

授課教師：單維彰

授課日期：2007年11月26日

授課範圍：國中第二冊 3-4 二元一次方程式的圖形(P. 121-P. 132)

筆記製作：數四 A 93201020 王派峰

## 3-4 二元一次方程式的圖形

### ◎ 二元一次方程式和一次函數的關係

**建議** 函數圖形在國中的教材中，並未出現  $y = f(x)$  的型式，而只是很單純的把  $x$  跟  $y$  放在等號的兩邊。所以在授課的時候，我們要注意我們的用語，不要把的函數  $f(x)$  的用法掛在嘴邊，以免造成學生在學習上的困難，只要寫出  $x$  跟  $y$  的關係即可！

過去我們所學的的方程式中，如果只有  $x$  一個未知數，那麼我們可能必須針對  $x$  來求解；但如果包含  $x$  跟  $y$  兩個未知數，那麼可能會有兩個方程式來求針對  $x$  跟  $y$  來求解。現在必須改變過去「代入數值」或「解未知數」的觀念，而是把二元一次方程式中的  $x$  跟  $y$  進行移項整理成一個一次函數，如  $x + 2y = -4$  可以整理成  $y = -\frac{1}{2}x - 2$ ，如此一來，便能與前節的學習來做結合。

函數與方程式並非相同的東西，然而這兩者所做出來的圖形卻是一樣的，這乃因為某個點坐標在直角座標上若滿足函數，則代入這個二元一次方程式也一定會成立，因此便說明了二元一次方程式的圖形為一條直線。在此處學生開始要學習到滿足  $x + 2y = -4$  的  $x$  跟  $y$  事實上有無限多種可能，而將這些點描繪在直角坐標中就會發現二元一次方程式乃為一條直線。

此書用代數方式教學生如何將二元一次方程式轉換為一次函數，然而事實上我們卻不會說  $x + 2y = -4$  為一個函數或是  $y = -\frac{1}{2}x - 2$  為一個二元一次方程式，這僅是型式上的差異而已。而唯一不能改寫成一次函數的二元一次方程式如  $2x = 5$ ，此處的  $x$  值恆為 2.5，然而卻無法決定  $y$  值為何，故無法將  $y$  寫成的  $x$  函數型式，進而發現  $2x = 5$  乃為一條鉛直線。

### ◎ 二元一次方程式的圖形

由於二元一次方程式的解可以用數對表示，因此可以在坐標平面上畫出一個二元一次方程式的圖形。也就是說找出滿足二元一次方程式的  $x$  跟  $y$ ，並將這些解在平面上點出來，就可以發現圖形為一條直線。因為這跟前面的一次函數做連結，所以只要將二元一次方程式做個簡單的改變，就可以讓學生輕鬆的學習！

例題 1 要求畫出  $x + 2y = -4$  的圖形，方法一是將其改成一次函數的型態，再想辦法找出符合式子的兩個點，如  $(0, -2)$  和  $(2, -3)$ ，並將這條直線畫出，如圖 A。而方法二是因為已經知道

二元一次方程式是一條直線，所以也不必化成一次函數的樣子，直接找方便計算的兩個點即可，如截點 $(0,-2)$ 和 $(-4,0)$ 最為容易，之後在將直線畫出來，如圖 B。

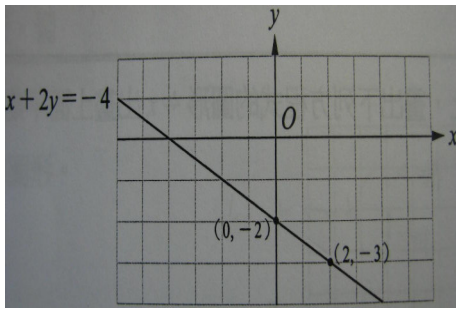


圖 A

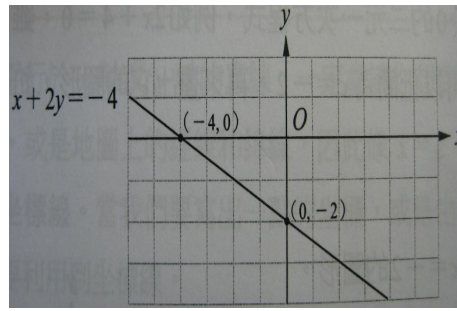


圖 B

然而，並非所有的二元一次方程式都是找截點最為方便，例如在例題 2 要畫  $3x - 2y = 12$  的圖形，此時的  $x$  軸截距為 4、 $y$  截距為  $-6$ ，那麼就必須把坐標軸畫的很長，點也必須標到很遠的地方去，如圖 C。因此這邊可以提醒學生除了  $(0,-6)$  之外，我們也許可以找其他的近一些坐標點如  $(2,-3)$  來方便作圖。

