MAR 2024
651

科學月刊
SCIENCE MONTHLY

同場加映・整合城市中繁雜數據的黑客松競賽

經典專欄・如何防治肆虐全球的臭蟲危機？

焦點新聞・南極首次發現禽流感威脅企鵝存亡

未來城市進行式

如何透過數據和科技，打造宜居又永續的智慧城市？

B&W積木創意工作室

NT$280
ISSN:0250-331X

超過300年的「倍立方」探究之旅

古希臘人對平方軌跡的探索

單維彰
中央大學數學系、師資培育中心、文學院學士班合聘教授。

不曉得讀者是否曾聽過這種說法：「古希臘的數學不重實用而重理論，這個特徵流傳到歐洲造就了西方文明。」筆者在這裡想要提議另一個看法，結果一樣但原因與過程略為不同。筆者認為古希臘數學並無不重實用的意思，他們研究數學的初心也具有實用目的——酬神，也就是答謝神或取悅神。在一個相信神能斷定死生禍福、管控風雨雷震的社會裡，還有什麼比酬神更實用、更要緊的文化活動？

Take Home Message

- 古希臘人認為必須用真解——也就是幾何方法，而不是測量才能求出真解，並且為了解決倍立方問題研究平方軌跡。
- 平方軌跡的一般形式是 $y^2 = ax$，其中 a 是一個給定的正量，也就是某個指定的線段，稱為「標準桿」。
- 在阿波羅紐斯、帕布斯等人的努力下，找出了許多平方曲線的性質，此曲線也在光學、重力學領域有重要應用。

古希臘的數學確實獨步於其他文明，但起因是他們認為必須用「真解」酬神。例如想要將一塊正方形的地基放大一倍，也就是從一平方單位變成二平方單位，希臘的匠師或地政幕僚應該能夠像其他文明的同儕（例如巴比倫、印度、中國），知道要把原正方形的邊長放大成1.41 倍。可希臘的神職人員、菁英分子知道那是有瑕疵的量，並不是真解。他們知道要以原正方形的對角線為邊長去做出新的正方形，那才是真解。他們當然明白，一旦在地上畫出對角線，做直角畫出正方形地基肯定會產生誤差。但沒關係，那是人間的瑕疵，在「屬神」的純粹世界裡，他們的幾何方法是沒有瑕疵的真解，而這才是神給他們的考驗。

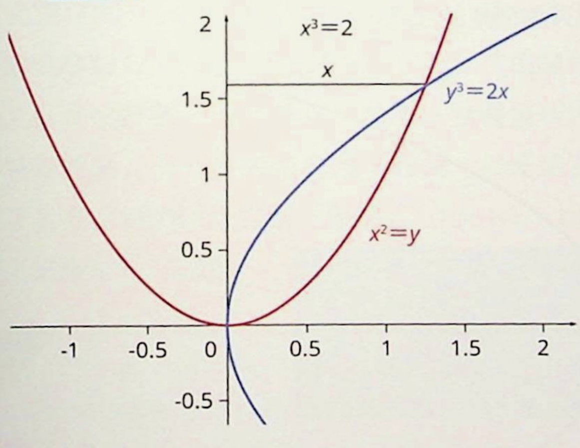
找出「倍立方」問題的解答

基於同樣的宗教信念，當希臘人面臨「倍立方」問題：將一座正立方體神殿的體積放大一倍，也就是從一立方單位變成二立方單位，他們也不能接受坊間工匠的方法——把原立方體的邊長放大約 1.26 倍，而必須使用幾何方法。這就讓古希臘菁英展開了為期約 300 年的長途探究。

最早的突破性概念是將 $x^3=2$「擴編」為 $x^4=2x$，然後令 $x^2=y$，則 $y^2=2x$。如果可以沿著互相垂直的兩條線畫出 $x^2=y$ 和 $y^2=2x$ 這兩條「平方軌跡」，則兩條軌跡的交點就能決定真解 x 的線段（圖一）。

由於古希臘人沒有代數符號、方程式、直角坐標系，他們全用文字和比例關係來思考和溝通，過程相當繁複。但筆者相信現代人（至少我自己）應該沒有耐心閱讀古希臘的忠實翻譯，因此下文皆直接以現代符號表示。順帶一提，當數學講二次函數的時候寫 $y=x^2$，但是講拋物線的時候卻是寫 $x^2=y$，這兩條等式不是一樣嗎？它們確實一樣，但是把拋物線寫成 $x^2=y$ 已經是 2000 年以來的習慣。

