Lecture 26

傳統的應用數學, 指的是將數學應用在物理方面. 其實這也是牛頓, 歐拉這些早期的人物所專注的問題. 這一類問題導引出來的數學問題大致上是微分方程的求解問題. 高斯導出的最小平方差方法, 在今天可以用來處理統計和經濟學上方面的問題. 但是當初他發明這套方法的目的是為了推測一個天文學上的現象. 基本上可以說, 二十世紀前的應用數學都在處理自然科學的問題. 在二十世紀的中段, 大致上就是二次大戰之後, 統計學與計算機科學的快速發展, 帶動了像數學規劃, 離散數學與圖論這些數學分支的發展. 進而也將數學的觸角伸入了社會科學的領域. 而電子計算機的應用, 自然產生了離散的, 數位化的新資料形態. 可以說, 數位化的聲音與影像, 是最近三十年才發生的. 針對這些新的資料形態產生了新的問題, 需要新的方法. 這一門新的學問, 統稱為訊號處理 (signal processing). 而這門科學的核心物件之一, 就是傅立葉*級數. 也就是說, 應用數學的領域, 從三百年前的物理力學, 漸漸地擴大, 到今天還包含了訊號處理.

所謂傅立葉級數 (Fourier series) 是指

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{1}$$

這樣的級數. 如果只取部分和, 則稱為三角多項式 (trigonometric polynomial). 其中 a_k, b_k 都是實數, 稱為傅立葉係數 (Fourier coefficients). 它首次出現於歐拉 (Euler) 的一個等式

$$\frac{x}{2}=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots,\quad x\in(-\pi,\pi).$$

但是數學史上並沒有以歐拉來命名這一類的級數. 這或許是因為傅立葉發現這類級數的原因具有比較深的數學影響.

由所謂的歐拉公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,$$

我們可以改寫

$$\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2},\quad \sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}.$$

所以, 傅立葉級數 (1) 又可以寫成

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

* Joseph Fourier (1768–1830) 是一位與拿破崙同期的法國人, 曾經是拿破崙的御用科學家, 隨軍遠征埃及, 並對古埃及文化的研究有所貢獻. 他所發掘的一件著名契形文字泥版, Rosetta stone, 在他被英國海軍俘虜的時候給沒收了, 現在展示於大英博物館. 他的穩定的科學家生活始於拿破崙被流放南大西洋的小島 (1814). 但是他在 1807 就已經提到過這一類的級數.

這時 x 是實數, 而 c_n 是複數.

泰勒級數和傅立葉級數都是把一個函數拆成無窮多項的方法. 這些無窮多項的低次項總是比較重要而高次項越來越小, 可能省略了也不會造成太大的誤差. 泰勒級數把函數分解成以某個點為中心的多項式, 傅立葉級數把函數分解成不同的頻率波段. 泰勒級數通常只在某個點的附近逼近函數, 傅立葉級數通常只在某個區間內平均地逼近函數. 泰勒級數的極限函數 (如果存在的話), 一定等於原函數, 傅立葉級數的極限函數, 不見得在每個點都等於原函數.

課本 10.6 傅立葉級數

從 (1) 式可以看出, 傅立葉級數必定是一個 2π 周期函數. 通常我們只看它在 $[-\pi, \pi]$ 之間的圖形. 如果我們所要處理的函數 $f(x)$ 不是個 2π 周期函數, 通常我們先決定要處理哪個區段, 比如說 $[a, b]$, 然後將之平移拉縮到 $[-\pi, \pi]$, 再將它周期化, 然後取其傅立葉係數. 求傅立葉係數的方法, 列在課本 637 頁. 所謂的周期化, 就是把函數在 $[-\pi, \pi]$ 的圖形, 分片抄到 $[-3\pi, -\pi]$, $[\pi, 3\pi]$, $\cdots$ 這些區間去. 也就是硬把它變成 2π 周期函數. 除非原函數 $f(a) = f(b)$, 否則被周期化之後的函數是不連續的.

