟知。他所著的《天文學大成》（*Almagest*，意指最偉大）是一部集數學、天文大成的著作，共十三冊。該書提出宇宙模型，並被保存下來，直到十五世紀哥白尼的《天體運行論》（1543）之

Almagest 原名 *Mathēmatiké Syntaxis* (150)

提到，天文學應盡可能選擇最簡單的數學模型，因此，他了解自己的理論僅是符合觀察結果的數學描述，亦即是所謂的「整理外觀」（*Saving the phenomena*），並不必然是大自然的真正設計。不過，多虧了湯馬斯·阿奎納（Thomas Aquinas, 1225–1274）的《神學大全》，托勒密的天文學模型，以及亞里斯多德的宇宙論，都被後來的基督教世界奉為真理。

l p.97



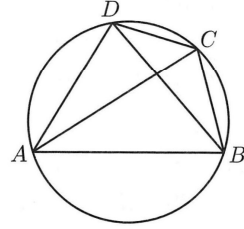
單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

17

偉大的弦表

圓內接四邊形對角線的乘積等於對邊的乘積和。即若 $ABCD$ 是圓內接凸四邊形，則 $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$ 。

圓心角為自變數，從 0 到 180 度，解析度 $\frac{1}{2}$ ，精確度三位六十進制小數。



藉此定理導出 chord 函數的和角公式、差角公式、倍/半角公式，但無法三倍角。

1p.98

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

18

西方數學也重實用

Arcus		Chordarum	
partes	in	partes	in 1°
0	30	0	34.202
1	0	1	34.500
1	30	1	34.797
2	0	2	35.094
2	30	2	35.391
3	0	3	35.688
3	30	3	35.985
4	0	4	36.282
4	30	4	36.579
5	0	5	36.876
5	30	5	37.173
6	0	6	37.470
6	30	6	37.767
7	0	7	38.064
7	30	7	38.361
8	0	8	38.658
8	30	8	38.955
9	0	9	39.252
9	30	9	39.549
10	0	10	39.846
10	30	10	40.143
11	0	11	40.440
11	30	11	40.737
12	0	12	41.034
12	30	12	41.331

還有什麼比製表更實用？

某人很辛苦地算一遍，開放答案讓大家抄，以後只要查表即可。

托勒密的偉大跨文化創舉

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

19

箇中滋味

- ◆ 老師也受文化限制

隨查即用，不要公式

- ◆ 三角與對數畫錯重點：奮力學習公式

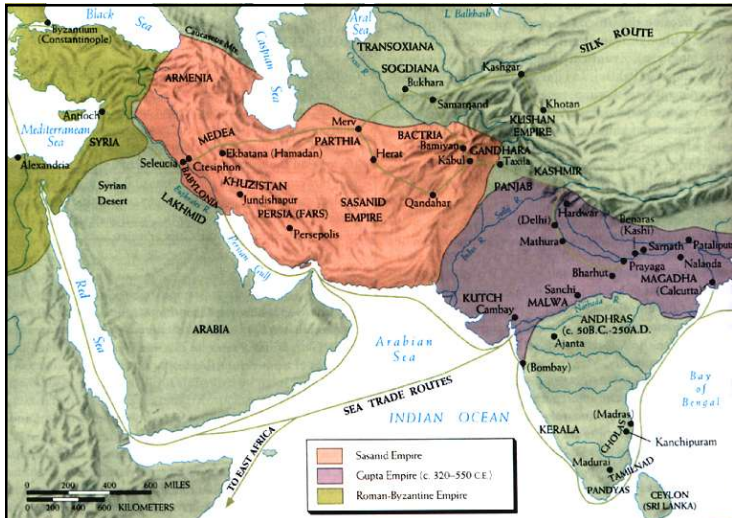
單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

20

基督教誕生前，柏拉圖和畢達哥拉斯的哲學學派，曾創造一個有利的社會文化環境，讓一些女性得以從事學術研究。海芭夏是希臘化時期晚期的重要數學家，也是史料可稽的第一位女數學家。她的父親席翁曾在亞歷山卓擔任教職，海芭夏從小成長在自由開放的教育環境

