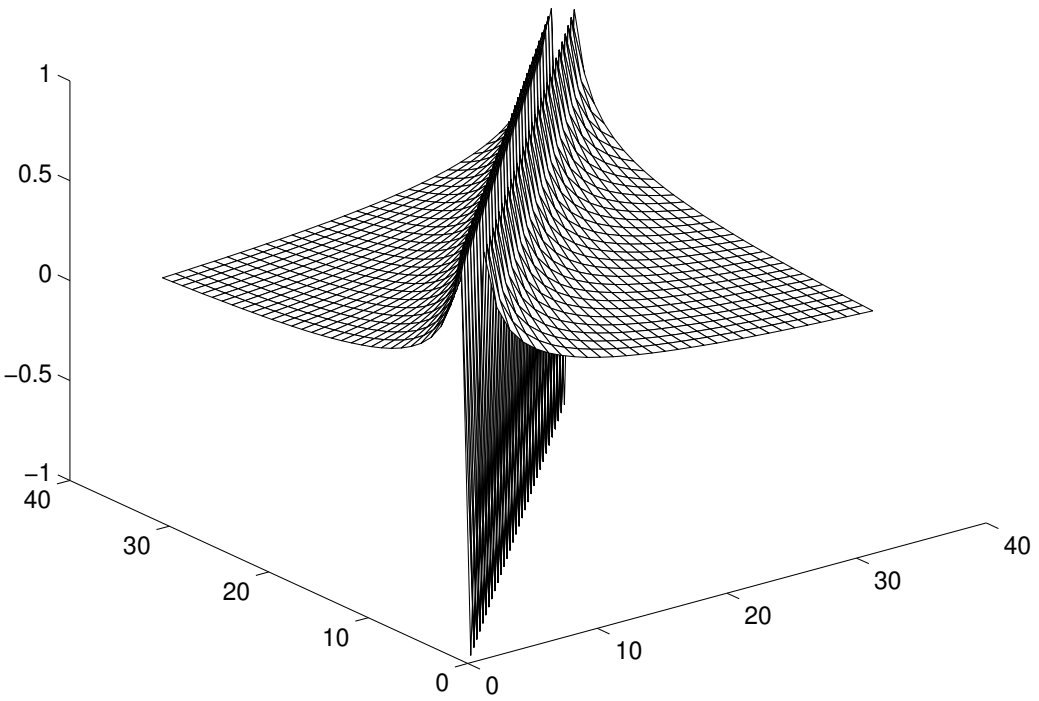
另一個標準的二維圖像測驗是用以下矩陣 $A = (a_{ij})$:

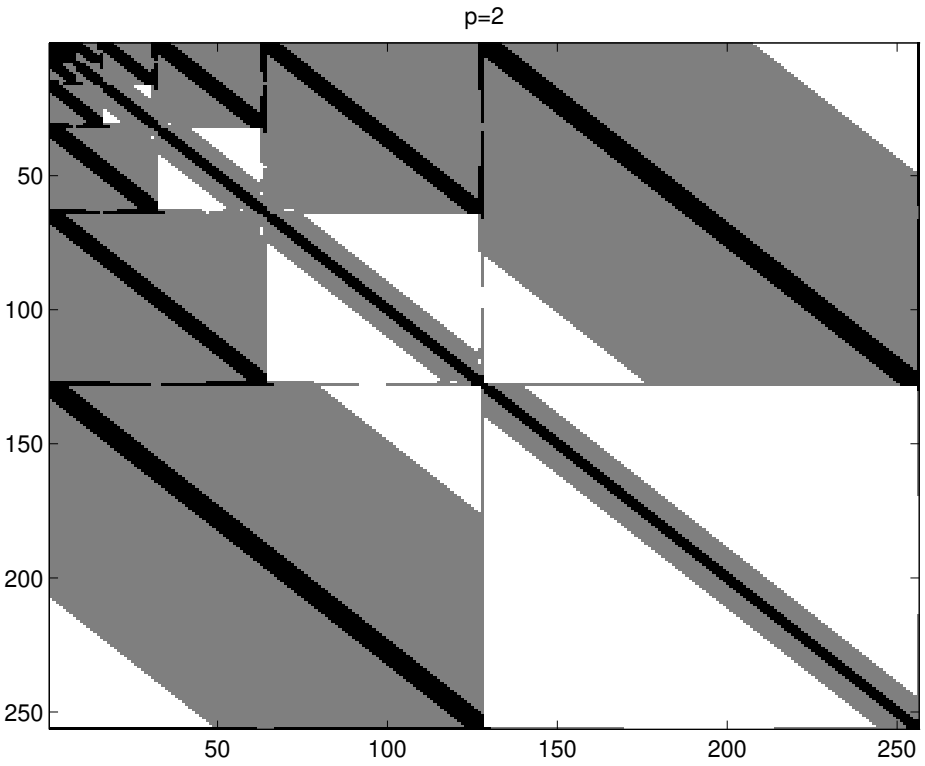
$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{if } i = j, \\ \frac{1}{sqrt|i-j|} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

