我們發現若

$$\psi(x) = \psi_1(x) = \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k c_{2p-1-k} \phi(2x-k),$$

則 $\psi(x) \perp V_0$. 一般文獻中定

$$\psi(x) = \psi_2(x) = \sum_{k=2-2p}^{1} (-1)^k c_{1-k} \phi(2x-k).$$

這兩個定義其實造成完全一樣的 $\psi(x)$, 兩者互為平移; $\psi_1(x)$ 的函蓋是 $[0, 2p-1]$, 與 $\phi(x)$ 相同, $\psi_2(x)$ 的函蓋是 $[1-p, p]$.

習題 **1**. 證明 $\{\psi(x-k)\}$ 是一個正則集合.

令 $W_0 = \operatorname{span}\{\psi(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, 則 $V_0 \perp W_0$ 而且 $V_0 \oplus W_0 \subset V_1$. 要證明反向的包含, 我們只須要知道

$$\phi(2x), \phi(2x-1) \in V_0 \oplus W_0.$$

令

$$\begin{aligned} \chi &= P_0\phi(2x) + Q_0\phi(2x) \\ &= \frac{1}{2}[\sum_k c_{-2k}\phi(x-k) + \sum_k c_{2p-1+2k}\psi(x-k)]. \end{aligned}$$

這裡我們選了 $\psi = \psi_1$ 的定義. 則 $\chi \in V_1$ 而且

$$\begin{aligned} (\chi, \phi(2x-\ell)) &= \frac{1}{2}\sum_k c_{-2k} \int \phi(x-k)\phi(2x-\ell)\,dx + c_{2p-1+2k} \int \psi(x-k)\phi(2x-\ell)\,dx \\ &= \frac{1}{2}[\sum_k c_{-2k}c_{\ell-2k} + \sum_k (-1)^\ell c_{2p-1+2k}c_{2p-1+2k-\ell}] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}[\sum_k c_{2k}c_{2k+\ell} - \sum_k c_{2k-1}c_{2(k-n)}] & \text{if } \ell = 2n-1, \\ \frac{1}{2}[\sum_k c_{2k}c_{2k+\ell} + \sum_k c_{2k-1}c_{2k-1+\ell}] & \text{if } \ell \text{ is even} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } \ell \text{ is odd}, \\ \frac{1}{2}\sum_k c_k c_{k+\ell} & \text{if } \ell \text{ is even} \end{cases} \end{aligned}$$

由於我們假設 $\sum_k c_k c_{k+2m} = 2\delta_{0m}$, 所以 $(\chi, \phi(2x-\ell)) = \delta_{0\ell}$. 也就是

$$(\chi, \phi(2x-\ell)) = (\phi(2x), \phi(2x-\ell)), \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}.$$

換句話說,

$$(\phi(2x) - \chi, v) = 0, \quad \forall v \in V_1.$$

因為 $\chi \in V_1$, 所以 $\phi(2x) = \chi = P_0\phi(2x) + Q_0\phi(2x)$.

習題 **2**. 證明 $\phi(2x-1) = P_0\phi(2x-1) + Q_0\phi(2x-1)$.

所以 $V_1 = V_0 \oplus W_0$. 而且 $\psi(x-k)$ 是 W_0 的一組正則基底.

現在定

$$\psi_{jk}(x) = \sqrt{2^j}\psi(2^j x - k).$$

經過簡單的變數變換, 我們可以證明 $\{\psi_{jk} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 是一個正則集合, 若令 $W_j = \text{span}\{\psi_{jk}\}$, 則

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1}.$$

由多層解析的關係,

$$\psi_{jk}(x) \perp V_\ell, \quad \forall \ell \le j.$$

於是

$$(\psi_{jk}, \psi_{\ell m}) = \delta_{j\ell}\delta_{km}.$$

也就是說, $\{\psi_{jk}(x)\}$ 形成一個 $L^2(\mathbb{R})$ 中的正則集合. 又因為

$$\{\psi_{\ell k}(x) \mid \ell < j, k \in \mathbb{Z}\}$$

是 V_j 的正則基底, 而 $\cup V_j$ 稠密於 $L^2(\mathbb{R})$, 這表示 $\{\psi_{jk}(x)\}$ 其實是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一組正則基底. 在這裡我們方寬了"基底"的意義, 允許無窮級數的基底表達方式:

$$f = \sum_{j,k} (f, \psi_{jk})\psi_{jk}(x),$$

其中數列 $(f, \psi_{jk}) \in \ell^2$; 也就是,

$$\sum_{j,k} (f, \psi_{jk})^2 < \infty.$$

以上這個級數可以任意重排而收斂到同一個結果, 例如排成

$$f = \lim_{J\to\infty} \lim_{K\to\infty} \sum_{j=-J}^{J} \sum_{k=-K}^{K} (f, \psi_{jk})\psi_{jk}(x).$$

這樣的基底叫作無條件基底 (unconditional basis). 正則基底必是無條件基底, 反之未必.

給定一個參數 $1 \le p \in \mathbb{Z}$, 對於未知的 $2p$ 個自格係數 $c_0, \cdots, c_{2p-1}$, 我們得到 $p+1$ 個必要條件

$$\sum_k c_k = 2$$

$$\sum_k c_k c_{k+2m} = 2\delta_{0m}, \quad 0 \le m \le p-1.$$

對於 $p=1$ 的特例, 這兩個條件 $c_0+c_1=2$, $c_0^2+c_1^2=2$ 只有一組解 $c_0=c_1=1$. 對應的自格等式

$$\phi(x)=\phi(2x)-\phi(2x-1)$$

有一個惟一的 $L^2(\mathbb{R})$ 的函數 $\phi(x)$, 符合這個等式而且 $\mathrm{supp}\phi(x)=[0,1]$, $\{\phi(x-k)\}$ 正則. 那就是 $\phi(x)=\chi_{[0,1]}$. 它所造成的 V_j 形成一組 $L^2(\mathbb{R})$ 的多層解分析, 這是因為一個古典的知識: 階梯涵數稠密於 $L^2(\mathbb{R})$. 那麼

$$\psi(x)=\phi(2x)-\phi(2x-1)$$

就是對應的凌波方程. 而且

$$\int \psi(x)\,dx=0.$$

我們已經看到過, $\int\psi(x)\,dx=0$ 是一個關鍵的性質 (對任何 p). 有了它, $\psi(x)$ 才有最基本的逼近能力; 或是說, $|(f,\psi_{jk})|$ 才會"比較快得"趨近於零:

$$|(f,\psi_{jk})|\le C2^{-(\alpha+\frac{1}{2})j},\quad \forall f\in C^{0,\alpha}.$$