

高中數學素養導向教學資源研發 種子教師培育研習

素養導向教學設計與議題融入 —以十一年級A類課程為例

單維彰

國立中央大學師資培育中心與數學系

民國108年7月8、9日

南區（高雄師範大學）、北區（台灣師範大學）

1

單維彰·19議題與11A內容提要 2019/7/8,9

大綱

◆ 議題融入之理念

◆ 數學觀點的19議題概述

以上引自單維彰執編《中學數學教材教法》第陸章

◆ 11A學習內容提要

以上引自單維彰執編《108數學領綱課程手冊》11A

2

單維彰·19議題與11A內容提要 2019/7/8,9

議題融入課程之理念

與社會生活息息相關的「議題」
為國家社會之發展所需、
為社會大眾所關注、
期待公民能理解並採取行動，
具時間流動性與跨領域本質，
融入各科教學與評量。

3

單維彰·19議題與11A內容提要 2019/7/8,9

議題發展脈絡

◆ 九年一貫先有重大議題：

性平、人權、環境、海洋（教育）

◆ 後來增為七大議題，各設課綱：

資訊、家政（庭）、生涯發展

◆ 擴增為19項議題，涵蓋高中，無綱

科技、能源、原民、品德、生命

法治、安全、防災、戶外、國際

閱讀素養、多元文化

4

單維彰·19議題與11A內容提要 2019/7/8,9

議題於數學課程

- ◆ 為素養導向教學提供
素材的來源與實踐的場域
- ◆ 以議題關注的題材作為
數學學習的
 - ◆ 動機、起始例
 - ◆ 應用（例題、作業、考題）
 - ◆ 文化理解（識：為何要學？）

5

單維彰 · 19議題與11A內容提要 2019/7/8,9

議題於數學教師

- ◆ 專業上熟悉命題而少碰議題
- ◆ 生活在社會裡，扮演各種角色
- ◆ 要分擔議題教育的責任，
否則對於
數學領域
數學教師專業
都將造成傷害
- ◆ 教科書還在趕上時代潮流中...

6

單維彰 · 19議題與11A內容提要 2019/7/8,9

1. 性別平等教育

- ◆ 5-10年級：以統計工具察覺與分析
校園裡、社會上在資源分配與運用的
性別現象
- ◆ 模組：男女廁所設施單位數
- ◆ 11、12年級：以性別為條件的機率
問題與詮釋

7

單維彰 · 19議題與11A內容提要 2019/7/8,9

1. 性別平等教育—女數學家

- ◆ 難點1：中學生能理解的人物不多
 - ◆ 迦太基女王 Dido，牛皮圍地
 - ◆ Hypatia，電影《風暴佳人》
 - ◆ 王貞儀—班昭之後，一人而已
- ◆ 難點2：以往「數學」並未獨立
 - ◆ 正好連結生命教育與多元文化議題
 - ◆ 知識的產生與統整的通識教育

8

單維彰 · 19議題與11A內容提要 2019/7/8,9

2. 人權教育

- ◆ 8-10年級：美國獨立宣言以「人生而平等」是「不證自明」的觀念開頭，便是應用了《幾何原本》之公設典範。
- ◆ 8-12年級：身體可以被禁錮，心靈不能。《曹開詩集》青年時受冤成為綠島政治犯，獄吏認為無害而准其閱讀數學書籍，學習幾何、代數與基礎極限，將數學概念寫進詩裡。

9

單維彰 · 19課題與11A內容提要 2019/7/8,9

3. 環境教育

- ◆ 10年級：環境中有害氣體、懸浮微粒的濃度
- ◆ 11年級：最基本的Malthus人口指數成長模型，人口超過環境負荷時，自然界會如何？以前的人類社會如何？
- ◆ 12年級：修訂的S曲線成長模型，臺灣的資料是否吻合？理論上限為何？

10

單維彰 · 19課題與11A內容提要 2019/7/8,9

4. 海洋教育

- ◆ 7-9年級：將海象變化如風力、風向、風速、浪高、潮汐等數據編入題目
- ◆ 10年級：航海情境中的三角測量
- ◆ 11年級：用航海情境引進向量概念
- ◆ 11B：球面上的基本幾何應用於長距離的航海