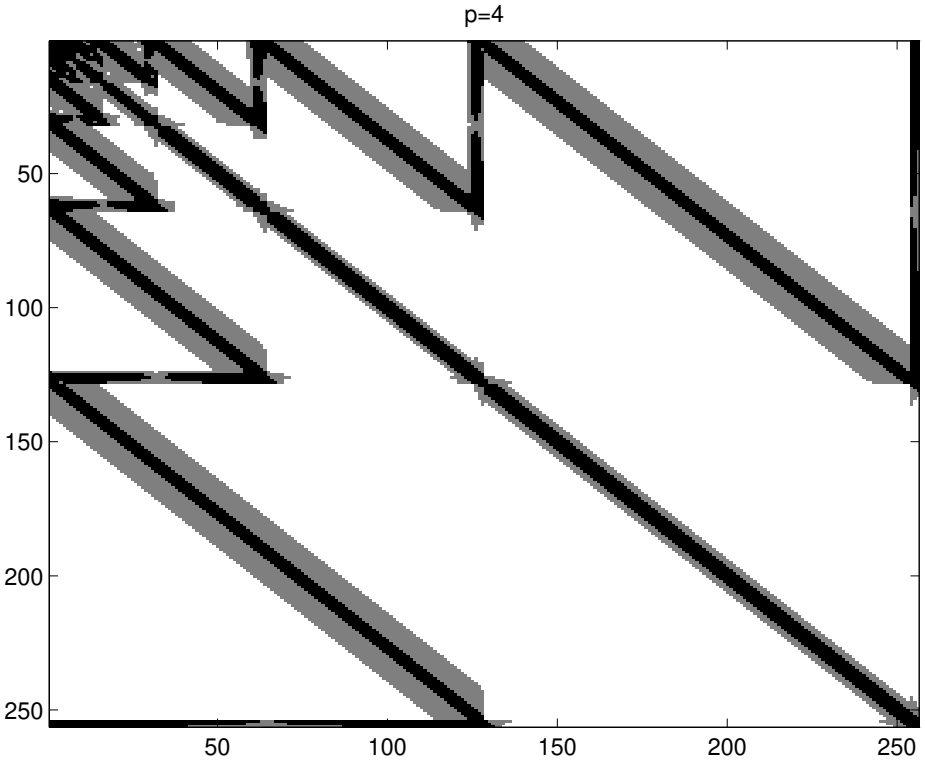
A 是一個對稱的, 在對角線上不連續但其餘部份平滑遞減的矩陣 (或圖形). 如圖一.