圖一



沿著互相垂直的兩條線畫出 $x^2=y$ 和 $y^2=2x$ 這兩條「平方軌跡」，則兩條軌跡的交點就能決定真解 x 的線段。（資料來源：陳玉芬）

古希臘的菁英社群（包括神職人士）追求真解，所以要杜絕測量且堅持以尺規作圖，並特別強調「尺」沒有刻度，只能用它畫線而不能用它測量。但他們一時找不到作 $x^2=y$ 的尺規畫法，所以不稱它為圖形（graph），而稱為軌跡（locus）。軌跡是由滿足某些條件的點聚集而成的曲線或曲面，若用現代話語來說，軌跡就是方程式在坐標平面或坐標空間中對應的圖形。

找不到尺規畫法的確是個遺憾，古希臘菁英一面前仆後繼地嘗試，一面從不同層面延伸思考平方軌跡。例如把倍立方化為連續比例問題 $1:x=x:y=y:2$，再把它一般化為任給 a、b 兩個正量，求兩個中介量 x、y 讓 b 連續比例到 a，也就是 $b:x=x:y=y:a$。

平方軌跡 $x^2=y$ 和 $y^2=2x$ 的一般形式是 $y^2=ax$，其中 a 是一個給定的正量，也就是某個指定的線段，稱為「標準桿」（latus rectum）。平方軌跡的想法是：作一射線，稱端點為 O，線上一點 P，

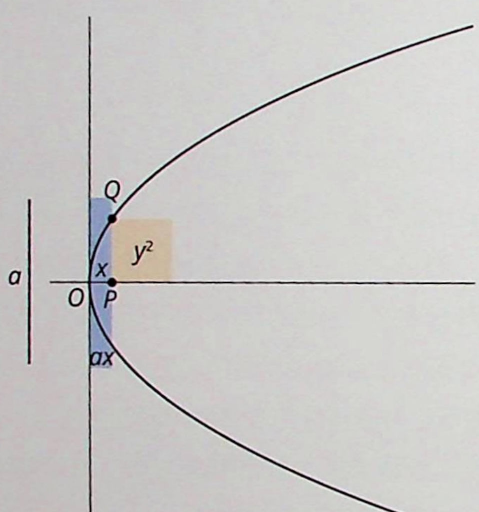
令 $\overline{OP}=x$，以 P 為端點作一線段 $\overline{PQ}$ 垂直於射線，使線段圍成的正方形面積剛好等於以 x 為寬，固定標準桿為高的長方形面積，則所有滿足前述條件的 Q 點聚集而成的曲線就是平方軌跡。取 $\overline{PQ}=y$，則 $y^2=ax$，圖二舉三個點為例。

在平方軌跡上有兩個顯然的特殊狀態。例如在圖三中，一個發生在 P 點距離端點一個標準桿的位置，另一個發生在 P 點距離端點 $\frac{1}{4}$ 個標準桿的位置。在這兩個特殊位置，x 分別是 a 與 $\frac{a}{4}$，而 y 則分別是 a 與 $\frac{a}{2}$。

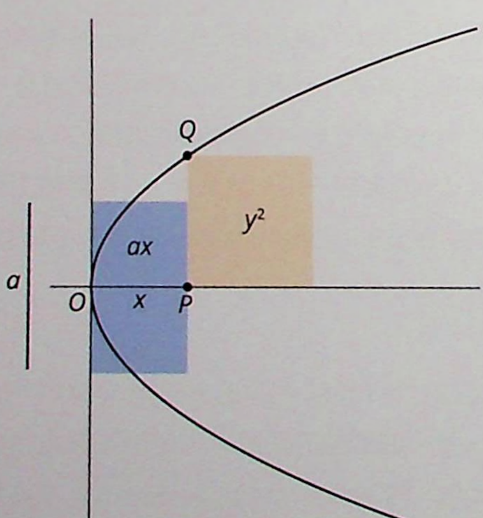
按照前面概念，平方軌跡只存在於射線的一側。但希臘人漸漸明白，可以將它對著射線鏡射，形成一條對稱的平方曲線；這時候，射線就成為平方曲線的對稱軸。

