我們試著用一種"多層解析度"的方式寫這份教材. 作者企圖把一個應用者最基本所須的材料, 放在最低層的解析度, 然後, 隨著解析層面的提高, 我們加入更多細節. 所有的背景數學, 在需要的時候才介紹. 所有的數學細節, 分別出現在較高解析度的層面. 如果作者認為其所屬的解析層面高過這份教材的最高解析度, 或是根本就高過作者本身的最高解析能力, 它就被濾掉了.

一個寫成以下這種形式的等式

$$f(x) = \sum_k c_k f(2x-k), \quad c_k \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z} \tag{SL}$$

稱作 scaling equation. 這裡 $\mathbb{R}$ 代表實數所成的集合, $\mathbb{Z}$ 代表整數所成的集合. 如果 $c_k \in \mathbb{R}$ 是一組係數, 使得 (SL) 有解; 意即, 存在某個函數 $f(x)$ 符合 (SL). 那麼稱 $\{c_k\}$ 是一組 scaling coefficients, 而 $f(x)$ 是一個 scaling function.

由於 $f(2x)$ 的"寬度"是 $f(x)$ 的一半, $f(2x-k)$ 是 $f(2x)$ 作整數單位的平移. 可見一個 scaling function 可以由它自己的縮窄和平移把它自己拼湊出來. 因此, 我們建議將它稱為"自格函數." 所以 $\{c_k\}$ 是一組"自格係數," (SL) 是一個"自格等式."

最簡單的一組自格函數就是基本樣條函數 (B-splines). 讓我們取整數節點的零階和一階基本樣條為例. 定零階基本樣條 $B^0(x)$ 是

$$B^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in [0,1), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

一階基本樣條 $B^1(x)$ 是

$$B^1(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \in [0,1), \\ 1-x & \text{for } x \in [1,2), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那麼 $B^0(x)$ 和 $B^1(x)$ 分別符合

$$\begin{aligned} B^0(x) &= B^0(2x) + B^0(2x-1) \\ B^1(x) &= \frac{1}{2}B^1(2x) + B^1(2x-1) + \frac{1}{2}B^1(2x-2). \end{aligned}$$

回憶線性代數的課程中, 我們定義了線性空間 (linear space), 有些地方又稱向量空間 (vector space). 在這種空間上, 我們探討所謂線性相關或無關, 基底, 維度, 表示法, 等等課題.

什麼是線性空間? 它是兩個集合 V, F 和一個運算結合的一種代數結構. 其中 F 是一個(代數)體 (field), 稱為純量, 就說是 $\mathbb{R}$ 吧, 有時候我們也用 $\mathbb{C}$, 複數所成的集合; 其中 V 是一個交換群 (commutitive group), 它的(群)運算, 稱為向量加法, 寫作 $+$; 再加上一種運算, 稱為純量乘法, 使得 V 和 F 發生了關係. 此純量乘法必須符合以下條件:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{a}) \quad 1\mathbf{u} = \mathbf{u} \\
&(\mathrm{b}) \quad (\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}) \\
&(\mathrm{c}) \quad \alpha(\mathbf{u} + bv) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v} \\
&(\mathrm{d}) \quad (\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}
\end{aligned}$$

其中 $\alpha, \beta \in F$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, 1 是 F 的乘法單位向量. 這時侯我們說 V 是一個在 F 上的線性空間, 常常就簡單的說 V 是一個線性空間.

我們所熟悉的線性空間有 $\mathbb{R}^n$ (特別是 $n = 2$), 階數 $\leq n$ 的實係數多項式是 $\mathbb{R}$ 上的線性空間, 複數 $\mathbb{C}$ 本身是一個(代數)體, 但也可以看成是一個在 $\mathbb{R}$ 上的線性空間. 可能比較不熟悉的是, 所有從 X 到 F 的函數集合也是一個線性空間; X 是隨便一個非空集合.

就令 $F = \mathbb{R}$ 而 V 是單變函數 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 所成的集合. 定義向量加法為我們熟知的函數加法:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

很容易看到 $(V, +)$ 形成一個交換群. 再定義

$$(cf)(x) = c\, f(x), \quad c \in \mathbb{R},$$

檢查以上條件, 可見 V 可以是一個線性空間.

單純的一個線性空間有代數結構而未必有幾何結構: 例如長度, 夾角, 等等. 我們經常拿來作例子的線性空間, 如平面 $\mathbb{R}^2$, 甚至 $\mathbb{R}^n$, 其實都有比基本的線性空間更豐富的結構, 使得我們可以定義長度, 內積 (inner product), 垂直, 等等. 有了長度, 我們才能說距離, 也才能夠探討所謂最佳估計之類的問題. 有了內積就更好, 從內積我們可以定義長度 (反之未必), 還可以定義角度: 特別是, 垂直. 在這種結構之下, 最短距離通常意味著某種垂直的情形.

一組彼此垂直的非零向量, 自然是線性無關. 這樣的一組向量集合稱為正交 (orthogonal) 向量. 把它們分別乘上某係數, 可以使各向量的長度均是一. 這樣的一組向量集合稱為正則 (orthonormal) 向量. 一組由正則向量所形成的基底, 稱為正則基底. 唯有在正則基底 $\{\mathbf{v}_\star\}$ 之下, 任一 $\mathbf{u} \in V$ 可以直接寫成各分量的分解及結合:

$$\mathbf{u} = \sum_{i \in \mathcal{I}} (\mathbf{u}, \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i .$$

這裡 $(\cdot, \cdot)$ 代表內積. 當我說"正則基底"的時候, 就已經假設某種意義的內積是存在的.

何以要將一個向量分解? 籠統的說, 一個向量可以想像成代表一筆資訊, 它本身可能混雜了許多種不同的資訊, 使其本質不容易被認清. 而一組適當選取的基底, 可能在各個方向上分別代表不同的資訊或意義. 藉著各個基底上的分量, 我們或許比較容易掌握一筆資訊的真實訊息. 何以要再結合? 分解後的資訊, 可能展現某種同質性, 或是我們可能發現某些分量是不必要的. 於是, 在經過某種過濾的步驟之後, 重新結合的訊號可能在本質上與原訊號無異, 但是在其它意義上變得更好. 這一堂課的內容, 希望能部分解答以上的兩個問題.

在那些由函數所集合成的線性空間上, 以上的幾何結構當然也是我們所樂見的.