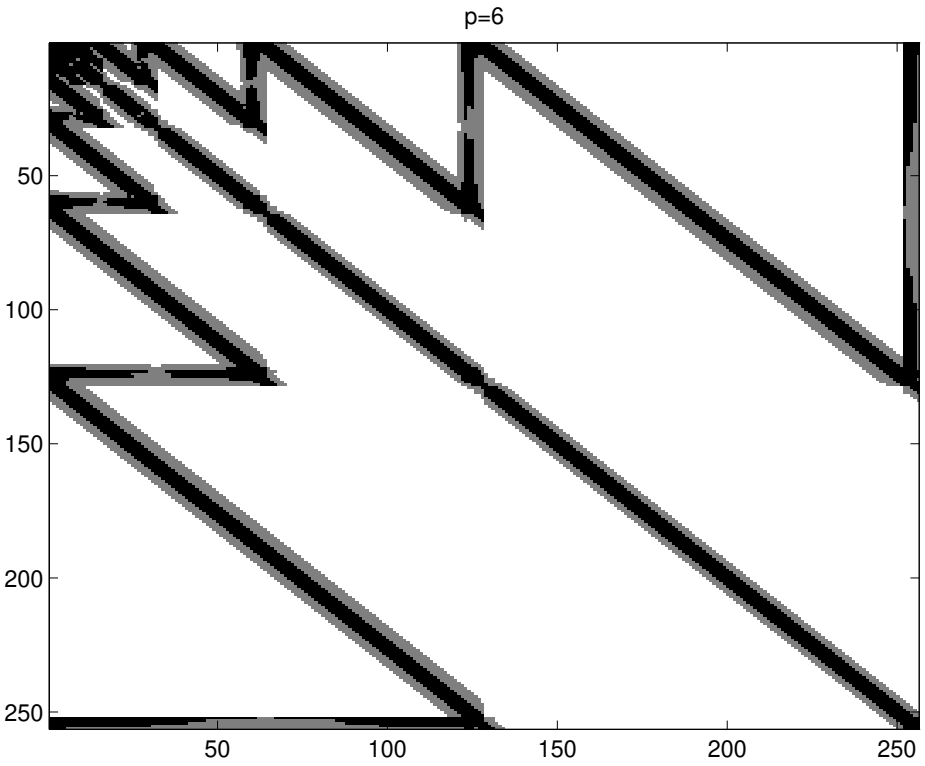


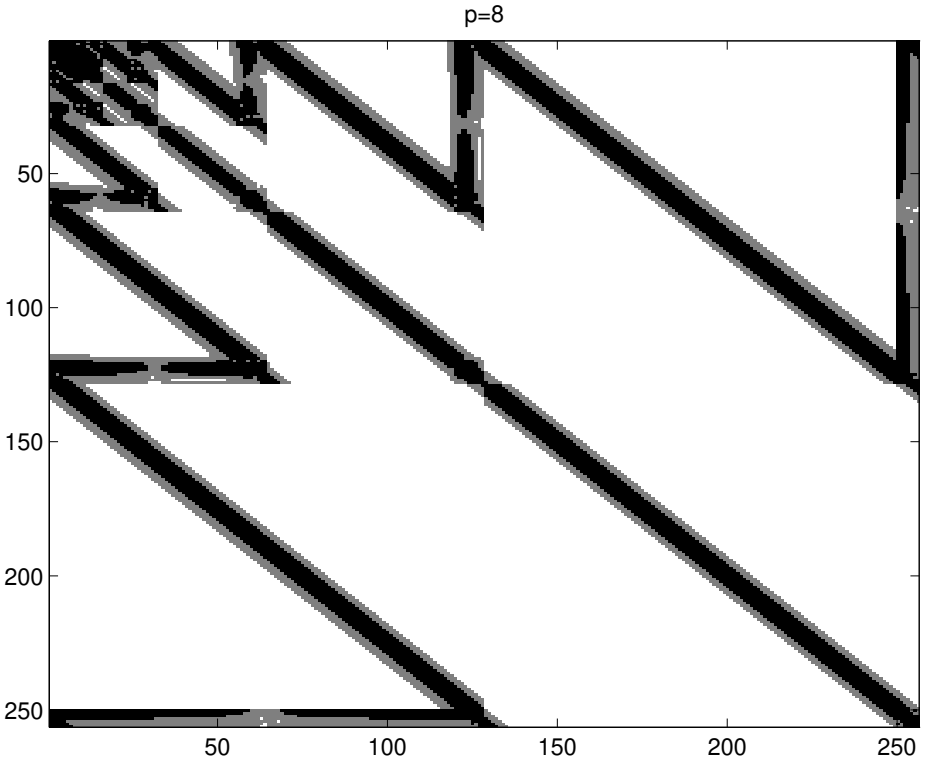
圖一. 標準二維測驗圖形.

