從 $\phi(x) = B^0(x)$ 導出來

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1).$$

它的脹縮和平移 (dilation and translation) $\{\psi_{jk}(x)\}$, $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$, 形成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一組正則基底. 這個 $\psi(x)$, 法國人命名為 *ondelette*, 英文就直譯成 *wavelet*, 就是"小波" 的意思. 因為

$$\int \psi(x)\,dx = 0,$$

所以它的圖形一定上下起伏, 如波狀; 又因為

$$\int \psi(x)^2\,dx = \|\psi\|_2^2 = 1,$$

所以當 $|x|$ 很大的時候 $|\psi(x)|$ 必然要很小, (其實, 為了實用, 我們根本就希望 $\psi(x)$ 的涵蓋是個有限長的區間) 它的圖形看起來就像一個小小的波浪.

但是, 有些人 (包括作者本人) 也許會覺得直譯成"小波" 有點不好聽. 近代中國的科學名詞多半是譯自西方, 有些經過細想的譯名, 既合中國語言習慣, 又能表達原文的含義. 例如 differentiation 翻作微分, integration 翻作積分, 而 calculus 卻合作微積分; 又如 conjugate 翻作共軛, fractal 翻作碎形. 我提議將 wavelet 翻作"凌波." 根據台灣三民書局在 1989 重新編輯的辭典, "凌" 有八個意義, 其中: (4) 雜亂, 交錯; 例如"凌亂." (6) 迫近, 接近; 例如"凌晨." 這兩個意義很接近 wavelets 的圖形及應用. 而且"凌波" 也是個古典的形容詞. 這本辭典列了兩個意義: (1) 起伏的波濤, (2) 形容輕盈的步履.

讓我們回顧這一組 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的好性質. 從一個在 $L^2(\mathbb{R})$ 裡的自格函數

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1),$$

我們造出一群 $\phi_{jk}(x) = \sqrt{2^j}\phi(2^j x - k)$, 在每一層 j 上面, $\{\phi_{jk}(x)\}$ 形成 V_j 的正則基底, 而且

$$\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots,$$

$$\cap V_j = 0, \qquad \cup V_j \text{ 綢密於 } L^2(\mathbb{R}).$$

$\{V_j\}$ 稱作 $L^2(\mathbb{R})$ 的一組多重解分析, 而 $\phi(x)$ 是其生成元. 一個 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ 在每一個 V_j 中有唯一的正交投影

$$(P_j f, \chi) = (f, \chi), \quad \forall \chi \in V_j.$$

$P_j f$ 是 f 在第 j 層解析度的最佳逼近, 而且 $\lim_{j\to\infty} P_j f = f$. $P_{j-1} f$ 是 $P_j f$ 的低解析度投影, 這連續兩層解析度之間有一個正交差集 $W_{j-1} \subset V_j$,

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}.$$

好的是這一層一層之間的正交差集全部都可以由另一個函數 $\psi(x)$ 的脹縮和平移所展成, 令這個 $\psi(x) \in V_1$:

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1).$$

那麼 $\{\psi_{jk}(x) = \sqrt{2^j}\psi(2^j x - k)\}$ 形成 W_j 的一組正則基底. 因為 $W_j \perp V_j$, 所以

$$W_j \perp W_\ell, \quad \text{if } j \neq \ell.$$

換句話說,

$$\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j = L^2(\mathbb{R}),$$

所以

$$\{\psi_{jk}(x) \mid (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}$$

就是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一組正則基底. 這裡所說的基底, 可以比線性代數的基底意義更進一步; 也就是, 可以允許無窮和的情形 (infinite series):

$$f = \sum_{j,k} (f, \psi_{jk})\psi_{jk}(x).$$

它的意義是

$$\lim_{N,M\to\infty} \|f(x) - \sum_{j=-N}^{N} \sum_{k=-M}^{M} (f, \psi_{jk})\psi_{jk}(x)\|_2 = 0.$$

正則基底是一種無條件基底 (unconditional basis), 就是說上面那個無窮和可以任意重排其編號而仍然收斂到同一個極限.