技高海事學群已有豐富的教材

11

單維彰 · 19課題與11A內容提要 2019/7/8,9

5. 科技教育

- ◆ 7-12年級：善用科技工具，至少會用計算機，擴及繪圖App、試算表（將矩陣視為數據表）、代數系統
- ◆ 10年級：二進制、十六進制轉換，可與多項式、排列組合連結
- ◆ 11年級：數位音訊的壓縮可與三角函數連結，數位資料加解密所需的時間則可連結指對數

12

單維彰 · 19課題與11A內容提要 2019/7/8,9

6. 能源教育

- ◆ 7年級：看懂水電費帳單
- ◆ 9-11年級：從太陽能的轉換效率，估計學校當地的最高、最低發電量，並探討其實用性
- ◆ 10年級：石油價格的典型分布與極端值
- ◆ 10年級：能源價格與物價指數的二維數據分析

13

單維彰 · 19課題與11A內容提要 · 2019/7/8,9

7. 家庭教育

- ◆ 可關注個人與家庭的理財
- ◆ 10、11年級：將指數、數列應用在涉及收入、支出、利率、成本、年金、遠期價值等金融教育上
- ◆ 11、12年級：將機率（主觀、頻率）與期望值運用在風險概念上

14

單維彰 · 19課題與11A內容提要 · 2019/7/8,9

8. 原住民族教育

- ◆ 5-10年級：以統計工具察覺與分析學校裡、社會上的族群現象
- ◆ 11、12年級：以族群為條件的機率問題與詮釋
- ◆ 9、10年級：布農族的子女命名涉及一對一、多對一的對應關係
- ◆ 11B：編織與圖騰的週期性現象

15

單維彰 · 19課題與11A內容提要 · 2019/7/8,9

9. 品德教育

- ◆ 在規劃數學探究、問題解決等學習活動的過程中，關注研究的道德面向
- ◆ 在數學裡養成「不說未經理性推論而確認的話」的習慣
- ◆ 總是設法使用量化的
 - 比例原則
 - 機率、期望值
 來討論質性的品德問題

16

單維彰 · 19課題與11A內容提要 · 2019/7/8,9

9. 品德教育—Igor Sharygin

Learning mathematics builds up our virtues, sharpens our sense of justice and our dignity, strengthens our innate honesty and our principles. The life of mathematical society is based on the idea of proof, one of the most highly moral ideas in the world.

—Igor Sharygin (1937-2004)

學習數學能夠樹立我們的德行，提升我們的正義感和尊嚴，增強我們天生的正直和原則。數學境界內理想生活，乃基於證明，而這是最崇高的一種道德概念。

—蕭文強譯

17

單維彰·19課題與11A內容提要 2019/7/8,9

10. 生命教育

- ◆ 7-12年級：見識科技工具（乃至於AI）的能耐之後，重新思考「人」的「價值」是什麼？「智能」是什麼？
- ◆ 11、12年級：如果人的價值在於獨立思考，那麼「人」真的能夠產出超過生活經驗的「真理」嗎？哲學家認為這個疑問是肯定的，證據來自數學。

18

單維彰·19課題與11A內容提要 2019/7/8,9

11. 法治教育

- ◆ 所謂「法律」就是一套從公設（憲法）出發，按照邏輯推論出來，彼此不相矛盾的陳述系統
- ◆ 11年級：「合法、公平、正義」有如三個集合的文氏圖，它們互不相斥，卻也不互包含，有很多可討論之處
- ◆ 11、12年級（課外）：葛德爾不完備理論證明法律必有漏洞，故仍需道德

19

單維彰·19課題與11A內容提要 2019/7/8,9

12. 資訊教育

- ◆ 7-12年級：運算思維融入數學教學，把解題流程以演算法或流程圖呈現
- ◆ 7、10年級：輾轉相除法、（連續）綜合除法、十分/二分逼近法，確實以演算法呈現其「終止」條件（證明必將終止）
- ◆ 7-12年級：數學概念前後繼承（例如整數→有理數→實數→複數）與推廣的關係，就是物件導向程式語言的原理
- ◆ 10-12年級：資料庫就是邏輯與集合的運算

20

單維彰·19課題與11A內容提要 2019/7/8,9

13. 安全教育

- ◆ 8-10年級：踩下煞車前的反應時間差，換算乘機車或汽車前進的距離
- ◆ 9-11年級：踩煞車造成等減速運動，需要一定距離才能停住車
- ◆ 10年級：密閉空間內的粉塵濃度、二氧化碳濃度

