

主題論文

課程研究

16 卷 1 期 2021 年 3 月 頁 1-16

數學素養課程的轉銜

單維彰



摘要

本文將「課程」定位於涵蓋教材、教法、教案、評量的國中階段數學課程。筆者將古典的「學習經驗」概念連結至數學領綱「有感的學習機會」理念，並參照近年備受重視之「以人為本」的設計思考，歸納出教師帶著原有的專業能力轉銜至素養課程的關鍵改變，是意識的轉變。因此，本文所謂的「轉銜」是指教師的轉銜，但不是指教師的專業能力，而是指教師有意識地「同理」學生的感受，進而設計符合學習目標且「有感」的學習經驗。接著，筆者從七年級正負混合四則運算、指數與指數律這兩項學習內容，以及在數與量、幾何、函數主題中出現失焦的代數化現象，舉例說明前面宣告的意識為何要轉變，以及如何轉變。

關鍵詞：國中階段、數學素養、數學課程

Transition to the Literacy-Oriented Mathematics Curriculum

Wei-Chang Shann

Abstract

This text addresses on the operational mathematics curriculum at the secondary stage which covers teaching materials, methods, plans, and assessments. Author starts with the classic concept of learning experiences, connects it to one of the five ideologies of the national curriculum for mathematics that concerns the opportunity of sensible learning experiences, refers to the methods and ideas of human-centered design thinking, and concludes that the crucial point for teachers to make the transition from original curriculum to the literacy-oriented curriculum is the sense of awareness: Consciously empathize the students experiences, and design the curriculum accordingly that aims at the goals and that makes sense to the students. Then the author selects examples from arithmetics, exponents and their properties, and some misleading algebraic formulations to suggest how the trisitions can be made.

Keywords: secondary stage, mathematical literacy, mathematics curriculum

壹、前言

所謂數學素養課程即素養導向的數學課程。在這份立場文件（position paper）中，筆者欲以「原有一現在」的對比方式，論述數學素養課程的觀點（viewpoint）。本文為加強對於教學現場的助益，故將「課程」定位於Goodlad（1979）之五層次理論的「實施的課程」層次，亦即涵蓋教材、教法、教案、評量的數學課程（黃毅英，2016），且將內容主要設定於國中階段，只有在論及前後連結時，才會涉及少量的國小及高中階段內容。而在廣泛的「實施的課程」議題當中，本文特別將觀點聚焦於Tyler所謂的「學習經驗」（learning experiences），並引述其詮釋如下：

所謂「學習經驗」並非授課內容，也不是教學活動。它是指學習者對於外在環境所提供的可變狀態做出反應時，兩者之間的互動。學習是經由學生的行動而發生的；學生從他（她）自己的行動中學習，而不是從教師的行動中學習。（Tyler, 1949, p. 63）

如今「學習經驗」的概念已經是教育界的常識，而且如前面的引文蘊含了「以學習者為中心」的想法；因為學習經驗指的是學生的經驗，所以在關注學習經驗的時候，自然就會以學生為想像的主體（中心）。這兩個觀念都成為十二年國民基本教育（以下簡稱十二年國教）「素養導向」的基本內涵，而數學領域課程綱要（教育部，2018）以五項理念呼應《十二年國民基本教育課程綱要總綱》（又稱108課綱）的素養理念，其中第四項「數學（課程）應提供每位學生有感的學習機會」相當於數學領綱對學習經驗的立場性宣言。以下從師培教育的教科書《分科教材教法：中學數學教材教法》中，引述「有感的學習機會」的詮釋：

有感就是「感覺有意義」的意思。有感的學習機會就是讓學生產生意義感的學習經驗，它對應幾種相近的英文概念：Sensible這種有感，是認知到學習的內容確實有必要學習，或者待解決的問題確實有需要解決；Meaningful這種有感，是體認到為了學習所花費的辛勞，都是值得的；Make sense of這種有感，是察覺到數學觀

念之間彼此呼應，數學觀念與現實之間彼此呼應，某個數學內容理所當然地應該出現在某個位置，而且學過的數學可以建構一個完整的、有助於思考的、可以提升理解能力的系統。（單維彰，2020，頁36）

