科學月刊
SCIENCE MONTHLY
SEP 2024
657

遙望天空

電離層如何影響我們的生活？
從地球通訊、導航到太空天氣，

焦點新聞・培養肉寵物食品即將在英國上市
經典專欄・告別有機溶劑殘留的超臨界萃取技術
科學映像・細數漫天星辰的軌跡——金天獎

NT$280
ISSN:0250-331X
09

Math

《九章算術》缺少的臨門一「角」

角度、弦表與三角函數的發展

Public domain, Wikimedia Commons

單維彰
中央大學數學系、師資培育中心、文學院學士班合聘教授。

Take Home Message

- 古中國數學典籍《九章算術》遺留了「弧弦互算」問題，因缺乏「角」的概念而無法解決，顯現出中西方數學發展的關鍵差異。
- 角度概念在天文曆法中至關重要，中國數學因無法「弧弦互算」導致曆算落後，進而影響天文學發展。
- 托勒密製作的「弦表」可解決弧弦互算問題，它不僅是早期函數觀念的體現，也為三角函數的發展奠定了基礎。

在《科學月刊》今（2024）年 3 月號刊出的〈超過 300 年的「倍立方」探究之旅 古希臘人對平方軌跡的探索〉一文中，作者提到古希臘數學「並無不重實用」。這邊要提供讀者另一個古希臘數學實用的例子——托勒密（Claudius Ptolemy）的弦表。弦表不但是最早的函數觀念之一，也具體呈現了三角函數（sin、cos 等）的真諦，它還是對數（log）被發明的契機。在本篇文章中，筆者想藉此談一談歷史對數學教育的啟發，特別是闡明「角」與「三角」真正應該學習的素養。

中國最偉大的數學典籍—《九章》

故事要從古中國最偉大的數學典籍——《九章算術》（簡稱《九章》）說起。在進入現代之前，2000 年以來的華人數學家（以前稱為「疇人」）皆是以此書作為標準的數學入門教材。很多人寫過《九章》「有」什麼，但這裡要

說它「沒有」什麼。《九章》有兩個主要的「懸念」：兩道沒有正確公式的題目。

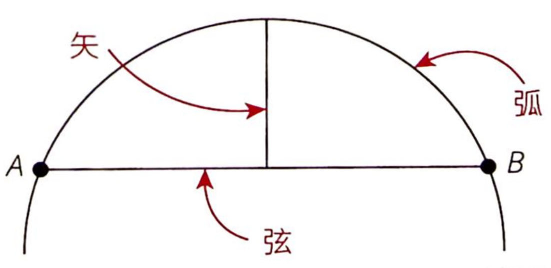
《九章》的第一個懸念是「球體積公式」，這條公式可以作為當代文明進展的一個里程碑。這個懸念還好，不久之後就被南北朝劉宋時期的數學家祖沖之與祖暅解決了。所謂的「祖暅原理」就是在球體積公式的推論過程中出現，可惜目前的教科書都沒有善用這則美妙的歷史故事。漢文明比希臘文明晚了 700 多年抵達「球體積」的里程碑，但相較於其他文明還是算早。

《九章》的第二個懸念「弧弦互算」可就嚴重了，問題發生在〈方田〉章中的「弧田」節，沒能提供一般性的「弦矢求弧」算法。在圓上任取兩點 A、B，這兩點決定的線段稱為 AB 弦；在兩點之間且長度不超過半圓的那一段圓周，則稱為 AB 弧（圖一）（註）。在此配置中，AB 弦和 AB 弧稱為彼此相對的弦或弧。

註

本文所說的「弧」都是「圓弧」的簡稱。

圖一 弦、弧與矢



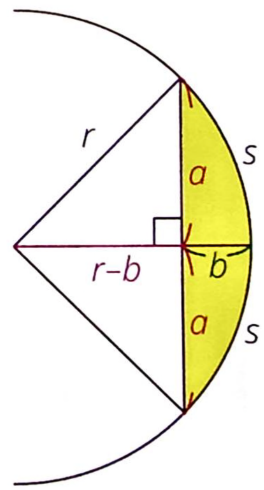
彼此相對的弦與弧圍成的平面區域，在《九章》中稱為弧田，現在則稱為弓形；在弓形內部，弦的中垂線段稱為矢。而「弦矢求弧」的題目意思是：已知弦長與矢長，如何求弧田面積？《九章》沒能給出這題的公式。而這個弧田未解的懸念，便成為中國數學的千年懸案，一直到歐洲數學傳入中國為止，華人始終沒有自己解決這個問題。

