關於如何將直線上的凌波函數與凌波轉換擴展到平面上, 我們有幾種不同的方法或模式. 在此我們只介紹最常見的一種模式: 直積模式 (Cartesian product). 令雙變數的自格函數為

$$\phi(x,y) = \phi(x)\phi(y).$$

其中 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 分別是某個 (一樣的) 直線上的自格函數. 例如我們若取 $\phi(x)$ 為 $p=1$ 的 Daubechies 自格函數. 則對應的 $\phi(x,y) = \chi_{[0,1]^2}$. 現在, 令其平移與脹縮為

$$\phi_{j,k,\ell}(x,y) = 2^j \phi(2^j x - k)\phi(2^j y - \ell).$$

則自格等式就可寫成

$$\phi(x,y) = \sum_k c_k \phi(2x-k) \sum_\ell c_\ell \phi(2y-\ell) = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell} c_k c_\ell \phi_{1,k,\ell}(x,y).$$

如此, 可以證明 $\phi_{j,k,\ell}(x,y)$, $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$, 形成一個正則集合. 假設它們展成一個 $V_j(x,y)$ 空間. 則可進一步證明 $V_j(x,y) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ 而且

$$\cdots \subset V_0(x,y) \subset V_1(x,y) \subset \cdots$$

形成 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的一組多層解析子空間. 另一種形式的寫法是

$$V_j(x,y) = V_j(x)V_j(y).$$

接著, 我們要知道 $V_{j+1}(x,y)$ 和 $V_j(x,y)$ 之間的直差. 這個空間是一定存在的, 問題是如何簡單地表達這個空間中的函數. 我們發現, 它可以寫成三個空間的直和:

$$V_j(x)W_j(y) \oplus W_j(x)V_j(y) \oplus W_j(x)W_j(y)$$

原因很明顯:

$$\begin{aligned}
V_{j+1}(x,y) &= V_{j+1}(x)V_{j+1}(y) \\
&= \left(V_j(x) \oplus W_j(x)\right) V_{j+1}(y) && (1)\\
&= V_j(x)V_{j+1}(y) \oplus W_j(x)V_{j+1}(y) && (2)\\
&= V_j(x)V_j(y) \oplus V_j(x)W_j(y) \oplus W_j(x)V_j(y) \oplus W_j(x)W_j(y) && (3)\\
&=: V_j(x,y) \oplus W_j(x,y).
\end{aligned}$$

不再像一維的凌波分解, W_j 是由一組函數 $\psi_{jk}(x)$ 所展成的; 二維的 $W_j(x,y)$ 由三組函數展成, * 分別是

$$\begin{aligned}
\psi^1_{jk\ell}(x,y) &:= \phi_{jk}(x)\psi_{j\ell}(y) \\
\psi^2_{jk\ell}(x,y) &:= \psi_{jk}(x)\phi_{j\ell}(y) \\
\psi^3_{jk\ell}(x,y) &:= \psi_{jk}(x)\psi_{j\ell}(y)
\end{aligned}$$

* 至少是在這個直積的模型之下如此.

圖一. Tiffany. $V_8(x,y)$.

由於 $\iint \phi(x,y)\,dx\,dy = \int \phi(x)\,dx \int \phi(y)\,dy$, 我們很輕易可以看出上述三組函數形成一個正則集合.

這一種二維模型的最大好處就是算法上的方便. 二維的離散凌波分解應用在影像訊號上. 假設我們的影像已經處於離散點值狀態, 則它們逐點的顏色或性質已經被寫成數字. 我們不必詳知這數字所代表的意義, 對我們而言, 這些數字組成一個矩陣

$$A = (a_{k\ell}).$$

而我們假想有那麼一個函數 $f(x,y)$, 它在某一個適當解析度空間 $V_j(x,y)$ 上的投影係數就是

$$(f(x,y), \phi_{jk\ell}(x,y)) = a_{k\ell}.$$

為了符號上的方便, 讓我們假設 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n = 2^J$, 而 A 的係數是某個 $f(x,y)$ 在 $V_J(x,y)$ 的投影係數. 至於 $f(x,y)$ 究竟是什麼, 它的函數值和 A 的元素有什麼關係, 在這裡已經不是重點. 但是以後我們會看到, 如果 J 夠大, 則 $f(x,y)$ 的值和相對應位置的 $a_{k\ell}$ 相差很小.