例如, 令

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - |x| & \text{if } |x| < \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad x \in [-\pi, \pi], \tag{2}$$

然後拓展 $f(x)$ 成 2π 週期函數. 可見 $f(x)$ 是一個偶函數, 所以 b_n 都是零. 計算 $a_0 = \frac{1}{32\pi}$, a_1 到 a_{16} 的值分別如下

0.0099	0.0097	0.0095	0.0091	0.0087	0.0082	0.0077	0.0070
0.0064	0.0057	0.0051	0.0044	0.0038	0.0031	0.0026	0.0021

此部分和的圖形顯示在圖五十五.

也請參照課本上範例 1 與範例 2 的圖形. 注意在不連續點的旁邊, 傅立葉多項式的圖形會有個似乎固定高度的突起.

當 n 小的時候, 我們稱 a_n 和 b_n 為低頻係數; 當 n 大的時候, 我們稱 a_n 和 b_n 為高頻係數. 從上面的例子裡, 我們看到, 低頻係數 (的絕對值) 比較大, 而高頻係數比較小. 其實這是個一般性的現象: 任何函數 (通常考慮做一筆訊號), 其低頻部分是比較重要的, 而高頻部分的振幅很小.* 這個"高頻係數很小"的現象, 可以從圖形上觀察. 假想一個 2π 周期函數 $f(x)$,

* (1) 而且, 所謂的雜訊通常出現在高頻部分. (2) 我們也可以這樣理解: 造成高頻所需要的能量比較大, 如果一共只有有限多的能量, 當然能量會集中在低頻的部分.

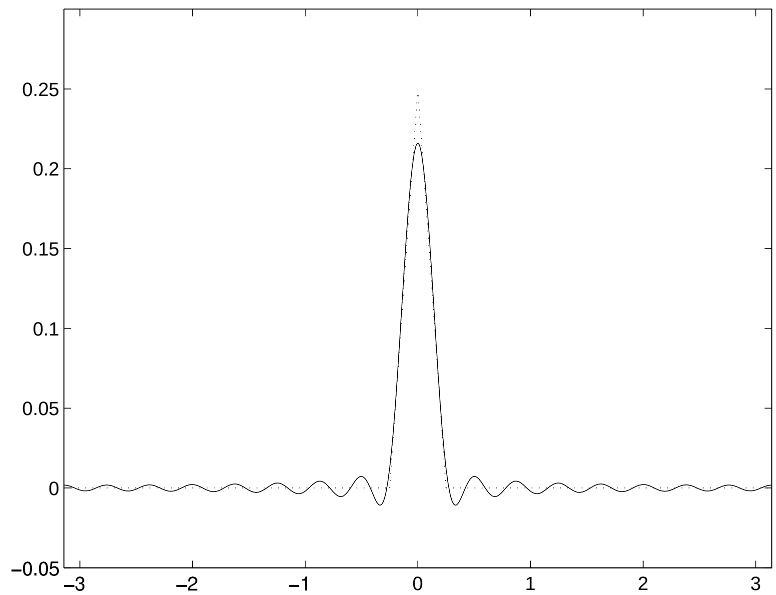

Fig 55

在 $[-\pi, \pi]$ 中, 其圖形如下:

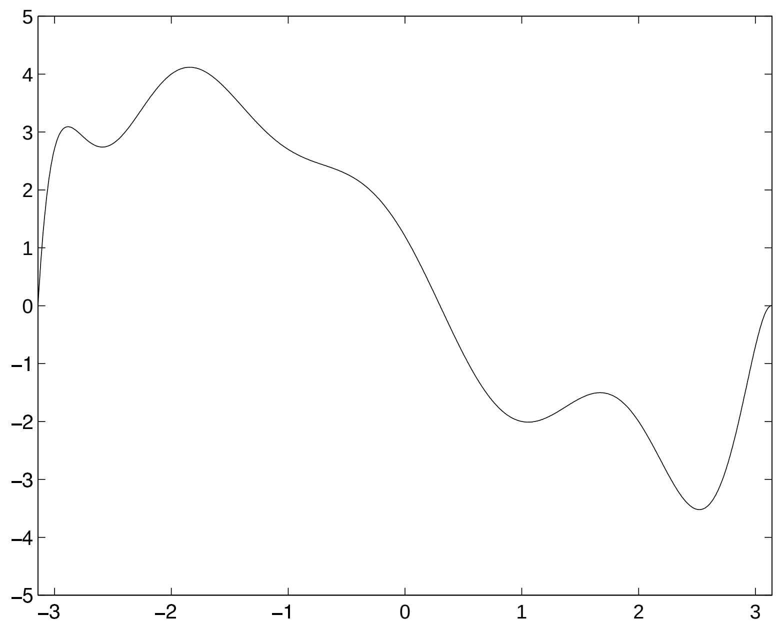

Fig 56

圖五十七和五十八分別是 $f(x)\sin x$ 和 $f(x)\sin 20x$ 的圖形.

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx$ 是左圖中 y 軸上方的面積減去下方的面積, 其定積分值大約是 -2.5203. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 20x\,dx$ 則是右圖中 y 軸上方的面積減去下方的面積, 由圖可見上下部份幾乎互相消去, 所以應該很小; 其定積分值大約是 0.0516.

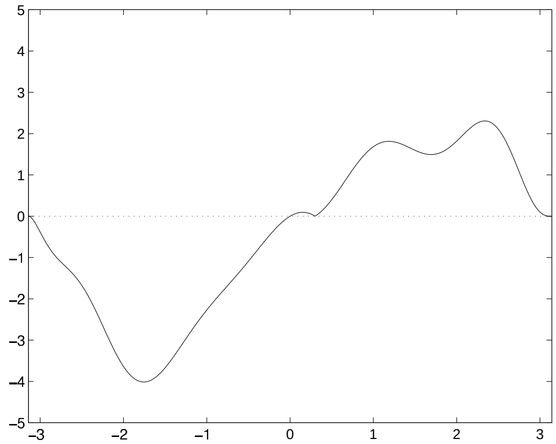

Fig 57

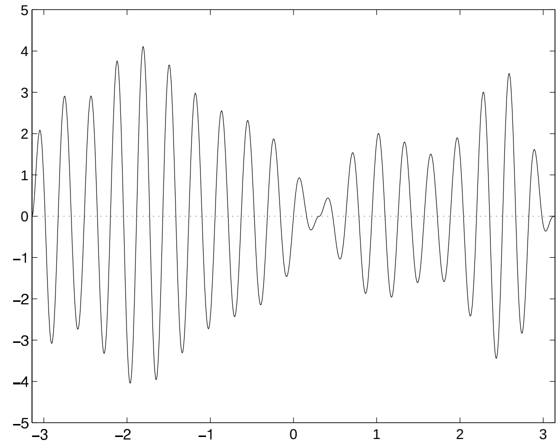

Fig 58

以一張人像近照為例, 能夠從五官外形認出那個人是誰, 屬於低頻部分. 要數數他眼角有幾絲魚尾紋, 頭上有幾莖白髮, 屬於高頻部分. 必須要比較高的能量 (比較貴的照相機, 比較貴的沖洗程序), 才能顯現這些高頻. 而即使沒有這些高頻, 也並不影響我們辨識這張照片.

一個 2π 周期函數的能量, 和它分別在各頻率波段的能量, 定義在課本的 641 頁. 所謂頻譜分析就是檢視一個函數在各頻率波段的能量. 我們看到, 高頻的能量總是漸減到零, 否則原函數必具有無窮的能量 (但是, 我們認為自然界中應該沒有無窮能量的訊號). 課本中表演了如何用頻譜分析來分辨豎笛和小喇叭的音色.

傅立葉級數如何收斂, 可以說是十九世紀的最主要數學問題之一. 它也是帶動了數學分析的發展的火車頭之一. 我們只說一種簡單的狀況.

> 如果 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 中連續, 而且 $f'(x)$ 也在 $(-\pi, \pi)$ 中連續, 則其傅立葉級數收斂, 而且極限函數在 $(-\pi, \pi)$ 中等於原函數.

習題 26

26.1 課本 **10.6** 習題 1–4.

26.2 課本 **10.6** 習題 6, 7.

26.3 課本 **10.6** 習題 19.

26.4 課本 **10.6** 習題 25, 27.