解不開的弧弦互算問題

讀者或許會說，弓形面積不就是扇形減去三角形嗎？這個觀念確實正確。三角形的其中一個頂點是圓心，假設已知的弦長為 $2a$、矢長為 b，則三角形面積為 $a(r-b)$，但扇形面積為何？古人已經知道，假如弧長是 $2s$，則這一段弧在整個圓中占的比例為 $\frac{s}{\pi r}$，所以扇形面積是 $\pi r^2 \times \frac{s}{\pi r} = rs$。於是可以得到「弦矢求弧」的公式（圖二）：

$$\text{弧田面積} = rs - ar + ab$$

圖二 弧田面積的算法



其中，圓半徑 r 可以運用畢氏定理從弦矢算出來：$r=\frac{a^2+b^2}{2b}$，但始終找不到從弦矢算出弧長 $2s$ 的公式，也就是無法從 a、b 算出 s。所以「弦矢求弧」也可以說是從弦矢求弧長的問題。而這個問題的本質，其實是「弧弦互算」，也就是在已知半徑的前提下從弧算出相對的弦長，反之就是從弦算出相對的弧長。

讀者如果稍微回憶一下以前曾經學過的公式，會想到我們還需要知道弧所對應的圓心角。這就是關鍵了，東方與西方文明的一個關鍵性的分岔點，發生在這個不起眼的小觀念——角。《九章》及之後的所有中國算書，都沒有討論到圓心角的問題——他們沒想到將弦與弧聯繫起來的關鍵是圓心角，當然也不曾想過要測量角了。因此缺乏角度概念的漢文明，始終無法解答「弧弦互算」的問題。筆者認為，「華人無角」這個歷史評論雖然有些過於簡化，卻大體上不失公允（延伸閱讀）。

以函數解答弧弦互算

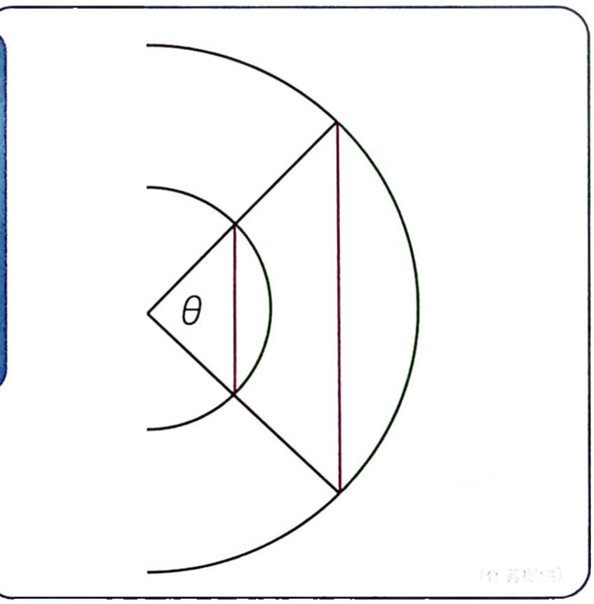
所有圓彼此相似，給定圓心角後，伸縮半徑時只會使得角所對的弦和弧按比例放大或縮小（圖三）；也就是說半徑在這個脈絡裡的角色就像比例常數，並不是問題的關鍵。因此，現代教科書大多令半徑為單位長，而本文也一律以「給定半徑 r」為前提。

我們同時以 θ 表示圓心角，以及它的測量數值（角量）。因為圓具備任意旋轉的對稱性，所以 θ 所對的弧長／弦長只由角的大小決定，與角的方位無關。因此弧長／弦長全然由角量決定，這就是函數觀念：弧長／弦長是所對的圓心角的函數，在計算時分別會用 $\mathrm{arc}\theta$ 和 $\mathrm{crd}\theta$ 表示這兩個函數。小學用「度」（°）作為角量的單位，因此得到 $\mathrm{arc}\theta$ 的公式，也就是函數 arc 的代數式為：$\mathrm{arc}\theta=\frac{\pi}{180}\times r\theta$，定義域為 $0\leqq\theta\leqq 360$。