當我們作從 $V_J(x,y)$ 到 $V_{J-1}(x,y)$ 的凌波分解, 若按照上述的步驟來進行, 則 (1) 所代表的工作就是取 A 中的列向量 (row vectors) 逐一作分解, 分解後的結果就是 (2). 圖一是個 256×256, 256 色的灰階圖形; 假設它是某個函數在 $V_8(x,y)$ 上的投影係數. 圖二是它

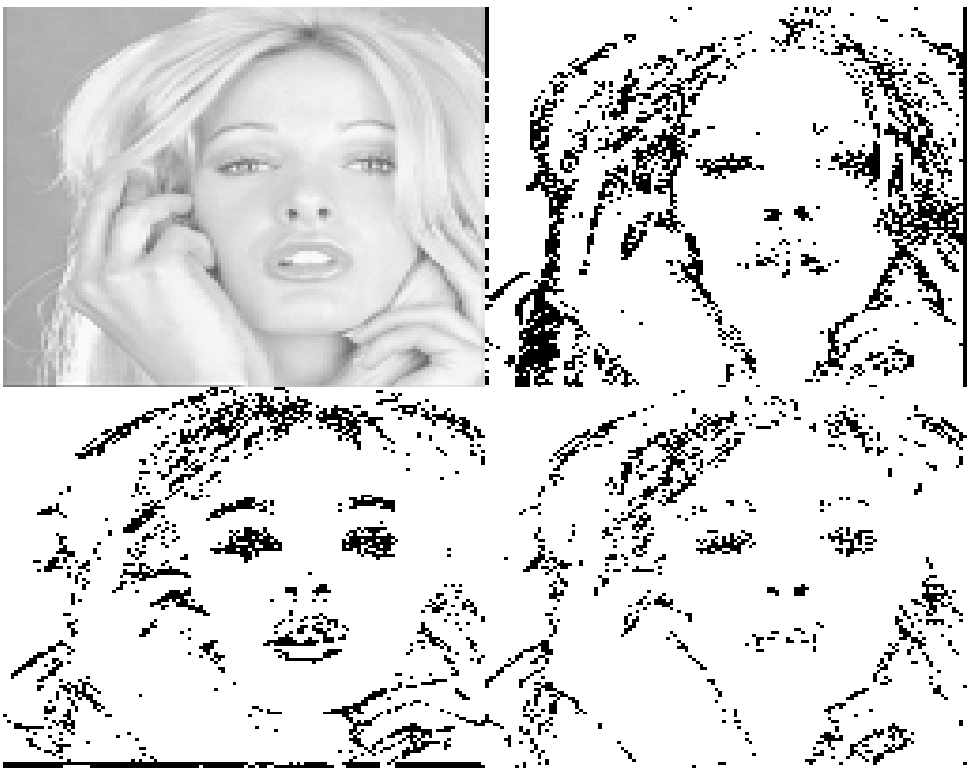
圖二. $V_7(x)V_8(y) \oplus W_7(x)V_8(y)$.

做到 (2) 的影像. 接著我們把圖二的每一個行向量 (column vector) 逐一作分解, 結果就是 (3). 如圖三. 這張圖很明顯的就有四個部份, 左上角是 $V_7(x,y)$, 其餘三塊就是 $W_y(x,y)$, 分別是右上角的 $W_7(x)V_7(y)$, 左下角的 $V_7(x)W_7(y)$, 右下角的 $W_7(x)W_7(y)$.

在圖二與圖三中類似描邊的部份是分別把 $W_7(x)V_8(y)$ 和 $W_7(x,y)$ 中絕對值大於 3 的數值突顯出來所畫成的黑白圖. 黑色部位表示有大的係數, 白色部份對應小的, 或許可以視作零的係數. 在圖二的 $W_7(x)V_8(y)$ 部份, 有 7056 個黑點. 到了圖三, 同樣的右半部份, 只有 4264 個黑點. 這是因為在圖二中, 只有 x 方向經過分解, y 方向的同質性還沒有被分辨出來. 圖三中整個 $W_7(x,y)$ 部份共有 49152 個點值, 其中有 6319 個黑點.

注意圖三中 $W_7(x,y)$ 部份靠邊的黑框, 這是由於週期化所造成的不連續函數值所產生的. 比對圖三的右上部份和左下部份. 觀察圖一的眉毛部位, 在 x 方向很少變化, 所以造成在這個部位的 $W_7(x)$ 很小, 因此在右上圖看不到眉毛的影像; 相對的, 在左下圖就看得很清楚. 而 Tiffany 的右手背和臉頰附近, 則是相反的情形: 主要的變化在 x 方向而非 y 方向, 所以在右上圖留下較多的高頻係數.

如果我們把圖三的 $W_7(x,y)$ 中白色部份的點值全設成 0, 再把所有點值換成四捨五入的整數近似值, 以 Matlab 的 `MAT` 格式儲存到磁碟機上. 則原來的影像佔 65563 bytes, 經過同質化的影像佔 131096 bytes. 這是因為前者的數值全是正整數, 後者則包括負整數. 我們拿公用的 `GNU zip` 程式來壓縮這兩個數據檔. 則原影像被壓成 46596 bytes, 經過同質化的影像被壓成 27211 bytes. 若我們把這個同質化的影像還原, 則它和原圖的 ℓ^2 相對誤差大約是 0.1%. 這個還原的圖印在圖四.



圖三. $V_7(x,y) \oplus W_7(x,y)$.

圖四. Reconstructed $V_8(x,y)$.