前文提到的素養，也是本文的標題，但是因為已經有相當多文獻探討素養的諸多面向，故本文不再深究其完整的意義，而以「有感的學習經驗」作為本文所欲關注的素養面向。

雖然本文不再深究素養的完整意義，但仍在此簡列兩份專門論述數學素養教學的文件，以備教學現場中的教師參酌。其一即數學領綱，綱要中的五項理念就是數學素養的五個面向，而《分科教材教法：中學數學教材教法》第二章第四節針對五項理念逐一舉例說明；其二是從數學課程史的證據來看，我國的數學教育前輩自1968年實施九年國民教育起，就開始談論素養理念，至今已經有半個世紀的傳承（單維彰，2018）。因此，這一波十二年國教「素養導向」的課程理念，對數學領域而言並非全新的理念，而是數學教育追求「理想」數學課程（包含教材、教法與評量）的持續努力。因為它是同一理想的持續努力，所以，本文認為從現有數學課程到素養課程的變換是連續性的轉銜，而非斷裂性的革新。

在下一節，筆者先引用數學領域以外的一項概念，來論述教師轉銜到素養課程的關鍵點：教師「意識」到應以學生為中心來設計「有感的學習經驗」。接下來便選擇幾個國中階段的學習內容，依據本節和下一節所揭櫫的理念來印證現有課程的部分特徵，並論述素養課程的轉銜方向。

貳、學生中心的設計思考

設計思考（design thinking）肯定可以列為近十年的潮詞（buzzword）之一。雖然工商界一般以Brown（2008）發表的評論文章為推動風潮之首，但其實它在學術界，乃至於教育界，有更長遠的流源。即以數學教育而言，在2007年便有所聞（Cobb, 2007），設計研究法（design-based research）在2014年已經成為數學教育百科全書的詞條（Swan, 2014）。本文不擬探究設計思考的學術面向，僅以通識的角度，用「設計」這塊他山之石幫助我們思考數學素養課程。

近年的設計思考與長久以來的商品設計、工業設計的最主要差異，在於「以使

用者為中心」(user-centered)或者「以人為本」(human-centered)，而不是以物件(產品或服務)為中心的核心精神。也就是設計者能意識到：不要以「我有什麼技術」、「我有哪些獨特資源」、「我具備什麼優勢」、「我想要創造什麼新產品」作為設計的出發點，而要以「同理心」(empathy)站在使用者或利害關係人的立場，發掘他們的需求及「痛點」，同時顧慮科技和商業的可行性。設計的成功與否是由使用者(市場)決定的，而後者的反饋促成設計者學習與修正設計的循環過程。設計思考作為方法論，反覆強調的是設計者「心中有使用者」的同理意識；需注意的是，同理並非同情(sympathy)，同理又稱為共感，也就是憑著經驗或想像，對於他人的感覺或情緒「感同身受」。

如果我們站在使用者或消費者的立場來看，設計思考的主張應該是理所當然的，商品當然應該是為「我」(消費者)而設計的，器具也當然應該滿足「我」(使用者)的需求。知道了近年的設計思考論述之後，我們才驚訝地明白，原來以前並不是這樣的，至少不總是這樣的。原來，更多的商品是站在投資人、發明人或生產者的立場來設計的，也就是所謂的市場本位、技術本位和製造思維。

現在，讓我們把前面的設計者置換成教師，使用者置換成學生，技術本位就像是教師本位，製造思維就像是學科思維，而「以人為本」的理念就像是「以學生為中心」。可是，相對於「以學生為中心」通常含有「讓學生成為學習的主體」、「學生自我發現」等意涵(黃毅英、鄧國俊、霍秉坤、顏明仁、黃家樂，2007)，從「以人為本」的設計思考來理解「以學生為中心」，就會明白所謂的「以學生為中心」未必要求學生自學，或者希望學生經由合作而發現知識，就好像設計者並不期望使用者能自行設計產品，教學與評量的設計仍然是教師的專業責任。其關鍵差異在於，強調教師能意識到：教學應該心中有學生，以學生的需求為教學目標，避免心中僅有學科，也避免過度專注於教師自己感興趣的目標。教師作為一種專業，必須有能力「同理」學生的感受，進而設計「有感的學習經驗」。

同樣地，本文所指「有感的學習經驗」不限於情意面，也不限於學生經由主動操作而獲得的經驗，而是指本文第壹節所詮釋的「感覺有意義」的效果。舉例而言，近年在全臺展開的數學奠基活動(Just Do Math, JDM)獲得相當的成就，此系列活動創造了許多「有感學習」的活動，對於活動中學生主動發現與教師干預的比例，也出現了見仁見智的看法。例如，林碧珍(2020，頁27)指出：

