

第一章乘法公式與多項式

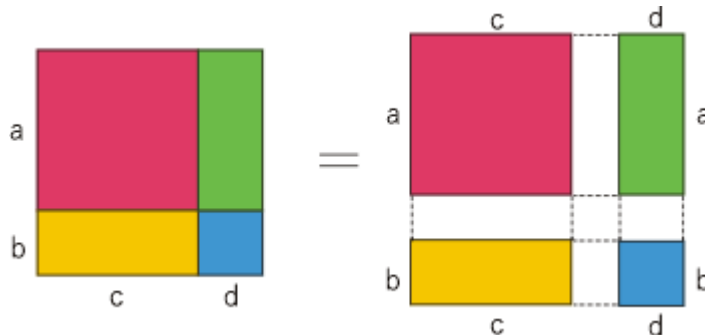
1-1 乘法公式

前言

在第三冊當中，畢氏定理、乘法公式、平方根、二次多項式為其重點，其中又以乘法公式貫穿全部，甚至在未來的兩多項式相乘或是因式分解時，也都用的到，因此在教學時，在乘法公式這章應該多多下點功夫。

乘法公式

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$



注意：

- (1) 乘法公式可以直接用圖解釋給學生聽，如上圖，一邊邊長為 $(a+b)$ 另一邊邊長為 $(c+d)$ 的長方形，面積為 $(a+b)(c+d)$ ，同時我們也可以把它拆開來看，則面積為 $ac + ad + bc + bd$ ，因為是同一個長方形，所以面積相等。
- (2) 雖然用圖解的方式來講解乘法公式不錯，但是圖解法並不適合講解更複雜的式子，例如： $(a+b)(c+d)(e+f)$ 或是一些之後的 $(a+b)(a-b)$ 。因為對於小朋友，文字和圖形是分開來的，若全部都配合圖形，反而使的他們增加許多壓力(因為他們等於一次要記得代數和幾何的式子)，因此較複雜的式子，直接使用分配律或乘法公式展開即可。

$$(3) (a-b)(c+d) = ac + ad - bc - bd$$

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$$

也為乘法公式，可視為 $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ 之變形，也就是說可以將 $(a-b)$ 視為 $(a+(-b))$ ，相同的也可以將 $(c-d)$ 視為 $(c+(-d))$ ，這些乘法公式是本章節最重要的，因此必須多多讓學生練習。

例題：

$$(1) (50+1)(20+3) = 50 \times 20 + 50 \times 3 + 1 \times 20 + 1 \times 3 = 1173$$

$$(2) (a+1)(a+2) = a^2 + 2a + a + 2 = a^2 + 3a + 2$$

$$(3) (2b-1)(-b-2) = -2b^2 - 4b + b + 2 = -2b^2 - 3b + 2$$

和、差平方公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

注意：

(1)和、差平方公式均可由乘法公式導出

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

所以可以不強迫學生硬背，多練習幾次自然就會記起來了。

例題：

$$(1) (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

$$(2) (a-2)^2 = a^2 - 4a + 4$$

$$(3) 102^2 = (100+2)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 2 + 2^2 = 10404$$

平方差公式

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

注意：

(1)平方差公式也可以由乘法公式導出

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

如同和、差平方公式一樣可以不強迫學生硬背，多練習幾次自然就會記起來了。

(2)此部份也可以圖解一次給學生看，但是怕學生和之前的混淆，所以不建議。

例如：

$$(1) (a+2b)(a-2b) = a^2 - (2b)^2 = a^2 - 4b^2$$

$$(2) 105 \times 95 = (100+5)(100-5) = 100^2 - 5^2 = 9975$$

$$(3) 99^2 = 99^2 - 1 + 1 = (99+1)(99-1) + 1 = 100 \times 98 + 1 = 9801$$

$$(4) (a+b)^2 - (a-b)^2 = ((a+b) + (a-b))((a+b) - (a-b)) = 2a \times 2b = 4ab$$

1-2 多項式與其加減

多項式

若長方形邊長分別為 $x+2$ 和 $2x-1$ 則長方型面積為 $2x^2 + 3x - 2$ 像這樣的算式稱為 x 的二次多項式，例如 $x^2 - 1$ 、 $x - 3x^2 + 5$ 都是二次多項式。多項式是指算數只包含常數與 x 、 x^2 、 x^3 等 x 的正次方，而二次則表示 x 最高次方為 2。因此像 $3 - 2x$ 是一次多項式， $3x^3 + 2x - 1$ 則為三次多項式。

注意：

(1) 課本用複利引進多項式並不是很好的方法，複利通常用來引進指數函數，而引進多項式用面積可能會比用複利來的相對簡單和明顯。

(2) 和以往相同的，一開始多用一些沒缺項的多項式給學生練習，而比較特殊的例子可以晚點再說甚至於不討論，像是 0 是多項式這類的，另外多項式做四則運算之後是否仍為多項式也暫時不需和學生討論。

併項和多項式加減

如同一元一次式一樣，只有同類項才能併項而且並完項之後，需要按照降冪

排列將多項式整理寫出來，例如 $x^2 + 2x + 3$ 、 $2x - 1$ (這部份其實身教重於言教，多寫幾次給學生看，久了他們自然就會了)。而升冪排列則較少使用，如 $3 - 2x$ 、 $3 - 5x + 2x^2$ ，除了無窮的多項式之外，很少使用。至於多項式的加減運算和以前整數的運算方法都一樣，不過只有同類項才能做加減。

例如：

$$(1) (7x^3 + 5x^2 - 7x + 2) - (x^2 - 7x - 2) = 7x^3 + (5-1)x^2 + (-7+7)x + (2+2) \\ = 7x^3 - 4x^2 + 4$$

$$(2) (x^3 + x^2) - (x^3 + 3) = x^2 - 3$$

注意：

- (1) 此時的 x 就單純代表一個符號，不具任何意義，請勿將 x 用某常數帶入。
- (2) 分離係數法就是把 x 省略不寫，進行加減法，由於只有同類項才能合併，因此不需進位(也不能)，此外缺項需補 0 否則容易出錯，另外減法若不夠減，無須借位，寫負號即可。
- (3) 多項式的相等，就是同類項都相等要先和學生解釋，因為學生還不清楚多項式相等的定義。

1-3 多項式的乘除

多項式的乘法

我們在 1-1 節學過如何使用乘法公式計算如 $(a+1)(a+2)$ 這類的多項式乘法，但是在本章節中，由於大部分的乘法都無法使用乘法公式計算(因為並非兩項成兩項)，因此必須回歸基本的分配律去做成法。

例題：

$$(1) (3x-1)(5x-7) = 15x^2 - 21x - 5x + 7 = 15x^2 - 26x + 7$$

$$(2) (x-1)(x^2 + x + 1) = x(x^2 + x + 1) - 1(x^2 + x + 1) \\ = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 \\ = x^3 - 1$$

注意：此部分若使用分離係數法時，要注意同類項要對齊而且缺項要記得補 0，否則容易出錯，另外和多項式加法相同，不需(也不能)進位，在這部份要讓學生不要和整數混淆，因此這部份多練習是很重要的。