到了高中改用「弳」作為角量的單位，因此換成另一條公式：$\mathrm{arc}\theta=r\theta$，定義域為 $0\leqq\theta\leqq 2\pi$。弧長公式是「反之亦然」的函數關係，意思是圓心角量決定它所對的弧長：$s=arc\theta$，弧長也決定它所對的圓心角量：$\theta=\mathrm{arc}^{-1}s$。反算的公式為：$\theta=\mathrm{arc}^{-1}s=\frac{180}{\pi}\times\frac{s}{r}$ 度 $=\frac{s}{r}$ 弳。

同樣地，若將角限定在 0°～180°的範圍內，則角 θ 與弦 c 之間也有「反之亦然」的函數關係；圓心角量決定它所對的弦長：$c=\mathrm{crd}\theta$，弦長也決定它所對的圓心角量：$\theta=\mathrm{crd}^{-1}c$。

圖三─弦和弧的比例

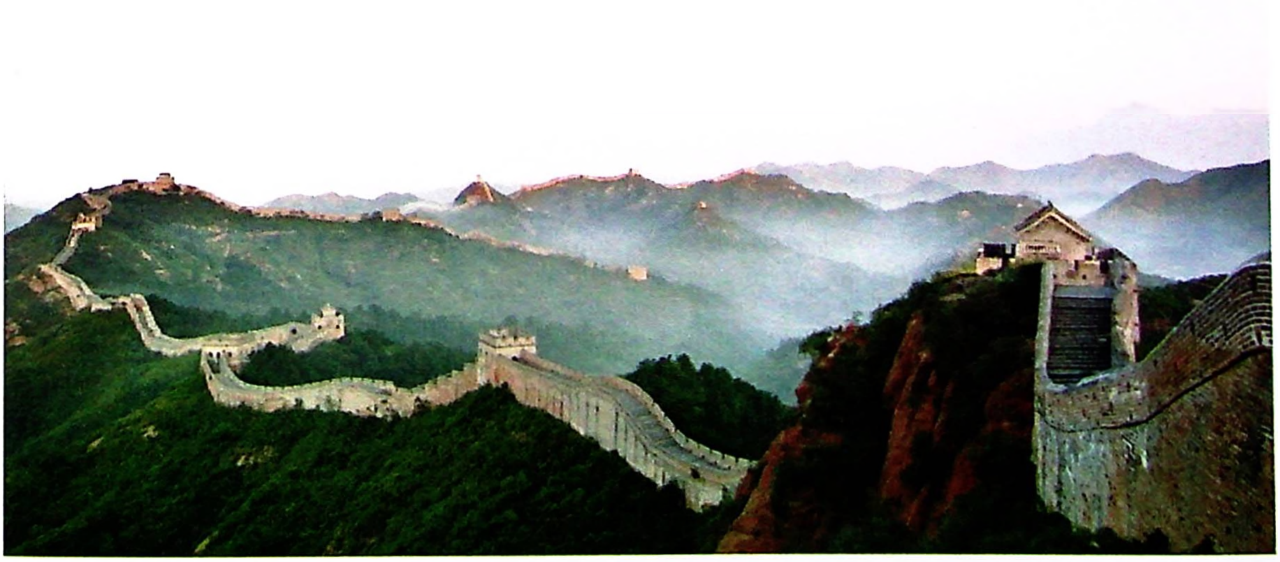


以圓心角為中介，arc 和 crd 兩種函數可以實現「弧弦互算」，而配置如圖二的「弦矢求弧」也能算了：弧長 $2s = \mathrm{arc}(\mathrm{crd}^{-1}(2a))$，題目中的矢長 b 用來決定半徑 r。但問題是 $\theta = \mathrm{crd}^{-1}c$ 只是觀念上的函數，它並沒有代數表達式，也就是說它沒有「公式」，所以還是無法算出。其實歷史還有另一種可能，或許《九章》的作者群及後來的疇人曾思考過圓心角，但是苦於找不到 $\theta = \mathrm{crd}^{-1}c$ 的公式，因此只能停滯不前。