圖二

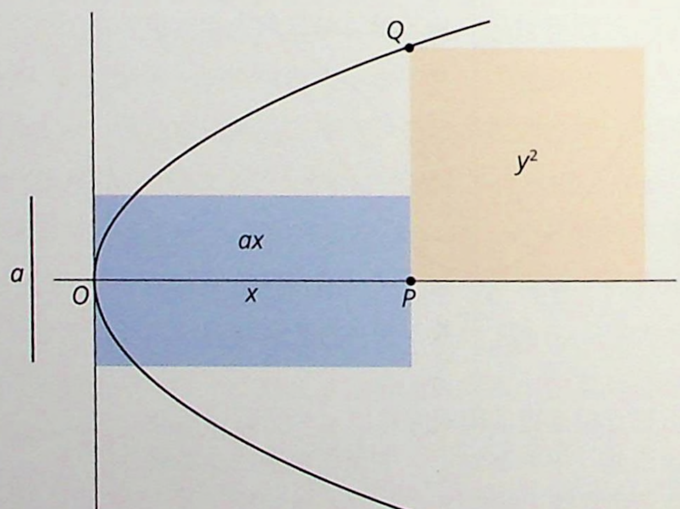
a 作一條射線，端點為 O，線上一點 P。



b 以 P 為端點作一線段 $\overline{PQ}$ 垂直於射線。

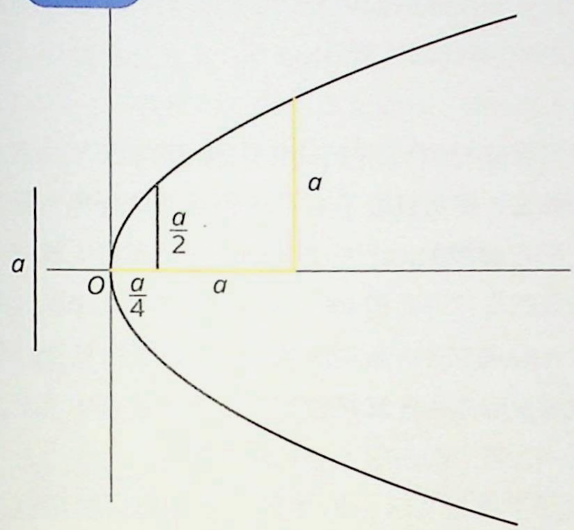


c 該線段圍成的正方形面積剛好等於以 x 為寬，固定標準桿為高的長方形面積，所有滿足前述條件的 Q 點聚集而成的曲線就是平方軌跡。



（資料來源：陳王芬）

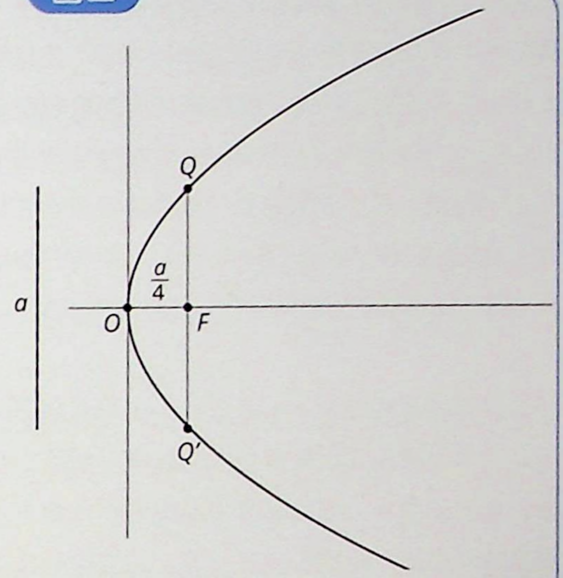
圖三



在平方軌跡上的兩個特殊狀態：P 點距離端點一個標準桿的位置，以及 P 點距離端點 $\frac{1}{4}$ 個標準桿的位置。在這兩個特殊位置，x 分別是 a 與 $\frac{a}{4}$，而 y 則分別是 a 與 $\frac{a}{2}$。

（資料來源：陳玉芬）

圖四



F 點具有一些特殊的幾何性質。

（資料來源：陳玉芬）

前面觀察的一個特殊點 P：當 $\overline{OP}=\frac{a}{4}$ 時，它決定的軌跡點 Q，以及 Q 的對稱點 Q'，形成的線段 $\overline{QQ'}$ 長度恰好是一個標準桿。希臘人陸續發現這個特殊的點 P 有一些特殊的幾何性質，於是給它取了名字；我們就說它是「熱點」（focus）（註）吧，記作點 F（圖四）。