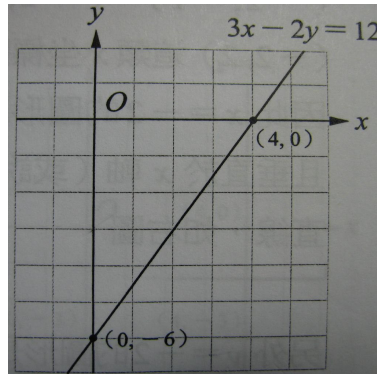


圖 C

在例題 2 的隨堂練習中，要求畫出  $-2x + y = 4$  和  $-2x - 4y = 8$  這兩條直線。這個例子有兩個用處，第一個是在練習中我們可以發現平面上兩條相異直線通常會有一個交點；第二個則是用我們的經驗可以觀察  $-2x + y = 4$  的斜率為 2、而  $-2x - 4y = 8$  的斜率為  $-\frac{1}{2}$ ，相乘之後等於  $-1$ ，便可得到兩條直線為垂直。此處便可提醒同學注意這個地方！

例題 3 中，我們可以發現  $x = -2$  為一條鉛直線；而  $y = -2$  為一條水平線，如圖 D，這在前節其實已經說明過了。

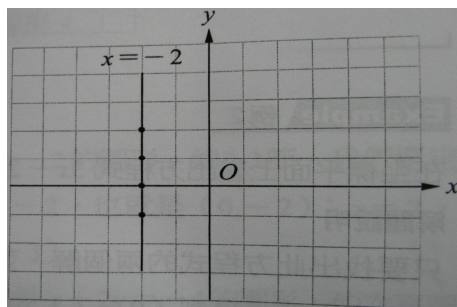


圖 D

結論：二元一次方程式  $x=c$  的圖形是過  $(c,0)$  的鉛直線；  
二元一次方程式  $y=d$  的圖形是過  $(0,d)$  的水平線。

定義：平行於  $x$  軸或  $y$  軸的直線，如  $x=2$  或  $y=-3$  的這類直線，通常稱為坐標線。

## ◎ 利用兩點來決定直線的二元一次方程式

例題 5 可以學到通過  $(1,3)$  與  $(-2,3)$  兩點的直線為  $y=3$ ，如圖 E；而通過  $(2,3)$  與  $(2,-3)$  兩點的直線為  $x=2$ ，如圖 F，藉此也可以了解到水平線和鉛直線的二元一次方程式型式。而從此中，我們也認識到  $x$  軸上面的點，其  $y$  坐標皆為 0；而  $y$  軸上面的點，其  $x$  坐標皆為 0，故  $x$  軸即為  $y=0$ ；而  $y$  軸即為  $x=0$ 。