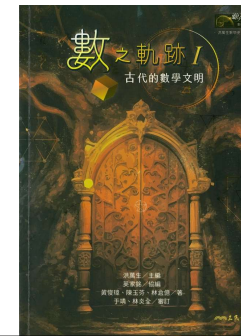
席翁曾經改編歐幾里得《幾何原本》及托勒密《天文學大成》，而海芭夏則寫下她父親作品、阿波羅尼斯的《錐線論》，以及丟番圖作品的評註。不幸的是，由於被捲入宗教、政治權力鬥爭，最後在西元415年時，被狂熱的宗教分子謀殺。她的許多作品，也隨著亞歷山卓圖書館被毀而亡佚。

許多史家認為海芭夏的死亡，見證了希臘數學的徹底終結。她的



Hypatia時代的世界

來自印度的唐朝太史監瞿曇悉達的時空與政教背景。他傳入相當於今日的正弦函數表，以及使用印度數字的筆算法，但漢人沒有接受。



阿拉伯融合發展

- ◆ 從印度學來「半弦」 \sin

$$\text{crd}\theta = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

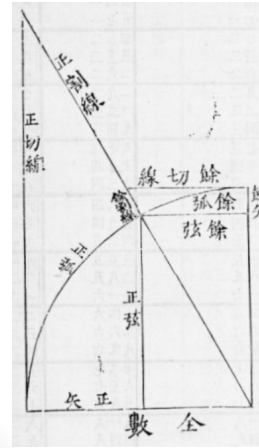
- ◆ 發展出 12 個「三角比」
單位圓上出 12 條線段長

25

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

明朝末年 傳入中國

- ◆ 耶穌會傳教士帶進來
- ◆ 當時有 8 個
- ◆ 現在學 3 個



26

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

食髓知味

- ◆ 阿拉伯發現了積化和差

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

- ◆ 查表可使乘法變成加減
- ◆ 後來想到指數律更好用
- ◆ 故計重施：對數表（為實用）

27

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

對數訊息一

- ◆ 指數與對數是同一組觀念。
- ◆ 概念與操作就像手心和手背。
- ◆ 學生感覺指數熟悉，對數陌生，課程與教學可以改進。
- ◆ 零頭指數來得太理所當然/不求甚解，乃是病根。

28

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

文藝復興後 解析幾何前 基督新教起

明代嘉靖、萬曆

單維彰 - 從弦表到對數 - 2026/6/2


29

Michael Stifel

施諦斐

1487 - 1567

日耳曼修士
Jena 大學第一代
數學教授
馬丁路德支持者



單維彰 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

30

Arithmetica Integra



算術全義

MDXLVIII 1544

單維彰 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

31

等差 / 加減

0	1	2	3	4	5	...
1	2	4	8	16	32	...

等比 / 乘除

單維彰 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

32

推廣到負數

...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
...	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	...

負數存在的正當性
引介負數的另一理由

33

單維影 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

推廣到...

零頭指數
Fractional
Exponent



34

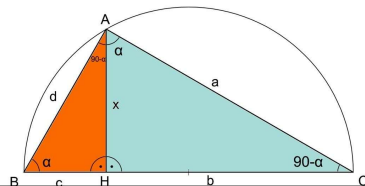
單維影 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

尋找 a 和 x 使得

0	a	1	$0: a = a: 1$
1	x	2	$1: x = x: 2$

古希臘的幾何平均

尺規作圖解



35

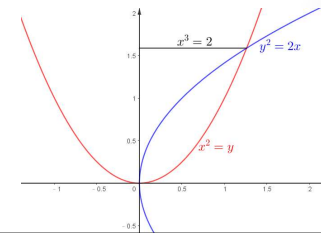
單維影 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

尋找 x 和 y 使得

0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	
1	x	y	2	$1: x = x: y = y: 2$