21

單維彰 · 19課題與11A內容提要 2019/7/8,9

14. 防災教育

- ◆ 7-10年級：天然挑戰（ex降雨量、地震）的典型分布與極端值
- ◆ 10年級：海面溫度與颱風數量的相關性探索
- ◆ 8-11年級：社區人員抵達避難點的平均距離估算
- ◆ 10、11年級：核輻射的衰退與擴散

22

單維彰 · 19課題與11A內容提要 2019/7/8,9

15. 生涯規劃教育

- ◆ 8年級：徐光啟在43歲生涯轉換，從科舉文官進入幾何和天文
- ◆ 10年級：選11A還是11B？
- ◆ 11年級：范德蒙（凡德孟）在35歲生涯轉換，從小提琴手進入數學
- ◆ 11年級：數甲？數乙？不選數學？

23

單維彰 · 19課題與11A內容提要 2019/7/8,9

16. 多元文化教育

- ◆ 2-7年級：華語（及鄰近語種）內建十進造成我們的心算優勢，體會西方兒童從母語轉換為十進制數字系統的困難
- ◆ 3-10年級：蘇美人的60進制流傳至今日時間、角度的分、秒制
- ◆ 10年級：中國傳統數學沒有三角，以勾股術代之的範例，及其侷限
- ◆ 10年級：綜合除法 vs 霍內演算法

24

單維彰 · 19課題與11A內容提要 2019/7/8,9

17. 閱讀素養教育

- ◆ 5-12年級：期許全體數學教師注意提升評量試題的文字品質、溝通的嚴謹度、資訊承載量、以及情境負荷，將會非常有助於提升全體學生的閱讀素養
- ◆ 7-12年級：連結媒體識讀，以邏輯檢驗媒體報導的可信度

25

單維彰 · 19級選修11A內容提要 2019/7/8,9

18. 戶外教育

- ◆ 7-10年級：登山、潛水、熱氣球、運動者，皆須警惕氧氣濃度、氣壓或水壓、環境溫度與海拔高度的關係
- ◆ 10年級：臺灣很多山頂有「三角點」它們是日本人埋設的三角測量基準點
- ◆ 11B：跑者、風浪板、帆船與向量

26

單維彰 · 19級選修11A內容提要 2019/7/8,9

19. 國際教育

- ◆ 7、11B年級：時區的原則性規劃，少數國家的例外設定，高緯度國家的夏令時間
- ◆ 7-10年級：從國際評量之中獲得各國關於數學評量成績、認知態度、因素分析等統計資料，不但與學生本身的經驗相連，有時候也頗有趣

27

單維彰 · 19級選修11A內容提要 2019/7/8,9

11年級A類課程

- ◆ 高/不同面向數學需求的升學進路
- ◆ 專業化的數學教育準備
- ◆ 預期在12年級選修數學甲或數學乙

28

單維彰 · 19級選修11A內容提要 2019/7/8,9

關於行列式

單維彰 · 19 歲遇見 11A 內容提要 · 2019/7/8,9

29

平行四邊形面積的坐標算法

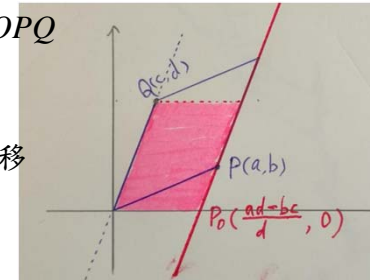
◆ $|ad - bc|$ 簡記為 $|P, Q|$

口訣「交叉相減」

◆ 自動推論 $\triangle OPQ$

的面積

◆ 自然就會平移



單維彰 · 19 歲遇見 11A 內容提要 · 2019/7/8,9

30

一點數學史

- ◆ 平行四邊形（三角形）面積的
坐標算法與直角坐標系一同誕生
求兩直線交點（約 1637 - 1659）
- ◆ Leibniz 在 1672 年從 Huygens 學
導出三元一次方程的「克拉瑪公式」
- ◆ 克拉瑪 1750 發表論文，附錄中用
「公式」解五元一次方程