註　「熱點」是 focus 的暫時翻譯。其實 focus 並不是古希臘使用的名稱，是很久以後克卜勒提出的。Focus 是拉丁文「火爐」的意思，克卜勒在闡述行星的橢圓軌道時用了這個字。筆者認為他選用此字不是因為橢圓的光學性質，而是因為太陽座落在這個位置。

解析平方曲線的多種性質－阿波羅紐斯

到此為止的發展都相當古老，可能比歐幾里得（Euclid）還早。但可能因為當時平方曲線沒有尺規作圖的方法，柏拉圖（Plato）不承認它是倍立方問題的「解」，所以也就沒有被歐幾里得收入《幾何原本》（*Elements*）。事實上，《幾何原本》全面探究了圖形，但卻完全不碰觸軌跡。在歐幾里得之後，有才華的希臘菁英必須掙脫《幾何原本》才能超越歐幾里得。在歐幾里得引領的一波後浪當中，最突出的是阿基米德（Archimedes）和阿波羅紐斯（Apollonius）。例如《幾何原本》講解完了正規多面體，阿基米德則另創半正規多面體。

詳細的人名與地名都可以輕易查到資料，在此不再叨敘。筆者在此僅大致釐清年代順序：柏拉圖大約逝於西元前347年，柏拉圖可能在歐幾里得出生前20年去世，阿基米德可能在歐幾里得去世前20年出生，而阿波羅紐斯可能在歐幾里得去世後20年出生（約為西元前240年）。東方的秦始皇嬴政，則在阿基米德與阿波羅紐斯之間出生。

特別要提醒讀者的是，「真正」的史蹟其實已經不能恢復，許多傳說其實是人為杜撰，或者出自後人善意的褒揚，因此閱讀古希臘數學故事時，要把古代史的不確定性放在心頭，更要勵行媒體素養以常識杜絕假消息。例如盛傳阿基米德製造拋物面鏡，把陽光聚焦成高溫槍，射燒來襲的戰艦。從歷史知識來判斷，阿基米德固然是天才，但他可能並不知道拋物線的光學性質；就算他知道，當時的工藝技術應該還無法造出拋物面鏡。從常識來看，拋物線的焦距固定，一面鏡子只能射擊固定距離的船隻，難道敵船會停在那裡等著挨射嗎？難道守軍製造了100面焦距不同的拋物面鏡，以便射擊各種不同距離的敵艦嗎？而敵軍一定要在豔陽天發動攻勢嗎？學術上值得信賴的文本，可閱讀洪萬生的《數之軌跡》（第一輯）和蘇惠玉的《追本數源》。

既然《幾何原本》不談軌跡，後世英雄就可以藉由軌跡而發跡。阿基米德在平方曲線上的最高成就，相當於發現了它的積分公式。曲線上任兩點所連成的線段稱為弦，阿基米德推導出平方曲線與任一弦所圍的面積公式。他發明的方法幾乎就是1900年後的「積分」。

直到現在，我們的平方曲線都還沒有被正式命名，而給它一槌定音取了名字的是阿波羅紐斯。因為在平方曲線上，正方形面積 y^2「恰等於」標準桿形成的長方形面積 ax，所以取名為parabola：字根para為併立、相對的意思，引申為恰好。有「恰等於」的曲線，當然也有「不足／小於」和「超過／大於」的曲線，前者是「橢圓」（ellipse），這個字就是「缺」的意思；後者是「雙曲線」（hyperbola），原意是「過剩」。阿波羅紐斯把這三種軌跡整合在對頂圓錐上，併稱為圓錐曲線或圓錐截痕（conic sections）。

縱使阿波羅紐斯發現了許多關於平方曲線的性質，卻始終拿不下希臘數學的聖杯：平方曲線的尺規作圖法。事實上，阿基米德和阿波羅紐斯都在某種程度上鬆動了他們前輩的「尺規作圖」道德規準，例如阿基米德用「有刻度的尺」解決了三分角問題。在阿波羅紐斯身後，希臘城邦正式被羅馬統治，希臘文明逐漸黯淡，卻仍孤燈不滅地傳延了500年，帕布斯（Pappus）則被視為希臘傳統下的最後一位數學家。