前面說 $P_j f$ 是 f 在第 j 層解析度的最佳逼近. 到底這個逼近有多"好"呢? 在數學上, 我們不關心對一個個特定的例子來討論 $P_j f$ 和 f 的誤差; 因為這個誤差與 $f(x)$ 本身的性質 (例如平滑的程度) 有關. 我們要討論的是, 如果 $f(x)$ 本身有某種程度的平滑, 那麼這個逼近的誤差率如何? 在這裡的意思是, 如果提高一層解析度, 新的逼近會"更近"多少? 所謂"誤差," 也有不同測量的方式. 現在我們討論在每個點 $x \in \text{supp} f$ 上, $|f(x) - P_j f(x)|$ 與 j 的關係.

一個連續函數 $f(x)$ 和某個定數 $0 < \alpha \leq 1$, 如果符合

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \exists C > 0,$$

則 $f(x)$ 稱作是 α 階 Hölder 連續; 或 $f(x)$ 是 Hölder 連續, 其冪度為 α. 計作 $f(x) \in C^{0,\alpha}$. 這個定義是把所有連續而不可微的函數作更細的分類. 連續冪度比較低的函數, 可以想像是鋸齒狀比較嚴重, 而距離一次可微比較"遠"的函數. $C^{0,1}$ 就是 Lipschitz 連續族, 這種函數

只有在"少數"點上不可微, 所以是"幾乎"可微的函數. 注意, 我們不必考慮 $\alpha > 1$ 的情形, 因為這代表 $f'(y) = 0$, 也就是 $f(x) = c$.

由於 $\psi(x) \perp V_0$, 所以 $\psi(x)$ 垂直於任何常數函數. 因此, 如果 $f(x)$ 是 α 階 Hölder 連續,

$$\begin{aligned}
|(f(x), \psi_{jk}(x))| &= \sqrt{2^j} \left| \int f(x)\psi(2^j x - k)\, dx \right| \\
&= \sqrt{2^j} \left| \int (f(x) - f(\frac{k}{2^j}))\psi(2^j x - k)\, dx \right| \\
&\le \sqrt{2^j} \int |f(x) - f(\frac{k}{2^j})|\, |\psi(2^j x - k)|\, dx \\
&\le \sqrt{2^j} C \int |x - \frac{k}{2^j}|^\alpha |\psi(2^j x - k)|\, dx \\
&= \frac{C}{\sqrt{2^j}} \int |\frac{x}{2^j}|^\alpha |\psi(x)|\, dx \\
&= C 2^{-(\alpha+\frac{1}{2})j} \int |x^\alpha \psi(x)|\, dx. \\
&= O(2^{-(\alpha+\frac{1}{2})j}).
\end{aligned}$$

我們看到 $f(x)$ 在 W_j 裡的分量都很小.

對每一個 x 和 j, 只有一個 ψ_{jk} 涵蓋了 x (如果 x 恰好在兩個 ψ_{jk} 的邊界點上, 就任選一個). 所以

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_J f(x)| &= |\sum_{j=J+1}^{\infty} (f, \psi_{j\star})\psi_{j\star}(x)| \\
&\le C \sum_{j=J+1}^{\infty} 2^{-(\alpha+\frac{1}{2})j} \\
&= C 2^{-(\alpha+\frac{1}{2})J}.
\end{aligned}$$

因此我們看到 $|f(x) - P_j f(x)|$ 大約是 2^{-j}. 這個數其實就是 $\mathrm{supp}\psi_{jk}(x)$ 的寬度, 如果像很多數值分析中的處理方式一樣, 把它想作是節點距 h, 那麼 $|f(x) - P_j f(x)| = O(h)$. 我們稱 $P_j f$ 對 $f(x)$ 的逼近是"一階"逼近.

其實這是逼近論的一個一般現像. 如果在寬度 h 的區間上取 $n+1$ 個不同點 $x_0, \ldots, x_n$, 通過 $(x_i, f(x_i))$ 作 (惟一的) n 階內差多項式 $p(x)$. 再加上如果 $f(x)$ 在這段區間內是 $n+1$ 次連續可微 (亦即 $f(x)$ 足夠平滑), 那麼誤差是

$$|f(x) - p(x)| \le C h^{n+1} \max_{\xi} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

證明由 Taylor 展開得來.