社群教師立即察覺（經由教授引導而整理出來的表格）正是此奠基模組的教學目標，比起原先的奠基活動讓學生漫無目的地去觀察零散的各種圖卡，還要來得容易。

在「感覺有意義」的詮釋之下，教師為學生設計的課程，可以是動手做的學習活動，也可以是較為傳統形式的學習活動，都可能達到「有感的學習經驗」的目標。有鑑於中學數學教師面臨明顯的現實壓力，包括進度、考試、班級常規管理等，使得中學數學課堂的範式（paradigm）有較多的講述與隨堂練習。因此，本文提出的教師「意識」轉變，為教師提供一項較務實的素養課程設計觀點，也可能是一條較容易實踐的進路。

前述的意識轉變是可以鍛鍊的嗎？什麼樣的課程設計是以學生的需求為目標？以前的數學課程難道不是為了學生的需求而設計的嗎？下一節，筆者試圖藉實例初步答覆這些問題。

參、素養課程轉銜舉例說明

呂秀蓮（2019）認為「國中教師相信解構課綱內涵的重要性」，就數學領綱而言，主要需解構的就是素養導向的意涵，而本文為此需求提供一條思考的進路，亦即「意識轉變」。從辯證的角度看，相對於素養課程的原有課程，或可稱為學科導向的課程，如呂文所說，多少「受制於教科書內容」；因此，從原有課程到素養課程的轉銜則多少需要「跳脫教科書框架的教學思考模式」。呂文嘗試一套實踐此轉銜的「課綱為本課程設計」程序，相對地，本文專注於「意識」轉變的詮釋，亦即藉由原有課程的舉例，辯證以學生為本的教師意識。

以下即從國中階段的數學課程中，抽出幾項主題，以前述張舉的理念來重新省視原有教科書中常見的教學活動，並藉以練習同理學生的感受、思考學生的需求等設計意識，使教師能從習慣的學科導向課程轉銜到素養導向課程。

一、正負數混合四則運算

在七年級上學期，學生學習了負數單元之後，當然一定要有操作練習。以前的數學課程通常包含以下類型的計算題：

$$12 - (-7) \times 14 + (-28) \div (-4) \cdot \left[-\frac{11}{15} + \frac{4}{15} \div \frac{2}{3} \right] \times \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left[(-66) - \left(-\frac{2}{7}\right) \right] \times \frac{3}{13} \quad (1)$$

站在學科內容的立場，以上練習都是合理且必須的，因為學生必須習得「先乘除後加減」、「分數除法算則」及「分配律」等算術規則。筆者試著體會學生做這些練習的感受，（七年級上學期的學生）可能並不明白它們的意義，也不知道它們有什麼用，反正數學課就是這樣。如果教師善於經營，能讓學生把這些練習當作遊戲而樂在其中，那當然就值得做。否則，這類計算練習有以下幾點值得商榷之處。

（一）學生的需求

從需求面來看，一個人除了會在學校的數學課遭遇這種算式以外，試問還會在哪個場域出現如此的計算需求？當然，沒有人是全知的，沒人能夠肯定回答這個問題。可是教師不妨以成人的經驗，客觀地評估前述問題的「可能性」；如果只是在不確定的未來有著稀薄的需求可能，就可以評估它在「生活」中屬於低需求。此處的「生活」不僅指日常生活，還包括職業生活與社會生活。

對學生而言，最切身的生活是「學校生活」。在學校生活中，學生有學習的需求及考試的需求，因此教師也該將這些需求考慮在內。先討論學習需求，在數學課程之外，有沒有處理上述算式的需求？筆者為了全面理解中學教育，長期閱讀各學習領域的教科書，可以肯定其他領域無此需求；筆者建議數學教師不妨多閱讀其他領域的教科書，從中取得跨領域統整教學的動機，也藉此了解學生的知識狀態。在數學課程中，我們都知道七年級立即的計算需求來自於一元一次方程與二元一次方程的求解、方程式的代入求值，以及比例式與正反比的求解。以數學教師的專業來判斷，應該都會同意，前述的數學學習內容並不需要計算如上的算式。就算將學習範圍延伸到八年級和九年級，應該也會獲得同樣的結論；至於更遠以後的學習需求，在教育原理上本來就不必提前到七年級來準備，所以不必討論。