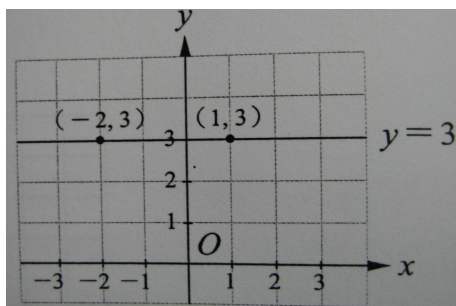


圖 E

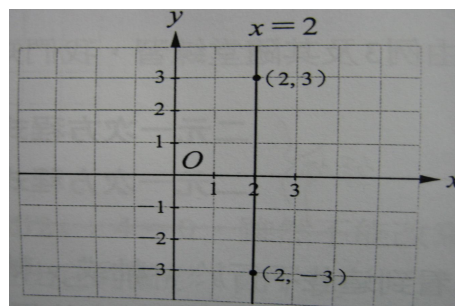


圖 F

定義：二元一次方程式的圖形皆為直線，故二元一次方程式又稱為直線方程式。

例題 6 為求通過  $(1,-1)$  與  $(2,2)$  兩點的直線方程式，由於在國中並未學習向量、斜率等概念，所以必須利用解聯立方程式得到直線方程式  $y=ax+b$  的係數  $a, b$ 。事實上我們知道直線方程式的型式應該為  $ax+by=c$ ，不過在題目給定兩個點〈兩個條件〉的情況下，卻必須要解出  $a, b, c$  三個未知數是不可行的。因此可以把其中一項的係數除掉，就可以化成只有兩個未知數的一次函數  $y=ax+b$ ，只要此線不是一條鉛直線或水平線即可。

**建議** 事實上二元一次方程式與一次函數並非相同的東西，但在例題 6 的解題過程中，直接把此直線方程式令為  $y=ax+b$  的型式來求解並不是那麼恰當。所以在此處要跟學生詳細的說明二元一次方程式與一次函數的轉換關係進而求得答案！

## ◎ 兩條直線的交點坐標

由於「部編版」的教科書先介紹直角坐標系統，然後學習如何畫出直線，之後才介紹如何找出交點坐標。所以例題四要求找出  $x=4$  或  $y=-3$  兩條直線的交點坐標，如圖 G，就是這類問題的最基本題型。

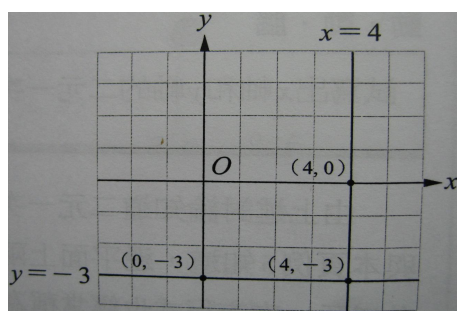


圖 G

第一章我們學習到如何對一個二元一次聯立方程式求解，而第三章我們認識了二元一次方程式的圖形，故由聯立方程式的作圖中，把這兩個地方做了一個結合。由於聯立方程式中的每一個二元一次方程式都代表一條直線，因此我們可以在坐標平面上把這兩條線畫出來，進而發現這兩條線會產生一個交點，且這個交點坐標其實就是二元一次聯立方程式的解。由幾何觀念也可以清楚的知道  $(x, y)$  因為必須在第一條直線上、也必須在第二條直線上，所以這個點就是兩條線的交點。

在例題 9 中要找出直線方程式  $3x+2y=6$  在  $x$  軸與  $y$  軸的交點坐標，也就是我們所說的截點。因此  $x$  軸上的交點坐標可以令  $y=0$ ，再代入  $3x+2y=6$  進而解出  $x=2$ ；同理， $y$  軸上的交點坐標則令  $x=0$ ，再代入  $3x+2y=6$  進而解出  $y=3$ 。

**補充：** 從解聯立方程式的學習中，我們也可以確認點不應該具有寬度、線也不應該具有寬度，不然這兩條線的交集出來的點可能會是一大坨的點，也說明聯立方程式會有一大堆解。然而我們在解聯立方程式的過程中只會得到唯一的解，因此也間接說明的數學內部的一致性！

**結論：** 解聯立方程式  $\langle 1 \rangle$  和  $\langle 1 \rangle$  的解所形成的數對就是  $L_1$  和  $L_2$  交點的坐標；

## ◎ 自我評量分析

1. 第 1 題(3)：

直線  $L: ax + y = 3$  當  $y = 0$  的時候，可以得到  $x = \frac{3}{a}$ 。且從圖 H 中我們發現此線與  $x$  軸的交

點坐標為負，所以我們知道  $\frac{3}{a} < 0$ ，故求得  $a$  是負數。

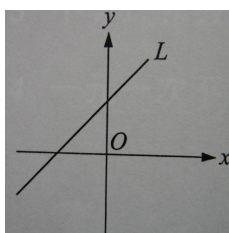


圖 H

2. 第 7 題：

$2y - x = 0$  是一條通過原點的直線，也就說將代入  $(0,0)$  會滿足方程式，只要再找到通過此線的另一個點，就可以在坐標平面上把它畫出來。