單維彰 · 19 歲遇見 11A 內容提要 · 2019/7/8,9

31

「純」數學的行列式定義

◆ 骨子裡就是平行四邊形面積

$$[e_1, e_2, \dots, e_n] = 1$$

$$\text{若 } u_j = u_k \text{ 則 } [\dots u_j \dots u_k \dots] = 0$$

$$[\dots cu_k \dots] = c [\dots u_k \dots]$$

$$[\dots u_k + v_k \dots] = [\dots u_k \dots] + [\dots v_k \dots]$$

◆ 可推論 $[\dots u_j \dots u_k \dots] = -[\dots u_k \dots u_j \dots]$

◆ 可推論降階公式、展開公式

單維彰 · 19 歲遇見 11A 內容提要 · 2019/7/8,9

32

一點數學思維

- ◆ 行列式就是 Measure of Simplex
- ◆ 方向性是本質
- ◆ 降階和展開演算法是必要的
而不是設計的

33

單維彰 · 19 級題與 11A 內容提要 · 2019/7/8,9

附件 1. 從幾何觀點看 Cramer's Rule

34

單維彰 · 19 級題與 11A 內容提要 · 2019/7/8,9

關於對數律與 指對函數

35

單維彰 · 19 級題與 11A 內容提要 · 2019/7/8,9

對數律

- ◆ 每個正數都是 10 的次方
- ◆ 對數律 就是指數律

$$ab = 10^{\log a} 10^{\log b} = 10^{\log a + \log b}$$

$$ab = 10^{\log ab}$$

36

單維彰 · 11 年級分層課程 · 2019/4/24

一般底對數：觀念記號

- ◆ 每個正數都是 2 的次方 ...
- ◆ 計算機實驗確認，然後

$$a = 10^{\log a} = 10^{\log 2 \cdot \frac{\log a}{\log 2}} = (10^{\log 2})^{\frac{\log a}{\log 2}} = 2^{\frac{\log a}{\log 2}}$$

- ◆ 把 $\frac{\log a}{\log 2}$ 簡記為 $\log_2 a$
- ◆ 是觀念上的簡記，非計算上的需要
- ◆ 目前天下人只用三種底 ...

37

單維彰 · 11年級分組課程 · 2019/4/24

$y = 2^x$ 就是 $x = \log_2 y$

- ◆ 函數與方程式的形式互換
- ◆ 「沿著」y 軸畫圖（確實練習）
- ◆ 往前連結 $x = -y + 1$
- ◆ 往後連結 $x = 4y^2$
- ◆ 連結 10 年級「坐標算法」

38

單維彰 · 11年級分組課程 · 2019/4/24

關於三角函數

39

單維彰 · 19級選修11A內容提要 · 2019/7/8,9

三角是從坐標到向量擺渡

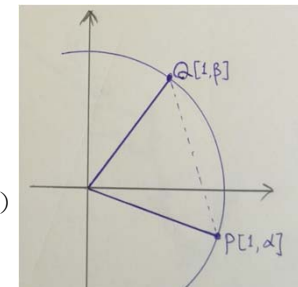
- ◆ sin 差角公式（面積思維）

$$\Delta OPQ = \frac{1}{2} \sin(\beta - \alpha) = \frac{1}{2} [P, Q]$$

- ◆ 教法：

把有向廣義角
對應到數線上

（三角函數圖形前置經驗）



40

單維彰 · 19級選修11A內容提要 · 2019/7/8,9

$\Delta OPQ = \frac{1}{2} [P, Q]$
 $= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$
 $= \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$
 $\sin(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\frac{x_1}{r_1} \frac{y_2}{r_2} - \frac{x_2}{r_2} \frac{y_1}{r_1}}{1}$
 $= \text{正弦差角公式}$
 cos θ_1 sin θ_2

單維彰 · 19 議題與 11A 內容提要 · 2019/7/8,9

41

$\Delta OPQ = \frac{1}{2} [P, Q]$
 $= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$
 $= \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$
 $\sin(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\frac{x_1}{r_1} \frac{y_2}{r_2} - \frac{x_2}{r_2} \frac{y_1}{r_1}}{1}$
 $= \text{正弦差角公式}$
 為何不喜歡正弦差角?