如果讀者指出：求解 $\frac{11}{3}x - \frac{2}{7} = -66$ 需要(1)中的第三式，則筆者有兩點回應：

第一，學生應該都會以兩步驟來求解，先做 $-66 + \frac{2}{7}$ ，再乘以 $\frac{11}{3}$ ，不會併成一式來做；而且如果移項法則學得好，也不需經過 $-66 - \left(-\frac{2}{7}\right)$ 之程序。第二，如果以兩步驟求解，就失去了應用分配律的機會，但是求解方程的目的在於解決問題，而不在於求解的計算過程，所以，學生應習得的是建構方程與解方程的程序，而不是計算的技巧。因此，教師讓學生做基本練習時，都會設計簡單的數據而避免如上的複

雜數字。當學生在真實問題中遭遇複雜數字時，應當使用工具來完成計算；人之所以有別於其他動物，就是能夠運用高度複雜的工具，不是嗎？

接著討論學生的考試需求。校內的平時測驗或定期考（段考、期末考）是教師能控制的，如果教師不挑選這類題目，學生就沒有這項考試需求。素養課程必須包括素養導向的評量，而評量的目標本來就該與教學目標一致，如果在教學時就已經知道某類型的內容不在教學目標之內，那麼評量時當然就不會出現相關的題目。

可是學校教師無法預測國中畢業會考的題目。考試絕對領導教學，這是我們接受的事實。根據筆者的實地了解，會考的命題委員出於「善意」將類似(1)的題型放在會考試卷中，他們認為那是送分題，可以安定考生的心情。例如，以下計算題分別是民國104年與105年的會考第一題及第二題：

$$\left(-1\frac{1}{2}\right) \times \left(-3\frac{1}{4}\right) \times \frac{2}{3} \cdot (-5 - (-11)) \div \left(\frac{3}{2} \times 4\right)$$

但是國立臺灣師範大學心理與教育測驗研究發展中心警覺到，這樣的題型可能會引起「誤會」，使師生以為它是重要學習目標而加強練習；另一方面，會考也從民國106年起朝向素養理念而調整其評量試題，使得測驗基本計算能力的題目更加單純，而不至於如(1)那麼複雜。民國108年與109年會考的基本計算評量題目如下：

$$\left(-\frac{5}{3}\right) - \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 2^3 \times 5^3 \quad (2)$$

希望國中畢業會考的命題方向調整，能夠確實發揮領導教學的功能，讓教師能放心地轉銜到素養課程，不必過度練習不符合學習目標的題目。

(二) 精熟與刻意練習

素養並不排斥精熟，數學素養課程仍然肯定精熟的重要性與必要性。在創造力心理學上，已經知道精熟練習可以造就思考的流暢性，而流暢性則是孵育創造力的重要因素之一。在學習心理學上，也已經知道精熟是為了減少工作記憶的負擔，使得學生能夠學習更進一步的知識或技能。教師必須秉持專業，以學生的需求為中心，來判斷有益於個別學生的精熟練習。以(2)的基本計算題為例，筆者肯定它們屬於應精熟的範圍。前面提過，解題的過程通常使用多步驟的二元計算，一次只做兩個數的計算，很少會併式處理。因此，兩個數的二元計算，當兩個數都「不太複雜」的時候，就應該要精熟的計算。所謂「不太複雜」的操作型定義，可由教師評

估：當一般學生心算或筆算所需的時間，小於拿出計算工具輸入算式獲得結果的時間，便是「不太複雜」的數字。

有經驗的教師都知道學生具有個別差異，所以「有益於」學生的精熟練習範圍，是因人而異的。例如，正整數的（正）因數分解是有效執行分數運算及平方根化簡的基礎，必須適度地精熟，可是此一目標卻應有層次的分別。筆者相信20以下的因數分解是所有學生都該在七年級前期就精熟的，事實上，應要在小學畢業前就已經精熟了。至於20~50之間、50~100之間，是另外兩個層次，可以容許有些學生慢一點達到目標，甚至可以容許部分學生達不到目標而改用計算工具。只有少數人能夠精熟100以上的因數分解，這些人是可遇不可求的，應該不會有教師把它當作精熟的目標。