古希臘的
倍立方

軌跡作圖解



36

單維影 - 從弦表到對數 - 2026/6/2

國中等差等比

太快

- ◆ 形式化
- ◆ 公式化

37

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

零頭指數

- ◆ 是發明：人造的
- ◆ 方根轉分數的源頭
- ◆ 零頭指數與對數同時誕生，手心手背

38

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

零頭指數學習

- ◆ 來得太理所當然/不費功夫
- ◆ 缺乏操作機會，無法獲得經驗；教學文化使然
- ◆ 文化只能緩慢改變

學生若無法獲得經驗，就只能在孤立無援的窘境下，趨於功利和狹隘，終而無法順遂地學習。

杜威 (1902)

39

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

John Napier



1550 – 1617

蘇格蘭貴族/地主
克卜勒合作者
新教支持者
證明羅馬教宗是反基督

40

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

對數訊息二

- ◆ Napier 發明了兩款對數。
- ◆ 第一款是**偉大的浪費**(1614)。
- ◆ 第二款才是**常用對數**，但他已無力完成。
- ◆ 歷史評價不太公平，有文化因素：Napier 是貴族。

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

(41)

偉大的浪費

- ◆ 支持天球與地球的球面三角。
- ◆ 針對正弦做其對數。
- ◆ 等比數列選擇小於1的公比，相當於採用小於1的底數。
- ◆ 等差數列的0對應等比數列的1，對數趨向 ∞ 真數趨近0。

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

(42)

Logarithm

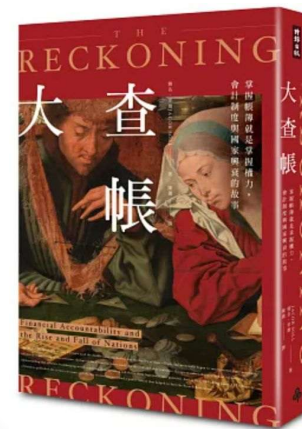
Logos + Arithmos

- ◆ Reckoning Number
- ◆ Ratio

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

(43)

Reckon-ing



計算

Reckon
Count
Calculate
Compute

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

(44)

Reckoning

等差

...	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000	...
...	1.0000	1.1892	1.4142	1.6818	2.0000	...

Ratio

等比

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

(45)

對數

對應等比的等差數

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

(46)

Henry Briggs

布里格



1561 – 1630

英格蘭平民
清教徒
Gresham 第一代
數學教授
克卜勒支持者

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

(47)

1615 夏季初會

彼此懷著仰慕之情緊握雙手，
不發一語地沈浸在感動之間達
十五分鐘之久。

執手相看淚眼，竟無語凝噎。

柳永 (1003)

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

(48)

男人倆感動啥？

- ◆ Napier 悔悟，但為時已晚。
- ◆ Briggs 洞悉偉業，但另有主意需要支持。
- ◆ 一拍即合：納氏心有宏願，布氏心有靈犀，並承諾完成。

托勒密弦表有 360 個數。納氏的第二款對數表欲有 1000 萬個數。

[49]

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

有效位數初體驗

- ◆ 計算 1000 萬以下正整數的對數，近似於解析度 0.000001。
- ◆ 7 位真數：三角表精確度。
- ◆ 14 位對數：可能源自有效位數的判斷，希望如

$$\log 1.000001 = 0.00000043429426L$$

亦有 7 位有效數字可用。

[50]

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

對數訊息三

- ◆ 高中典型問題
 2^{1000} 有幾位數？
 是 Napier 建議的 $\log 2$ 算法
- ◆ 他們追求 14 位精確度，因此需要知道
 $2^{100,000,000,000,000}$ 有幾位數？

[51]

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

布里格對數

- ◆ 用納氏算法做了 $\log 2$ 和 $\log 7$ ，當作新算法的驗算，新算法有數值分析的前兆。
- ◆ 1616 年夏季二會，確認算法。
- ◆ 原本 1617 夏季要呈獻 1 到 1000 的對數。

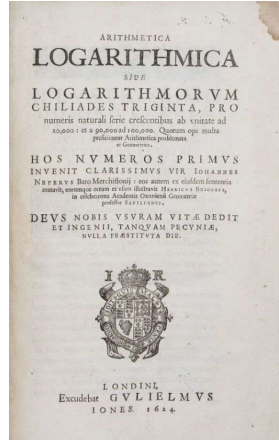
[52]