角度與天文曆法的關係

儘管如此，「缺了角」的漢文明仍然有高度的工程成就，不但建構出萬里長城，還打造了南北大運河，而這些工程在建設時都少不了大地測量。由此可見，大地測量並不一定需要角。《九章》的〈勾股〉章提供了足夠測量所需的數學。勾股就是直角三角形，《九章》從不討論它的銳角，只運用它的三邊比就足夠做大地測量了。西方文明使用一般三角形做測量的優點，是可以應用正弦定理與餘弦定理，但這兩個定理都是畢氏定理的推廣（〈勾股〉也有畢氏定理），所以有了角只是在計算上更方便一些，並沒有本質的差異。

真正需要角度概念的是「弧弦互算」，它不但可以解決弦矢求弧問題，更是天文測量的基礎數學，可以說角的威力展現於量天（天文測量），而非量地（大地測量）。缺角對文明的損害，首先發生在天文與曆算。當 19 世紀西方耶穌會的傳教士來到中國時，東方的曆算已經落後，西來會士靠著曆算本領進入欽天監，在朝廷裡找到了立足點。難道西方找到了「弧弦互算」的公式嗎？理論上並沒有，但實際上已經夠用，關鍵人物就是托勒密。



▲ 缺了角的漢文明，仍然建構出萬里長城等需要大地測量的建設。（Adobe Stock）

相對於中國人追求 $c = \mathrm{crd}\theta$ 的計算公式，希臘人則追求它的尺規作圖法，兩者皆不可得。生於希臘文明晚期的托勒密突破了傳統桎梏，他想：就算沒有從角 θ 算出弦 c 的公式，但畢竟 θ 和 c 的對應是固定的，只要運用各種湊合的方法，把 θ 和 c 的對應數值算出來記在一張表格上，就可以取代公式了。想想看，還有什麼比製表更實用的數學？再想想，如果有人願意十年寒窗苦，算出這張表並昭告天下，使任何人不再需要計算、只要查表就知道答案，那個人該是何等的偉大？托勒密就是這樣的偉人。

表格中的 θ 不可能涵蓋 0°～180°範圍內的所有角度，但托勒密推測未來 500 年的測量儀器最細只能觀測到 $\frac{1}{2}$°，所以他決定從 $\frac{1}{2}$°開始，每隔 $\frac{1}{2}$°算出 θ 所對的弦長，也就代表解析度是 $\frac{1}{2}$°。不過弦長通常是無理數，表格中的 c 也不可能呈現全部小數。由於實際測量並不需要很多位小數，托勒密決定將「精確度」設為60進制的三位小數(註)，也就是每個弦長的數值準確到半徑的 $\frac{1}{60^3}$。假設半徑為 1 時，弦長的數值準確到 $\frac{1}{216000}$，而這份偉大的成果就是托勒密的「弦表」。

註 60進制的第一、第二、第三位小數位名為分、秒、忽。

因為圓內接正六邊形的邊長等於半徑，所以 crd60°＝1。古希臘數學家歐幾里得（Euclid）所著的《幾何原本》（*Elements*）一書中有正五邊形的尺規作圖法，托勒密用它推論圓內接正五邊形的邊長，並取得 60 進制的三位小數估計值：crd72°≈ 1 又 10 分 ~~31~~ 32 秒 3 忽（誤差約為 0.000001）。托勒密應用古典的平面幾何知識，證明了 crd 函數的差角公式、和角公式、倍角和半角公式，過程中出現著名的托勒密四點共圓定理。他用這些公式計算 crd(72°－60°)＝crd12°、crd6°、crd3°，因為當時的代數技術不足，托勒密無法推論三倍角公式，所以無法求解 *crd*1°。托勒密另闢蹊徑，證明不等式：

$$\frac{2}{3}\mathrm{crd}\frac{3}{2}^\circ \leqq \mathrm{crd}1^\circ \leqq \frac{4}{3}\mathrm{crd}\frac{3}{4}^\circ$$

而後，托勒密用它「夾擠」出 crd1° ≈ 1 分 2 秒 50 忽（誤差約為 0.0000007）。最後，弦表提供了 $\mathrm{crd}\frac{1}{2}^\circ$、crd1°、$\mathrm{crd}1\frac{1}{2}^\circ$、crd2°等的 60 進制估計值。假如真的出現不在表內的角度，例如需要估算 $\mathrm{crd}47\frac{23}{60}^\circ$，托勒密也提供了內插算法。這張表經過阿拉伯傳入歐洲，一直用到 16 世紀。