我們用週期化的離散凌波轉換, 把 A 換到凌波函數空間; 稱之為矩陣 B. 然後, 令 $m = \max_{i,j} |b_{ij}|$, 若 $|b_{ij}| < 10^{-6}m$, 用白色表示; 若 $10^{-6}m \le |b_{ij}| \le 10^{-3}m$, 用灰色表示; 若 $10^{-3}m < |b_{ij}| \le m$, 用黑色表示. 在以下四張圖中, 我們列出使用級數為 $p = 2, 4, 6, 8$ 的 Daubechies 凌波函數作轉換之後的結果.


p=2
50
100
150
200
250
50
100
150
200
250


p=4
50
100
150
200
250
50
100
150
200
250


p=6
50
100
150
200
250
50
100
150
200
250


p=8
50
100
150
200
250
50
100
150
200
250

二維轉換的模式, 除了前述的 Cartesian product 之外, 還有一種 “全展開” 模式. 也就是,

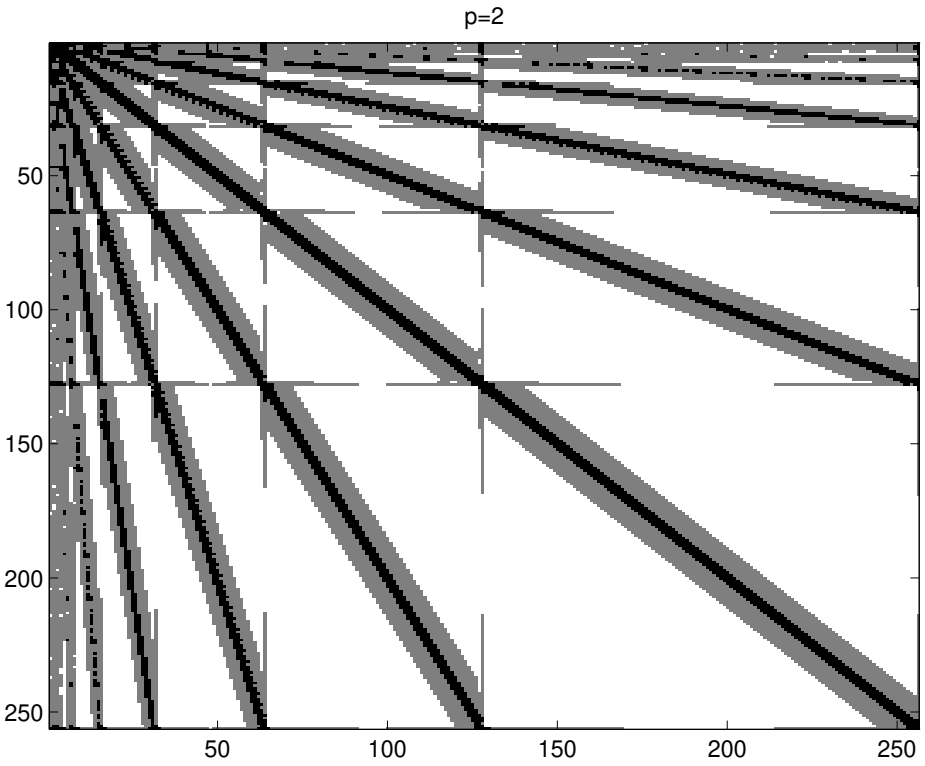
$$\begin{aligned} V_{j+1}(x,y) &= V_j(x,y) \oplus V_j(x)W_j(y) \oplus W_j(x)V_j(y) \oplus W_j(x)W_j(y) \\ &= (V_{j-1}(x,y) \oplus \cdots) \\ &\quad \oplus (V_{j-1}(x) \oplus W_{j-1}(x))W_j(y) \\ &\quad \oplus W_j(x)(V_{j-1}(y) \oplus W_{j-1}(y)) \\ &\quad \oplus W_j(x)W_j(y). \end{aligned}$$

