在有限區間上, 我們用 Cauchy 不等式可以得到

$$L^2(a,b) \subset L^1(a,b).$$

但是, 在實數軸上的 $L^p(\mathbb{R})$ 空間就没有這種包含關係了; $L^1(\mathbb{R})$ 和 $L^2(\mathbb{R})$ 彼此互不包含. 考慮

$$f_1(x) = \begin{cases} x^{-2/3} & \text{if } x \in (0,1), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$
$$f_2(x) = \begin{cases} x^{-2/3} & \text{if } x \in (1,\infty), \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

則 $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$, $f_1 \notin L^2(\mathbb{R})$, 而 $f_2 \notin L^1(\mathbb{R})$, $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$.

但是, $L^1(\mathbb{R})$ 和 $L^2(\mathbb{R})$ "相差" 並不太多, $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 是綢密於 $L^2(\mathbb{R})$. 舉個簡單的例子, 只要是有界的 $L^1(\mathbb{R})$ 函數都在 $L^2(\mathbb{R})$. 這是因為, 如果 $|f(x)| \le M$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \le M \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx \le M \|f\|_{L^1}.$$

此後, 我們用 L^p 代表 $L^p(\mathbb{R})$, 而 $\int dx$ 總是代表 $\int_{-\infty}^{\infty} dx$.

假設 $f(x)$ 定義在 $\mathbb{R}$ 上. 我們先考慮它在區間 $[-A, A]$ 之中, 假想它拓展成一個 $2A$ 週期函數. 那麼, 經過簡單的變數變換, 我們可以定義它的 Fourier 級數展開

$$\mathcal{F}(f,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\frac{\pi}{A}x}, \tag{1}$$

其中

$$f_n = \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-in\frac{\pi}{A}x} \, dx.$$

其收斂性質都和 2π 週期函數者相同. 假設 (1) 式收斂, 即 $f(x) = \mathcal{F}(f,x)$. 現在, 我們令 $\triangle x = \frac{\pi}{A}$, $\xi_n = n \triangle x$. 那麼 (1) 就可以改寫成

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{i\xi_n x} \triangle x, \tag{2}$$

其中

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-i\xi_n x} \, dx.$$

如果 $f(x) \in L^1$, 則 $|f(x)|$ 在 $|x|$ 大時消散得夠快. 所以當 A 夠大時,

$$\hat{f}_n \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi_n x} \, dx.$$

若定義

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx, \tag{3}$$

則 (2) 式變成

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi_n) e^{i\xi_n x} \triangle x.$$

這是一個 Riemann 和, 當 $A \to \infty$, 若收斂, 可寫成積分

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi. \tag{4}$$

以上的 (3) 式定義了 Fourier 轉換 (Fourier transform), (4) 式叫作反轉換 (inverse Fourier transform). 我們選擇讓係數 $\frac{1}{2\pi}$ 出現於反轉換式, 也有些書讓它出現於轉換式, 或讓它以 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 分別出現在兩個轉換式上 (如此一來, 則兩式並無實質差別).

Fourier 轉換的基礎理論, 即在探討什麼時候 $\hat{f}(\xi)$ 存在, 有些什麼性質, 什麼時候反轉換可以回到原來的函數 $f(x)$.

如果 $f(x) \in L^1$, 則 (3) 式的積分存在, 而且

$$|\hat{f}(\xi)| \le \int |f(x)||e^{-i\xi x}|\, dx \le \int |f(x)|\, dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

也就是說

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^1}.$$

更進一步, 我們可以證明 $\hat{f}(\xi)$ 是一個有界的連續函數, 而且

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0.$$

但是, 這些都不足以保證 $\hat{f}(\xi)$ 仍在 L^1 裡. 所以就連反轉換式 (4) 中的積分都未必有意義. 這是 L^1 中的 Fourier 轉換理論的困擾之處.

L^1 的反轉換定理. 若 $f(x) \in L^1$ 且 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是分片連續函數 (要求在不連續點處的左右極限都存在). 則

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int e^{-\epsilon^2 \frac{\xi^2}{2}} \hat{f}(xi) e^{ix\xi}\, d\xi = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

若 $\hat{f}(\xi) \in L^1$, 則

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(xi) e^{ix\xi}\, d\xi$$

是個連續函數且 $f(x) = g(x)$ almost everywhere.

如果 $\hat{f} = \hat{g}$, 則 $(f-g)\hat{} = 0$, 故在 L^1 內. 所以 $f - g = 0$ a. e. 因此我們得到 Fourier 轉換的唯一性.

若 $f(x) \in L^2$ 但不在 L^1, 我們不能直接以 (3) 定義其 Fourier 轉換, 因為那個積分未必有意義. 所以一開始我們只能定義 $L^1 \cap L^2$ 空間中的 Fourier 轉換. 但是 $L^1 \cap L^2$ 是稠密於 L^2, 而 L^2 是完備空間, 所以若 $f \in L^2$, 存在 $f_n \in L^1 \cap L^2$, 使得 $\|f_n - f\|_{L^2} \to 0$. 這時, 由於

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{L^2} = 2\pi \|f_n - f_m\|_{L^2},$$

$\hat{f}_n$ 是一組 Cauchy 序列, 故在 L^2 中收斂, 叫它 $\hat{f}(\xi)$. 可以證明此 $\hat{f}(\xi)$ 的定義不依賴於所選取的 Cauchy 序列. 如此, 我們可以定義 L^2 上的 Fourier 轉換. 其實, L^2 上的 Fourier 轉換理論比較 "對稱": 若 $f \in L^2$, 則 $\hat{f} \in L^2$, 而且

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f}, \hat{g}), \quad \|f\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_{L^2}. \tag{5}$$

上式是 Fourier 轉換理論中的 Parseval 等式. L^2 的Fourier 轉換與反轉換定理稱為 Plancherel 定理.

Plancherel 定理. 令

$$\hat{f}_A(\xi) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-i\xi x}\, dx, \quad f_A(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \hat{f}(xi) e^{ix\xi}\, d\xi.$$

則當 $A \to \infty$,

$$\|f_A - f\|_{L^2} \to 0, \quad \|\hat{f}_A - \hat{f}\|_{L^2} \to 0.$$