單維彰 · 19 議題與 11A 內容提要 · 2019/7/8,9

42

$\Delta OPQ = \frac{1}{2} [P, Q]$
 $= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$
 $= \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$
 $\sin(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\frac{x_1}{r_1} \frac{y_2}{r_2} - \frac{x_2}{r_2} \frac{y_1}{r_1}}{1}$
 $= \text{正弦差角公式}$
 為何不喜歡正弦差角?
 (1) 不能分辨銳、鈍角
 (2) 受方向影響

單維彰 · 19 議題與 11A 內容提要 · 2019/7/8,9

43

$\Delta OPQ = \frac{1}{2} [P, Q]$
 $= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$
 $= \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$
 $\sin(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\frac{x_1}{r_1} \frac{y_2}{r_2} - \frac{x_2}{r_2} \frac{y_1}{r_1}}{1}$
 $= \text{正弦差角公式}$
 為何不喜歡正弦差角?
 (1) 不能分辨銳、鈍角
 (2) 受方向影響

$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_2 & -y_1 \\ y_2 & x_1 \end{bmatrix}$

單維彰 · 19 議題與 11A 內容提要 · 2019/7/8,9

44

$\Delta OPQ = \frac{1}{2} [P, Q]$
 $= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$
 $= \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$
 $\sin(\theta_2 - \theta_1) = \frac{x_1 y_2}{r_1 r_2} - \frac{x_2 y_1}{r_2 r_1}$
 $= \text{正弦差角公式}$
 為何不喜歡正弦差角?
 (1) 不能分辨銳、鈍角
 (2) 受方向影響
 $\Delta OQ P^\perp = \frac{1}{2} [Q, P^\perp]$
 $= \frac{1}{2} (x_1 x_2 + y_1 y_2)$
 $= \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(90^\circ - \theta)$

單維彰 · 19 歲通識 11A 內容提要 · 2019/7/8,9 [45]

$\Delta OPQ = \frac{1}{2} [P, Q]$
 $= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$
 $= \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$
 $\sin(\theta_2 - \theta_1) = \frac{x_1 y_2}{r_1 r_2} - \frac{x_2 y_1}{r_2 r_1}$
 $= \text{正弦差角公式}$
 為何不喜歡正弦差角?
 (1) 不能分辨銳、鈍角
 (2) 受方向影響
 $\Delta OQ P^\perp = \frac{1}{2} [Q, P^\perp]$
 $= \frac{1}{2} (x_1 x_2 + y_1 y_2)$
 $= \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(90^\circ - \theta)$
 $\cos \theta$

單維彰 · 19 歲通識 11A 內容提要 · 2019/7/8,9 [46]

$\Delta OPQ = \frac{1}{2} [P, Q]$
 $= \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$
 $= \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$
 $\sin(\theta_2 - \theta_1) = \frac{x_1 y_2}{r_1 r_2} - \frac{x_2 y_1}{r_2 r_1}$
 $= \text{正弦差角公式}$
 為何不喜歡正弦差角?
 (1) 不能分辨銳、鈍角
 (2) 受方向影響
 $\Delta OQ P^\perp = \frac{1}{2} [Q, P^\perp]$
 $= \frac{1}{2} (x_1 x_2 + y_1 y_2)$
 $= \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(90^\circ - \theta)$
 $\cos \theta$
 $\cos(\theta_2 - \theta_1) = \text{餘弦差角公式}$
 $\equiv \text{內積公式}$

單維彰 · 19 歲通識 11A 內容提要 · 2019/7/8,9 [47]

關於線性代數

單維彰 · 19 歲通識 11A 內容提要 · 2019/7/8,9 [48]

識：11年級何需二元方程組？

- ◆ 發展新概念：線性組合

- ◆ 引進新符號（直式）

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}y = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

- ◆ 從線性組合到線性變換（方程到方程式）

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

[49]

單維彰 · 19課題與11A內容提要 · 2019/7/8,9

識：矩陣何需相乘？

- ◆ 作為線性組合的記號

- ◆ 作為線性變換的記號

- ◆ 作為資料表格的物件

（離散數學、科學與統計計算）

- ◆ 克拉瑪公式沒有發展價值

- ◆ 反方陣可有可無（不用來求解）

- ◆ 矩陣本身的代數不是高中階段教學目標

[50]

單維彰 · 19課題與11A內容提要 · 2019/7/8,9

關於機率

[51]

單維彰 · 19課題與11A內容提要 · 2019/7/8,9

識：機率何需拆兩段？

- ◆ 古典機率 vs 主觀、頻率機率

- ◆ 機率詮釋：Frequentist vs Bayesian

- ◆ 「不確定性」思維的教育

- ◆ 「數據素養」的教育

[52]

單維彰 · 19課題與11A內容提要 · 2019/7/8,9

附件 2.
數學領域課程手冊
D-11A-1,2,3

單維彰 · 19議題與11A內容提要 2019/7/8,9

(53)

請提出討論

The End

單維彰 · 19議題與11A內容提要 2019/7/8,9

(54)