為了精熟，我們需要刻意練習（deliberate practice）。有西方人主張刻意練習是追求卓越的方法，而且寫成了暢銷書（Ericsson & Pool, 2016/2017）。其實，華人都知道勤奮不懈的刻意練習是追求卓越的不二法門，但西方人提醒我們的是，要隨時檢視大目標，確保刻意練習不是浪費資源（個人的時間與精力），而是對準了目標的有效活動。因此，在數學素養課程中，還是可以為了精熟而做刻意練習，但是教師必須有意識地根據學生的需求進行考量，確認所做的功課是有效的刻意練習，而不是白白受苦。如(1)所舉例的算式，很可能不屬於素養課程的學習目標，因此就不在精熟練習的範圍內。相對地，涉及「不太複雜」數字的單步驟如「先乘除後加減」、「分數除法算則」、「分配律」等基本算則，的確是值得精熟的。

（三）學生的感受

前面舉出的是「以學生為中心」而判斷內容需求與精熟需求的思考範例，希望有助於讀者了解所謂「意識」轉變的原理。在討論中，我們確認數學課程確實需要學習基本算則並做精熟練習，可是學生如果未經指點，很難自行理解這些課程的意義。如果學生總是逆來順受，並且獲得「數學課就是這樣」的學習經驗，應該是教師們都不樂見的效果。該如何在這類學習單元中兼顧學生的感受呢？

最上乘的教師能讓學生感覺做這些練習像是玩桌遊，樂在反覆練習之中而達到精熟的目標。可是像這樣明星級的教師畢竟可遇不可求，一般教師不妨以「知行識」課程架構來設計教案，將「識」方面的學習目標適當地安排在講授內容中，或以扎馬步、調嗓子、下腰抬腿這些民俗常識作為類比的例子，讓學生知道這些基本功是廣泛有用的，因此值得下苦功來學習。但前提是：教師站在學生的立場，為學生設計了最合適的課程。

根據108課綱編寫的教科書，應該已經沒有（或大幅刪減）過度複雜的計算題，可是坊間大量的參考書與測驗卷，以及部分教師的講義中，可能還是充斥著如(1)類型的計算題。希望教師能依108課綱的理念轉銜到素養課程，不要「補回」那些被弱化的原有課程。

二、指數與指數律

因為第一小節已經詳細陳述了關於需求、精熟、感受的省思過程，本小節便省略重複性的陳述，而較為直接地關注於學習內容。七年級上學期的第二個新課題就是指數。以國中學生的需求來檢視指數（這也是108課綱的設計理念），國中階段的指數主要是為了支持正整數的標準分解式，例如： $18=2 \times 3^2$ 、 $30=2 \times 3 \times 5$ 。而後者主要是為了支持分數的基本操作：擴分（為了分數加減）、約分（為了乘除和化簡），以及平方根的化簡。另外，還有一個簡單到很多人根本沒注意的用途：多項式相乘，例如： $x \cdot x = x^2$ 。國中生並不需要將分母寫成負指數，例如： $\frac{18}{30} = \frac{2 \times 3^2}{2 \times 3 \times 5}$ 將消去分子、分母的共同質因數而寫成 $\frac{3}{5}$ ，甚少需要寫成0.6，更沒有寫成 3×5^{-1} 的需求。

如果用以上的學生需求作為課程設計的目標，則以下指數計算的練習就顯得過度：

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \div \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^5, \left(-\frac{2}{3}\right)^6 \times \left(\frac{9}{4}\right)^3$$

轉銜到素養課程之後，可以節省過度練習的時間，而專注在第一段列舉的重要需求上，設計有效的刻意練習，讓學生獲得正向的學習經驗。

以同理或共感的方式來看，學生在進入新學習階段的七年級第一個月，將遭遇的新內容有：負數、絕對值、正負混合的計算法則、指數與指數律、科學記號數字。這些內容固然都很基本，但是它們出現在七年級之始是為了後續溝通的需要，而不是在此就要完整學習的意思。如果以學科本位來設計課程，要求學生在進入七年級的第一個月就要完整學習這些主題，並且達到精熟目標，教師是否能同理學生所承受的壓力？

（一）科學記號數字

有些人以為七年級學習指數的原因是為了科學記號數字，前文已經說明並非如

此。科學記號數字僅為十進制小數的一種記法，當它出現的時候，在情境中應有單位與有效位數的觀念。科學記號數字是應自然與生活科技領域的需要而編進數學課程的，數學教師的責任是讓學生明白科學記號數字與一般十進制數字之間的關係，如此而已。在此學習目標上，不必先學完整的指數律，就能做科學記號數字與一般記號數字的互換。七年級數學教師要幫助學生理解且精熟的，就只有這項目標。

