如果 $\phi(x) = B^0(x)$, 很簡單可知

$$(\phi(x), \phi(x-k)) = \delta_{0k}.$$

也就是, $\{\phi(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 形成一組正則集合. 但是它們並不是 $L^2(\mathbb{R})$ 的基底, 因為數量不夠. 很明顯, 若令

$$V_0 = \text{span}\{\phi(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

則 V_0 中只有在整數之間是常數的函數, 不足以形成整個 $L^2(\mathbb{R})$.

現在, 令

$$\phi_{jk} = \sqrt{2^j}\phi(2^j x - k),$$

則 $\{\phi_{jk} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 也是一組正則集合. 令

$$V_j = \text{span}\{\phi_{jk} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

可以想像 V_1 的維度比 V_0 多了一倍, 每個基底函數的"寬度"縮短了一倍, 而 V_1 的"解析度"也就提高了一倍. 又由於 $\phi(x)$ 是個自格函數, 所以

$$\cdots \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots$$

那麼當 $j \to \infty$, V_j 會是個怎樣的函數空間呢? 它將還是個 $L^2(\mathbb{R})$ 的子集合. 在實變函數論裡, 我們知道任何一個 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 都可以用分片常數函數來逼近. 用數學語句說, 就是任給 $\epsilon > 0$, 存在某個 $f_j(x) \in V_j$,

$$\|f - f_j\|_2 < \epsilon.$$

這裡的"長度" $\|\cdot\|_2$ 是由 $L^2(\mathbb{R})$ 的內積所衍生的

$$\|f\|_2^2 = (f, f).$$

這個定義對應於平面幾何上我們所知的向量內積以及歐基里德長度.

上面的定理, 換句話說就是, 在每一個 $L^2(\mathbb{R})$ 的元素的附近, 不論這個"附近"的範圍有多小, 都有一個 V_j 中的元素在這附近, 只要 j 足夠大. 這種情形, 我們說 $\lim_{j\to\infty} V_j$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中綢密 (dense). 就像有理數在實數中綢密. 於是, 當 $j \to \infty$ 時, V_j 的基底, 在線性代數的意義下, 就可以成為一組 $L^2(\mathbb{R})$ 的正則基底. 但是, 我們實際上永遠無法達到 $j = \infty$ 的地步, 所以我們並不能實際上使用這一套基底. 但是, 從它衍生出來的凌波函數, 將可以成為一組 $L^2(\mathbb{R})$ 的正則基底.

一般的 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 將不會在 V_0 裡面. 我們想像 f 有個無窮的解析度. 什麼是 f 在 V_0 這個解析度之下的表相呢? 想像一個視覺只能局限在 V_0 裡的生物, 它所看到的 f 是什麼樣

子? 假設視覺能自我調適到最好的接收狀況, 那麼它所看到的應該是 f 在 V_0 裡的一個"最佳逼近." 意即某個 $f_0 \in V_0$,

$$\|f - f_0\|_2 \le \|f - \chi\|_2, \quad \forall \chi \in V_0.$$

從這個定義已經可以推論 f_j 是惟一的. 如何求得 f_j? 類似於平面幾何上求線外一點到直線的最短距離, 我們從那一點作垂直投影. 現在我們從 f 向 V_0 作垂直投影. 這個投影點就是 f_0; 根據垂直投影的定義,

$$(f_0 - f, \chi) = 0, \quad \forall \chi \in V_0.$$

也就是

$$(f, \chi) = (f_0, \chi) \quad \forall \chi \in V_0.$$

這個等式的意義可以想像作, 對一個視覺局限於 V_0 中的生物而言, f_0 和 f 並無不同. 一個內積 (f, χ) 可以想像是用 χ 的角度去看 f. 或是, 用 χ 去測試 f 和 f_0 有無不同; 在某一類數值方法中 (Galerkin methods), χ 就叫作測試函數 (test functions). 既然用盡了所有 V_0 中的角度, 或是所有 V_0 能作的測試, 都無法分辨 f 和 f_0 的不同, 那麼它們在 V_0 中又有什麼分別?

令 f_j 是 f 在 V_0 上的垂直投影. 根據上面的綢密性,

$$\lim_{j \to \infty} \|f - f_j\|_2 = 0.$$

當 $\phi(x) = B^0(x)$, 很容易取得 f_j. 單看區間 $[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})$ 之中, $f_j = v_{jk}\sqrt{2^j}$. 求 v_{jk} 使

$$\|f - f_0\|_2 = \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} (f - v_{jk}\sqrt{2^j})^2 \, dx$$

的值最小. 對 v_{jk} 求一次導函數, 得到

$$v_{jk} = \sqrt{2^j} \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} f(x) \, dx.$$

在區間 $[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})$ 之中, f_{j+1} 有兩片常數, 左半是

$$2^{j+1} \int_{\frac{2k}{2^{j+1}}}^{\frac{2k+1}{2^{j+1}}},$$

右半是

$$2^{j+1} \int_{\frac{2k+1}{2^{j+1}}}^{\frac{2k+2}{2^{j+1}}}.$$

先不管這兩個函數的涵蓋區間, 這兩個數的平均值是

$$2^j \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} f(x)\,dx.$$

所以, 在這個區間裡,

$$f_{j+1} = f_j + w_{jk}\sqrt{2^j} \begin{cases} 1 & \text{for } x \in [\frac{2k}{2^{j+1}}, \frac{2k+1}{2^{j+1}}), \\ -1 & \text{for } x \in [\frac{2k+1}{2^{j+1}}, \frac{2k+2}{2^{j+1}}). \end{cases}$$

現在, 我們令

$$\psi(x) = \sqrt{2^j} \begin{cases} 1 & \text{for } x \in [0, \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{for } x \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

類似 ϕ_{jk}, 定義

$$\psi_{jk}(x) = \sqrt{2^j}\psi(2^j x - k),$$

也很容易可以證明 $\{\psi_{jk} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 是個正則集合. 令

$$W_j = \text{span}\{\psi_{jk} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

上面的分解, 正表示 V_{j+1} 可以分解成 V_j 和 W_j 兩部份. 用線性代數的語句, 那就是

$$V_{j+1} = V_j + W_j.$$