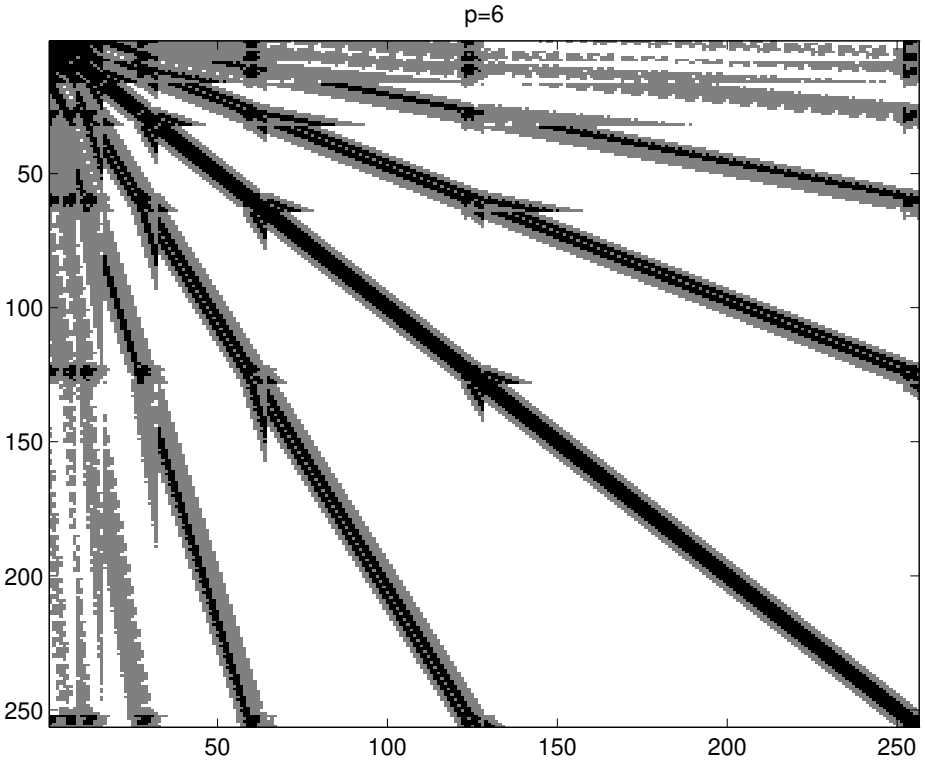
這個轉換方式在實際運算上沒有任何困難, 只是把輸入矩陣的每一行和每一列都個自作一維的凌波轉換. 整體而言, 其計算複雜度是 Cartesian product 模式的兩倍, 大致上它的轉換結果應該有比較多的 “小” 元素; 但是未必有 “兩倍多.” 所以, 拿計算複雜度比上其功能, 這種轉換的效率比較低. 只有在值得付出這種代價時才用得著.

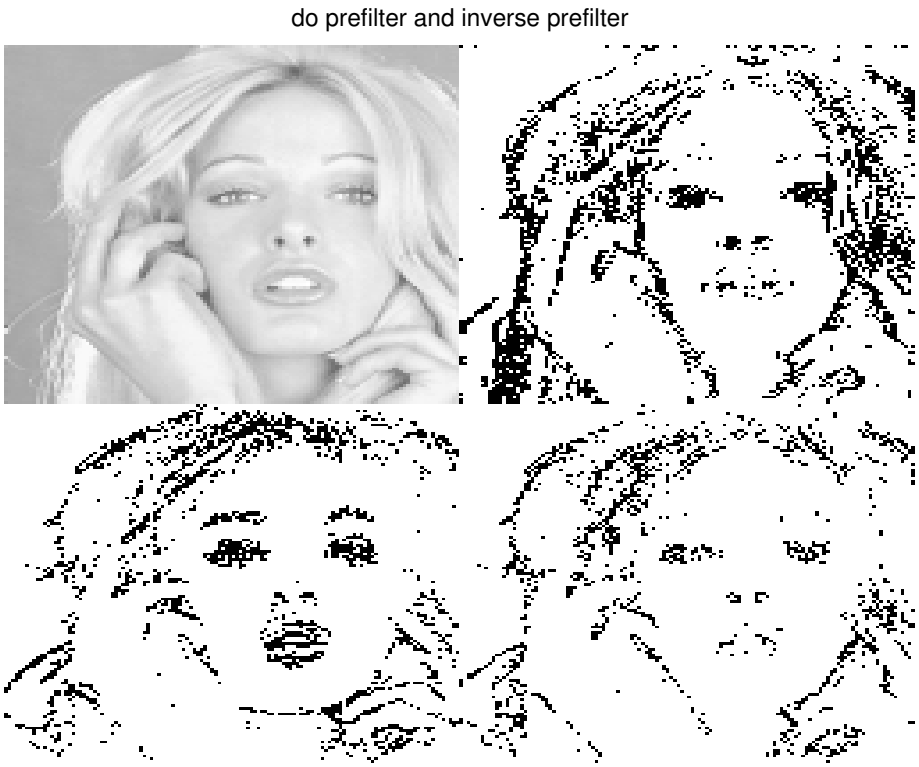
以下兩個圖就是這種分解方式的結果, 分別是用 $p = 2, 6$ 的凌波函數求得.