其實九年一貫課綱也是同樣的意思，但是108課綱更明確地將科學記號運算安置於十年級，希望七年級徹底刪除諸如 $4 \times 10^{11} + 7 \times 10^6$ 、 $6 \times 10^{24} \div (2 \times 10^{-26})$ 的計算練習。事實上，十年級的數學課程也要注意科學記號數字的跨領域意義，避免純數學的操作。以 $4 \times 10^{11} + 7 \times 10^6$ 為例，將有效位數考慮進來之後，它是個根本不必做的加法；此算式的情境之一，如「郭董的財產加上老師我的財產，總共有多少錢？」。

由此可見，跳脫原有課程的習慣框架，教師除了「意識」轉變之外，仍需要對於課綱有專業的理解，並且多加善用作為一名成年人的生活經驗。

（二）螺旋式的持續學習

有些教師擔心，如果不做完整而精熟的學習，學生很快就會忘了。事實上，一個世紀以前，教育心理學者就知道學生的遺忘是正常的。如果沒有持續使用（也就是一再有複習和增強的機會），則一般人在學完一門課一年之後會忘記50%，兩年之後會忘記75%（Tyler, 1949, p. 73）。關鍵不是學習的當下有多精熟，而是習得之後有沒有持續使用。如同一般理工科的大四學生都不記得定積分的定義（黎曼和之極限），但數學系的大四學生卻多半記得，倒不是因為後者在大一學習微積分課的時候較前者用功，而是因為學完微積分之後，前者可能不再用到積分的定義，但後者一再使用它。教師可以自己學習難度較高之數學的經驗，透過類比來「同理」學生的感受。

教師以自己學習微積分的經驗來同理學生，就知道「持續使用」是幫助學生內化知識（或「帶得走的能力」）的有效方法。此一原理，也是螺旋式課程設計的基本動機。國中階段有幾處明顯的螺旋式課綱規劃，例如：從二元一次方程式到一次函數、從比例式到正反比關係（正比也連結到一次函數）、從摺紙（國小）到尺規作圖到推理幾何等。但是課綱和教科書都難以明確指出每一個適合嵌入複習式內容的機會點，因為它很可能是因人而異的，也很可能忽然出現在解題過程中。素養課程必須倚賴教師「有意識」地抓住幫學生複習或加強概念的機會。

以指數律為例，每當學生遭遇較複雜的約分、擴分、平方根化簡時（如發生在二次方程的公式解），即可暫停一下，複習指數與正整數的標準分解式。另以絕對

值為例，國中階段並不需要解絕對值等式或不等式，絕對值的角色主要用於溝通。當教師遇到要把位移換成距離、速度換成速率、坐標換成到兩軸的距離時，都可以複習一下絕對值。化簡 $\sqrt{x^2}$ 時，或者用數學符號寫出三角形「任一邊大於另兩邊差」時，也適合順便複習絕對值。

教師從學科本位的過度練習節省下來的時間，可在正常的教學脈絡中，伺機加入螺旋式的複習。在新單元的教學例與學習活動中，也要有意識地將過去的知識點連結進來，創造持續使用某些知識或技能的機會，這是幫助學生內化所學的有效方法之一。

三、失焦的代數化命題

前文建議教師將過去的知識點連結進來，但是有一個知識點卻可能被過度連結——解方程。從國中到高中，充斥著將幾何、函數、機率與統計等各種主題，全都改裝成方程問題的例子。因為數學內部的連結性，這種轉換是無可厚非的，可是教師要同理學生所獲得的經驗，是否符合預設的學習目標？方程求解的複雜度，是否有喧賓奪主之嫌？另一方面，這種轉換常常是「數學課」所獨有的，如第一小節所述，學生出了教室就再也遇不到同樣類型的問題。如果是這樣，那麼這種教學活動就該避免。

