我們要一個自格函數 $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, 符合

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x - k)$$

問題的根源在於, 能否找到一組合適的係數 c_k. 現在, 我們從所希望的 $\phi(x)$ 的特性中, 找到一些 c_k 的必要條件.

首先, 我們希望 $\phi(x)$ 的涵蓋是個有限區間. 我們可以平移這個函數, 故假設 $\mathrm{supp}\phi(x) = [0, A]$. 那麼

$$\mathrm{supp}\phi(2x - k) = [\frac{k}{2}, \frac{k + A}{2}].$$

由此可見, 我們實無必要假設一個無窮長的數列 $\{c_k\}$ 作為自格係數. 假設只有當 $M \leq k \leq N$ 時, $c_k \neq 0$. 所以

$$\phi(x) = \sum_{k=M}^{N} c_k \phi(2x - k).$$

又因為要

$$\frac{M}{2} = 0, \quad \frac{N + A}{2} = A,$$

所以可以令 $M = 0$ 而且 $A = N$. 也就是說, $\mathrm{supp}\phi(x)$ 的長度一定是個整數.

如果 $\int \phi(x)\, dx = 0$, 那代表 $\phi(x)$ 垂直於常數函數. 所以, $1 \notin V_0$. 其實可以經過變數變換, 得到 $1 \notin V_j, \forall j \in \mathbb{Z}$. 但是, 在我們的意念上, 我們將 V_j 看成是一個 L^2 函數的低解析度投影. 任何

$$\chi_{[a,b]} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [a, b], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

都是個 L^2 函數. 但如果 $\int \phi(x)\, dx = 0$, $\chi_{[a,b]}$ 將不存在於任何 V_j. 所以 $\{V_j\}$ 不可能組成一個我們想要的 $L^2(\mathbb{R})$ 的多層解分析. 因此, 我們要求 $\int \phi(x)\, dx \neq 0$. 既然如此, 我們可以將 $\phi(x)$ 乘上適當的常數, 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, dx = \int_0^N \phi(x)\, dx = 1.$$

(以後會證明, 我們所要的 $\phi(x)$ 必須符合 $\int \phi\, dx = 1$.)

由於

$$\begin{aligned} \int \phi(x)\, dx &= \sum_{k=0}^{N} c_k \int \phi(2x - k)\, dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} c_k \int \phi(x)\, dx. \end{aligned}$$

這裡 $\int$ 就是 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 的簡化符號. 故得

$$\sum_k c_k = 2. \tag{1}$$

為了方便, 我們仍假設 $\{c_k\}$ 是個無窮長的數列, 只是 $c_k = 0$, 除非 $0 \le k \le N$.

假設 $\{\phi(x-k)\}$ 是個正則集合. 如此, 則 $\int \phi(x)\phi(x-k)\,dx = \delta_{0k}$. 但是

$$\begin{aligned}\int \phi(x)\phi(x-k)\,dx &= \sum_\ell \sum_m c_\ell c_m \int \phi(2x-\ell)\phi(2x-(2k+m))\,dx \\ &= \frac{1}{2}\sum_\ell \sum_m c_\ell c_m \int \phi(x)\phi(x-(2k+m-\ell)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\sum_m c_{2\,k+m} c_m .\end{aligned}$$

所以,

$$\sum_{k=0}^{N} c_k c_{k+2\,m} = 2\delta_{0m}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

如果 N 是個偶數, 則可在 (2) 中取 $2m = N$. 得到 $c_0 c_N = 0$. 也就是, c_0 或 $c_N = 0$. 不論何者, 我們都可以把係數的個數減一. 換句話說, 我們不須要考慮 N 是偶數的情形. 故可令 $N = 2p-1$, $p \ge 1$. 共有 $2p$ 個 (未知) 自格係數 c_k. 當 $p = 1$, $c_0 = c_1 = 1$, $\phi(x) = \chi_{[0,1]}$ 就是對應的自格函數.