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

兩款對數



1619



1624

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

53

納皮爾計畫

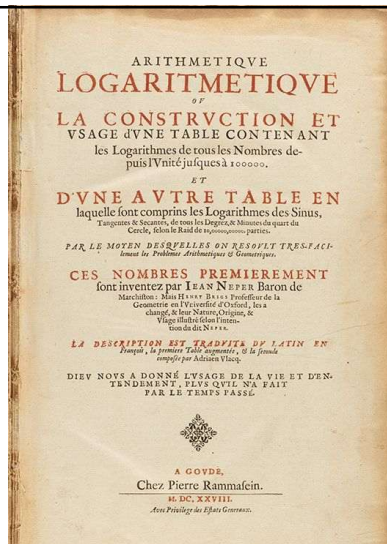
- ◆ 7位真數，14位對數。
- ◆ 布里格1624出版1~2萬與9~10萬的14位對數，並公佈詳細算法。
- ◆ 荷蘭人弗拉克(Adriaan Vlacq) 1628出版完整1~10萬的10位對數。賺到一桶金。

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

54

Logarithmi.	Logarithmi.
1 0000,0000,0000	34 45314,78917,04226
2 0010,29995,66398	35 45440,68044,35028
3 0021,21247,19666	36 45563,02500,76729
4 0032,09991,32796	37 45682,01724,06700
5 0043,06989,70043,3602	38 45797,83596,61681
6 0054,03987,38364	39 45910,64607,02650
7 0065,00986,01426	40 46020,59991,32796
8 0076,00000,00000	41 46127,83567,19774
9 0087,00000,00000	42 46232,49292,39790
10 0098,00000,00000	43 46334,68455,57959
11 0109,01668,15823	44 46445,2676,48619
12 0121,81246,04762	45 46552,12113,77534
13 0134,43352,30684	46 46662,57821,08157
14 0148,01280,3567824	47 46770,97857,03572
15 0162,00000,00000	48 46881,24127,37559
16 0176,41998,65592	49 46991,96080,02851
17 0191,48991,33827	50 47100,99700,43602
18 0207,02991,10231	51 47207,57016,09794
19 0224,03991,32796	52 47312,45843,63480
20 0242,04991,66398	53 47424,71809,60079
21 0261,05991,33922	54 47533,93759,82297
22 0281,06991,66398	55 47640,62689,49424
23 0302,07991,33922	56 47748,18027,00620
24 0324,08991,66398	57 47858,74855,67249
25 0347,09991,66398	58 47964,27993,62944
26 0371,10991,33827	59 48070,81201,64224
27 0396,11991,66398	60 48178,51120,33624
28 0422,12991,33827	61 48283,31083,35077
29 0449,13991,66398	62 48389,60949,82297
30 0477,14991,66398	63 48492,40949,45358
31 0506,15991,33827	64 48597,70973,98389
32 0536,16991,66398	65 48699,13336,64286
33 0567,17991,66398	66 48795,43935,54187
34 0599,18991,66398	67 48886,74802,70083

1624



1628

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

55

後話

- ◆ 1791法國經線測量計畫，附帶de Prony領導算到20萬，精確達14位。三道生產線。
- ◆ 李善蘭約1852年到上海墨海書館「請教」對數造法。
- ◆ 1952出版1~10萬的20位對數，用在登月計畫。最後一版。

單維彰 - 從弦表到對數 2026/6/2

56

感謝 HPM 先進

- ◆ 蘇俊鴻(2003)。數學史融入教學—以對數為例。HPM通訊6(2,3)。
- ◆ 林倉億(2010)。數學史融入教學—以對數表為例。HPM通訊13(12)。
- ◆ 林倉億(2020)。對數教學的4.5節課。HPM通訊23(4)。
- ◆ 蘇惠玉(2014)。布里格斯的《對數算術》與對數表的製作。HPM通訊17(6)。

End