例如八年級上學期的等差級數，學習目標是在數列具有規律性時（等差），有一種快速獲得總和的算法，此算法也是一種值得學習的思考方法，顯示數學的威力。可是某些教材仍然喜愛將它改編成求解方程的問題，如「等差數列之 $a_1=5$ 且 $5+12+19+\cdots+a_n=365$ ，求 n 」。其實可以想像這種預知總數（或者以總數為目標）求項數的需求情境，但是當課程中充滿了這種無情境的純數學問題，就很難期望學生獲得的經驗是等差級數的妙用與威力。更難過的是，就算有情境，數學教材卻經常以違背常識的方式佈題。如某道情境題（附插圖）：「某人看到一面用長方形磚塊堆疊的牆，最上層有1塊磚，下一層有2塊，再下一層有3塊，依此類推，他數出來總共有276塊，請問共有幾層？」如果在數學課中，學生累積了太多「數學課就是這樣」的學習經驗，可能不會質疑此情境的合理性。但是如果不在數學課中，可能任何人都會質疑：怎麼會有人數完了全部有幾塊磚，卻不知道一共有幾層呢？這個例子顯示，當數學教師心中專注於數學的學科本位，卻忘了以學生立場想像他/她在生活經驗所累積的常識，則情境問題也未必就是素養問題。

數列主題本來就接近代數，將它「方程化」還算自然，但是課程中也充滿了將

幾何「方程化」的例子。例如在八年級下學期，學過三角形內角和為180度之後，如果以「已知三角形之三內角為 x 度、 $x - 10$ 度、 $x + 10$ 度，求 x 」作為教學例題，則學生將獲得何種學習經驗？難道這是我們要展示給學生看的內角和「功用」嗎？其實此題的方程部分幾乎可以心算：立式 $x + (x - 10) + (x + 10) = 180$ 化為 $3x = 180$ ，所以，這道例題還不算太偏離教學目標；至少學生解題時，花在內角和概念的時間與花在解方程的時間差不多。可是測驗卷舉一反三，改編成類似「三內角為 x^2 度、 $x + 50$ 度、 100 度，求 x 」，想像學生解此題所獲得的解方程經驗，應該遠超過內角和的經驗吧？學生做這種題目或許可以增強二次方程的練習，但是應該不會獲得有意義的幾何學習經驗，而且也很難想像在真實情境中遭遇這種問題的可能性。

另有一些並非「數形合一」的幾何「代數化」例子，例如學過三角形的兩邊和大於第三邊之後，假設 a 、 b 、 c 為三角形的三邊長，要學生「化簡 $|c - b - a| + \sqrt{(b - c - a)^2}$ 」。想像學生解題的心理歷程，花多少時間在三角形邊長關係上？花多少時間在代數操作上？而花掉這些時間所獲得的學習經驗，有多少比例提升了三角形邊長關係的理解、洞察和應用？更別說「去絕對值」並非國中階段的內容。以學科本位來看，此題相當有創意，是一道絕妙好題，但若改以學生為中心和素養導向來看，則此題應該割愛。

因為「數形合一」是威力強大的數學思維方法，所以，幾何問題的「代數化」是正當的。可惜國中階段因為沒有坐標幾何，所以數形合一的發揮機會不多。只要能增強學生對於學習目標（幾何課題）的正向經驗，代數化就是值得嘗試的途徑。例如提醒學生，我們已經知道有邊長3、4、5的三角形，以下提問應該有助於提升三角形性質的洞察：「是否任意三個連續整數，都能成為三角形的邊長？」。

至於函數與機率統計學習主題的「方程化」或「代數化」例子，所涉的概念較為細微（subtle），需另闢專文來論述。簡單地說，國中階段的一次函數與二元一次方程式之教學內涵幾無差別，亦即課程中無法分辨兩者的內涵差異，一次函數被視為二元一次方程式的特殊形式，而且一次函數的教學似乎都未連結正比關係作為先備經驗，使得學生可能只感受到三個單元彼此「很像」，卻難以感受學習三種如此相似之概念的意義，也就是未提供有意義（make sense of）的學習經驗，這是國中階段較為遺憾的狀況。新版教科書在這些單元之間的連結還是很弱，因此，特別有賴於教師在教學時適度補充。

肆、結語

本文以原有之國中階段數學教科書、習作或測驗卷中常見的教學例或評量試題，作為具體的範例，說明如此的教學與評量為何不符合素養課程的精神，在若干處也提出正面表述的範例。本文的論述依據，是將教育理論本來就重視的學習經驗，連結到數學領綱第四項理念「數學（課程）應提供每位學生有感的學習機會」，並引進以人為本的設計思考原則與方法，歸納為素養課程的實踐，端賴現場教師有意識地「同理」學生的感受，進而設計符合學習目標且「有感」的學習經驗。