接著, 我們要找 $\psi(x)$. 根據定義, $\mathrm{span}\{\psi(x-k)\} = W_0$, 而 $W_0 = V_1 \ominus V_0$. 也就是, W_0 是在 V_1 中正交於 $\phi(x-k)$ 的函數集合. 由於 $\{\phi(2x-k)\}$ 是 V_1 的基底, 而且

$$\phi^\perp(2x-k) := \phi(2x-k) - P_0\phi(2x-k)$$

都正交於 V_0, 所以

$$W_0 = \mathrm{span}\{\phi^\perp(2x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

現在, 我們先只看 $\phi^\perp(2x-\ell)$, $0 \le \ell \le 2p-1$.

$$P_0\phi(2x-\ell) = \frac{1}{2}\sum_k c_k(\phi(2x-\ell), \phi(x-k))\,\phi(x-k) = \frac{1}{2}\sum_k c_{\ell-2\,k}\phi(x-k).$$

讓我列出前面幾個例子:

$$\phi^\perp(2x) = \phi(2x) - \frac{1}{2}[c_{2p-2}\phi(x+p-1) + c_{2p-4}\phi(x+p-2) + \cdots + c_0\phi(x)]$$

$$\phi^\perp(2x-1) = \phi(2x-1) - \frac{1}{2}[c_{2p-1}\phi(x+p-1) + c_{2p-3}\phi(x+p-2) + \cdots + c_1\phi(x)]$$

$$\phi^\perp(2x-2) = \phi(2x-2) - \frac{1}{2}[c_{2p-2}\phi(x+p-2) + \cdots + c_2\phi(x-2) + c_0\phi(x-1)]$$

$$\phi^\perp(2x-3) = \phi(2x-3) - \frac{1}{2}[c_{2p-1}\phi(x+p-2) + \cdots + c_3\phi(x-2) + c_1\phi(x-1)]$$

所以

$$\begin{pmatrix} \phi^{\perp}(2x) \\ \phi^{\perp}(2x-1) \\ \phi^{\perp}(2x-2) \\ \phi^{\perp}(2x-3) \\ \vdots \\ \phi^{\perp}(2x-2p+4) \\ \phi^{\perp}(2x-2p+3) \\ \phi^{\perp}(2x-2p+2) \\ \phi^{\perp}(2x-2p+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(2x) \\ \phi(2x-1) \\ \phi(2x-2) \\ \phi(2x-3) \\ \vdots \\ \phi(2x-2p+4) \\ \phi(2x-2p+3) \\ \phi(2x-2p+2) \\ \phi(2x-2p+1) \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} c_{2p-2} & c_{2p-4} & c_{2p-6} & \cdots & c_0 & & & \\ c_{2p-1} & c_{2p-3} & c_{2p-5} & & c_1 & & & \\ & c_{2p-2} & c_{2p-4} & & c_2 & c_0 & & \\ & c_{2p-1} & c_{2p-3} & & c_3 & c_1 & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ & & & & c_{2p-4} & c_{2p-6} & & \\ & & & & c_{2p-3} & c_{2p-5} & & \\ & & & & c_{2p-2} & c_{2p-4} & & c_0 \\ & & & & c_{2p-1} & c_{2p-3} & \cdots & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(x+p-1) \\ \phi(x+p-2) \\ \phi(x+p-3) \\ \phi(x+p-4) \\ \vdots \\ \phi(x-p+4) \\ \phi(x-p+3) \\ \phi(x-p+2) \\ \phi(x-p+1) \end{pmatrix}$$

上面的矩陣維度是 $(2p) \times (2p-1)$. 我們發現, 如果將上式之左右各乘上

$$\begin{pmatrix} c_{2p-1} & -c_{2p-2} & c_{2p-3} & -c_{2p-4} & \cdots & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 \end{pmatrix}$$

則我們約去了等式右邊的第二項, 得到

$$\begin{aligned} & c_{2p-1}\phi^{\perp}(2x) - c_{2p-2}\phi^{\perp}(2x-1)\cdots + c_1\phi^{\perp}(2x-2p+2) - c_0\phi^{\perp}(2x-2p+1) \\ =& c_{2p-1}\phi(2x) - c_{2p-2}\phi(2x-1)\cdots + c_1\phi(2x-2p+2) - c_0\phi(2x-2p+1). \end{aligned}$$

令

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k c_{2p-1-k}\phi(2x-k),$$

則 $\psi(x) \in W_0$. 經過指數代換, 一般文獻中定

$$\psi(x) = \sum_{k=2-2p}^{1} (-1)^k c_{1-k}\phi(2x-k).$$

習題.