現在我們選擇

$$\psi(x) = \sum_k (-1)^k c_{1-k} \phi(2x-k).$$

的定義方式. 已知從

$$\sum c_k = 2 \tag{1}$$

$$\sum c_k c_{k+2\,m} = 2\delta_{0m} \tag{2}$$

等 $p+1$ 個條件可以推得

$$\int \psi(x)\,dx = 0.$$

看看 $\int x\psi\,dx = 0$ 可以推得什麼 c_k 的必要條件?

$$\begin{aligned} 0 &= \int x\psi(x)\,dx \\ &= \sum_k (-1)^k c_{1-k} \int x\phi(2x-k)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\sum_k (-1)^k c_{1-k}\Big(k + M_1\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\sum_k (-1)^k k c_{1-k} + M_1 \sum_k (-1)^k c_{1-k}\Big). \end{aligned}$$

其中 M_1 是 $\phi(x)$ 的第一階動量 (first moment):

$$M_m = \int x^m \phi(x)\,dx$$

由於 $\sum_k (-1)^k c_{1-k} = 0$, 故得

$$\sum_k (-1)^k k c_{1-k} = 0.$$

現在, 假設當 $1 \le n \le m-1$ 時, $\int x^n \psi\,dx = 0$ 都可以推得 $\sum_k (-1)^k k^n c_{1-k} = 0$. 那麼

$$\begin{aligned} 0 &= \int x^m \psi(x)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\Big(\sum_{n=0}^{m-1} \binom{m}{n} M_{m-n} \sum_k (-1)^k k^n c_{1-k} + \sum_k (-1)^k k^m c_{1-k}\Big). \end{aligned}$$

由歸納法假設, 得知

$$\sum_k (-1)^k k^m c_{1-k} = 0.$$

因此, 我們可以利用剩下的 $p-1$ 個自由度, 要求

$$\int x^m \psi(x)\,dx = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, p-1.$$

它們導出 $p-1$ 個有關 c_k 的等式:

$$\sum_k (-1)^k k^m c_{1-k} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, p-1.$$

但是, 這相當於說

$$\sum_k (-1)^k (1-k)^m c_{1-k} = 0,$$

所以經過指標變換, 我們得到一組比較簡潔的

$$\sum_k (-1)^k k^m c_k = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, p-1. \tag{3}$$

讓我們接受這個事實: 由 (1,2,3) 組成的 $2p$ 個聯立等式有一組非零解. 用牛頓法求解時, $p = 1$ 的情形不必數值解; $p > 1$ 時我們用 $p-1$ 的解後加兩個零作初始猜想. $p = 1, \ldots, 14$ 的係數放在

`ftp://dongpo.math.ncu.edu.tw/pub/shann/wavelets/data/daub_hi`

注意幾件事情. (i) 若定義 $0^0 := 1$, 則一組自格係數符合

$$\sum_k (-1)^k k^m c_k = 0, \quad 0 \le m \le p-1.$$

(ii) 其實, 由 (3),

$$\sum_k (-1)^k (k+\ell)^m c_k = 0, \quad 0 \le m \le p-1, \ell \in \mathbb{Z}.$$

由 $\int x^m \psi\,dx = 0$ 可以推得

$$\int x^m \psi_{jk}(x)\,dx = 0, \quad 0 \le m \le p-1, (j,k) \in \mathbb{Z}^2.$$

這表示 $\mathcal{P}_m \perp W_j$; $\mathcal{P}_m$ 代表階數 $\le m$ 的多項式函數空間, 這是一個 $m+1$ 維的線性空間. 由於

$$V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots = L^2(\mathbb{R}),$$

可見 $\mathcal{P}_m$ 似乎應該在 V_0 裡面 (其實是每一個 V_j). 嚴格來說, 不是的, 因為 $\mathcal{P}_m$ 根本不在 $L^2(\mathbb{R})$. 但是, 在任何有限區間 $[a,b]$ 之內, $\mathcal{P}_m$ 可以被 V_0 中的函數展成. 另一個比較不嚴格的說法是: V_0 "富含" 足夠高階的多項式. 這個認識與我們比較熟知的現像相吻合; 那就是, 多項式的階數越高, 逼近的能力越強.

如果假設 $\sum$ 是在某一段有限區間中求和, 而且我們只取結果的內部一部分. 那麼

$$P_j x^m = x^m, \quad 0 \le m \le p-1.$$

特別看 $j=0$ 的情形,

$$x^m = \sum (x^m, \phi(x-k))\phi(x-k).$$

得到

$$\sum P(k)\phi(x-k) = x^m,$$

其中 $P(x) \in \mathcal{P}_m$.