本文認為課綱與教材皆為無機物，能為課堂注入靈魂的，是教師。課綱與教材再怎麼自我標榜符合素養精神，都難以成為Goodlad所謂的「體驗的課程」，也就是學生實際感受到的學習經驗。能夠將課程導向素養、培育具備素養之國民的，只有教師，而教師如何從原有的學科導向課程轉銜至素養導向課程的關鍵改變，就只是意識轉變的一念之間而已。

參考文獻

- 呂秀蓮（2019）。課綱為本課程設計經驗之研究：以國中教師為對象。《教育實踐與研究》，32（1），1-32。[Lu, H.-L. (2019). A study on the experience of curriculum based course design: For secondary school teachers. *Journal of Educational Practice and Research*, 32(1), 1-32.]
- 林碧珍（2020）。數學奠基活動遇見臆測活動：扇形的教學設計。《臺灣數學教師》，41（1），26-39。doi:10.6610/TJMT.202004_41(1).0002 [Lin, P.-J. (2020). Just do math meets math conjecturing-inquiry: A teaching activity for circular sectors. *Taiwan Journal of Math Teachers*, 41(1), 26-39. doi:10.6610/TJMT.202004_41(1).0002]
- 教育部（2018）。十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要。取自<https://www.naer.edu.tw/files/11-1000-1594.php> [Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines for 12-year basic education: Mathematics*. Retrieved from <https://www.naer.edu.tw/files/11-1000-1594.php>]
- 黃毅英（主編）（2016）。《教書？教數？育人？數學教科書論述》。香港：香港數學教育學會。[Wong, N.-Y. (Ed.). (2016). *Textbooks teaching? Mathematics teaching? Persons nurturing?: A discourse on mathematics textbooks*. Hong Kong, China: Hong Kong Association for Mathematics Education.]
- 黃毅英、鄧國俊、霍秉坤、顏明仁、黃家樂（2007，3月1日）。「以兒童為中心」數學教育再思：半世紀香港小學數學課程發展的啟示。《臺灣數學教師電子期刊》，9。取自<https://www.airitilibrary.com/Publication/Index?DocID=18156355-200703-201311040012-201311040012-3-25> [Wong, N.-Y., Tang, K.-C., Fok, P.-K., Ngan, M.-Y., & Wong, K.-L. (2007, March 1). Rethinking the “pupil-centered” math education: Inspirations of half-century’s math curriculum developments for Hong-Kong primary schools. *Taiwan Journal of Math Teachers*, 9. Retrieved from <https://www.airitilibrary.com/Publication/Index?DocID=18156355-200703-201311040012-201311040012-3-25>]
- 單維彰（2018）。中學數學教育的半世紀回顧及其啟示。《教育研究月刊》，294，4-18。doi:10.3966/168063602018100294001 [Shann, W.-C. (2018). A reflection on the secondary math education for the last half-century. *Journal of Education Research*, 294, 4-18. doi:10.3966/168063602018100294001]

- 單維彰 (主編) (2020)。分科教材教法：中學數學教材教法。臺北市：五南。[Shann, W.-C. (Ed.). (2020). *Instructional materials and methods: The teaching materials and methods for high school mathematics*. Taipei, Taiwan: Wu-Nan Books.]
- Ericsson, A., & Pool, R. (2017). 刻意練習 (陳繪茹, 譯)。臺北市：方智。(原著出版於 2016) [Ericsson, A., & Pool, R. (2017). *Peak: Secrets from the new science of expertise* (H.-R. Chen, Trans.). Taipei, Taiwan: Fine Press. (Original work published 2016)]
- Brown, T. (2008). Design thinking. *Harvard Business Review*, 86(6), 84-92.
- Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work: Coping with multiple theoretical perspectives. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 3-38). Greenwich, CT: Information Age.
- Goodlad, J. (1979). *Curriculum inquiry*. New York, NY: McGraw-Hill.
- Swan, M. (2014). Design research in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 148-152). Dordrecht, the Netherlands: Springer.
- Tyler, R. W. (1949). *Basic principles of curriculum and instruction*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.
- (本篇已授權收納於高等教育知識庫, <http://www.ericdata.com>)