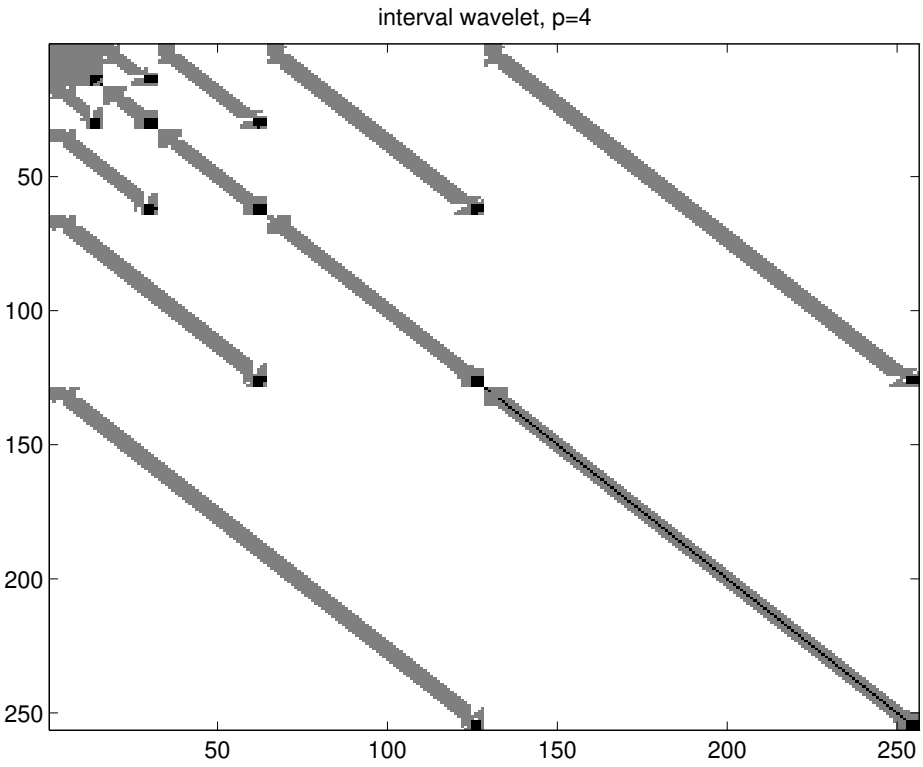
我們看到, 只要是使用週期化的分解模型, 在邊界上總有一些不自然的大元素. 這是來自週期化所造成的不連續. 定義在區間上的凌波函數的目的之一就是要消除這一類的大元素. 但是, 除了須要兩組不同的濾波係數之外, 在分解的前後還各須要執行一次預備處理. 因此, 這些計算複雜度上的代價是否值得, 還有待商榷.

例如最後的兩張圖, 就是以區間上的凌波分解求得. 製造這兩張圖的數學格式和前述的完全一樣.


p=2
50
100
150
200
250
50
100
150
200
250


p=6
50
100
150
200
250
50
100
150
200
250


do prefilter and inverse prefilter


interval wavelet, p=4
50
100
150
200
250
50
100
150
200
250