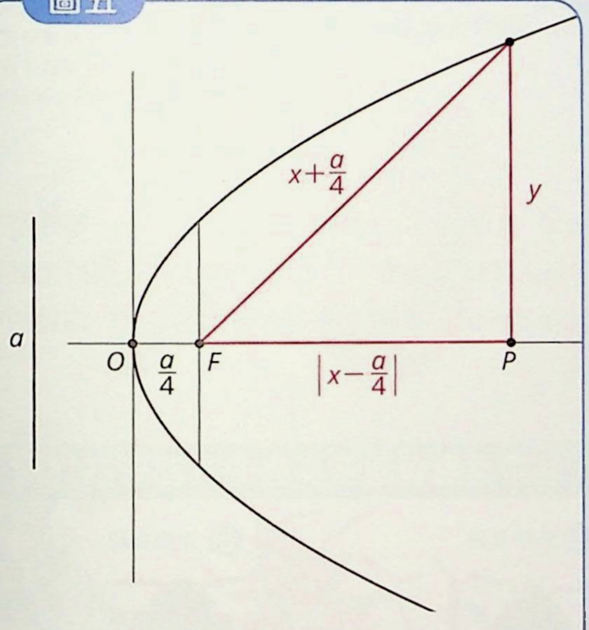
掌握平方曲線的尺規作圖—帕布斯

帕布斯教給我們平方曲線的準線性質，也就是現在高中課本裡常用的定義。若掌握了代數的技術，準線性質便只是畢氏定理，並不困難（圖五）。對

稱軸上任一點 P 到 F 的距離是 $\left|x-\frac{a}{4}\right|$，而 $y^2=ax$，根據畢氏定理，P 對應的軌跡點到 F 的距離恆為 $x+\frac{a}{4}$。在縱軸左邊 $\frac{a}{4}$ 單位處放一條鉛直線作為準線，則平方曲線上任一點與 F 的距離等於它與準線的距離。準線性質是最接近尺規作圖精神的製圖方法，且可以製造機械工具來實現它。

古希臘是有光學相關的知識，歐幾里得就寫過一冊《光學》（*Optics*），可是這本書探討的是關於視覺的幾何，並沒有透鏡與反射鏡。

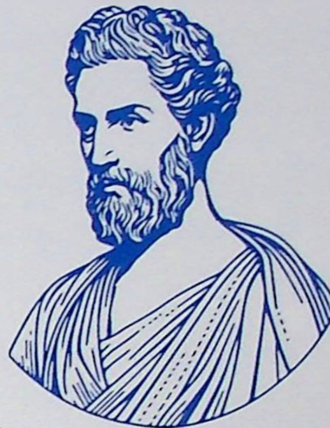
圖五



對稱軸上任一點 P 到 F 的距離是 $\left|x-\frac{a}{4}\right|$，而在 $y^2=ax$ 上，P 對應的軌跡點到 F 的距離恆為 $x+\frac{a}{4}$。在縱軸左邊 $\frac{a}{4}$ 單位處放一條鉛直線作為準線，則平方曲線上任一點與 F 的距離等於它與準線的距離。

（資料來源：蘇玉芬提供）

帕布斯



（Adobe Stock）

圓錐曲線的光學性質是現在說不清的歷史，這些性質的幾何原理可能在阿波羅紐斯到帕布斯之間發展完成，但當時的工藝技術無法將這些幾何性質實踐到光學器具上。因此圓錐曲線在光學上的實踐，需等到帕布斯過世後 500 年或更久，才在伊斯蘭文明和歐洲文明中發展起來。在那之後，幾何「熱點」才變成光學「焦點」，而「標準桿」則變成了「正焦弦」。

至於平方曲線的重力學性質，也就是自由拋射物的軌跡，當然是克卜勒（Johannes Kepler）、伽利略（Galileo Galilei）、牛頓（Sir Isaac Newton）接力完成的偉大事業之一，那是 17 世紀的事。到了 19 世紀，歐洲人總算證明了希臘菁英一直找不到的聖杯——平方曲線的尺規作圖法——是不存在的。

直到 19 世紀中葉的鴉片戰爭之後，平方曲線才傳入清朝咸豐時代的中國。當時可能來不及釐清它 2000 年來的歷史，直接採取最後一個重要特徵，把它翻譯成「拋物線」。