伊斯蘭文明在托勒密弦表的基礎上創造了三角函數。以正弦為例，令圓心角為 θ，則 $\frac{a}{r} = \sin\frac{\theta}{2}$。我們可以用托勒密的 crd 來定義 sin：$\sin\theta = \frac{1}{2}\mathrm{crd}2\theta$。在當時，三角函數都是沒有公式的觀

▲《幾何原本》於 1482 年的印刷版本。
(Folger Shakespeare Library Digital Image Collection, CC BY-SA 4.0, Wikimedia Commons)

念性函數，它們全都以數值表格呈現。大多數使用三角函數的人並不知道那張表是怎麼來的，就像我們日常使用的語言文字一樣，弦表和三角函數表可以視為文化遺產——它怎麼來的並不重要，重要的是能夠使用它。

對數表的產生

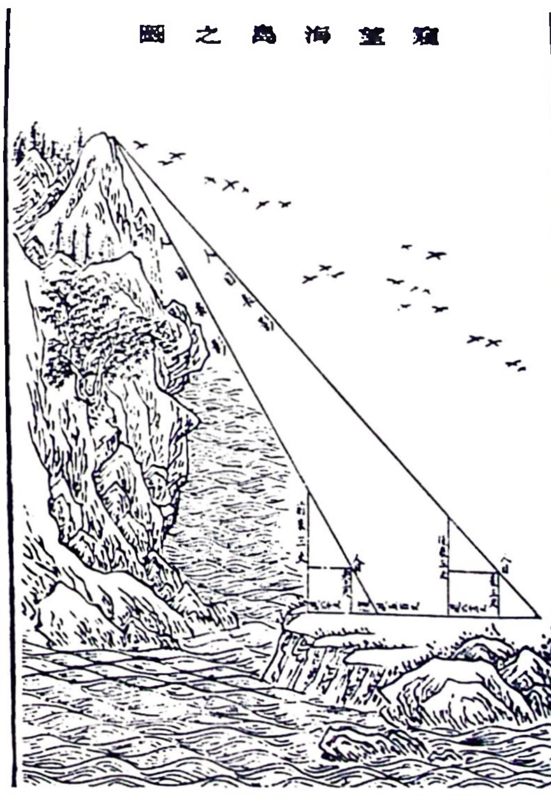
受到弦表的啟發，西方人因此做出了對數表。函數 $y = \log x$ 的意義是 $10^y = x$，當時它也是一個找不到公式的觀念性函數，但有人想到可以製表，用數值表格呈現對數函數。直到現在，臺灣的數學教育仍然延續文化的情緒：過度強調公式。當函數關係沒有公式的時候，我們就不知道該教什麼？不論是三角還是對數，我們的教學經常專注於相關的公式（它們都是次要的公式），卻不學習直接應用這些函數來解決問題，很可能是因為心理上還沒接受「表格」也是函數。

現在我們知道由弦算角的公式需要無窮多步驟的計算，也就是函數 $\mathrm{crd}^{-1}c$ 的代數表達是所謂的冪級數；反之，$c = \mathrm{crd}\,\theta$ 的公式也是冪級數，這不是古人能做到的。如今的主流文化認為「弧弦互算」是牛頓（Isaac Newton）的成就之一，但日本人發現江戶時代的數學家關孝和也做出了同樣的結果，因此感到非常光榮。

華語有牛角、街角、視角（觀點或看法），但它們都不是數學上的「角」。這幾種角對應到的英語字詞各有不同（horn、corner、perspective、angle），顯示中西文化對「角」的概念也截然不同。對我們而言，數學的「角」是一個全然外來的概念。這個事實對數學教育有著幽微而長遠的影響，我們必須特別謹慎以對。最根本的是修改三角比的教學態度：三角比是歷史文化傳給我們的工具，不要追求它的公式，不要專攻它的恆等式，要學習如何用它解決問題。而大地測量並非「角」的重要應用，特別在全球定位系統（global positioning system, GPS）時代，三角測量已經變成人文的（歷史的）學習內容，所以「角」的學習不該聚焦於三角形，而是圓心角。

延伸閱讀

李國偉（1991）。中國古代對角度的認識。數學史研究文集第二輯，內蒙古大學出版社與九章出版社。



▲《古今圖書集成》中的窺望海島之圖，此圖顯示了《九章》的〈勾股〉章提供了足夠用於測量的數學。
(Liu Hui, public domain, Wikimedia)