

數線一點通

文／單維彰（數學系教授） 圖／Shutterstock

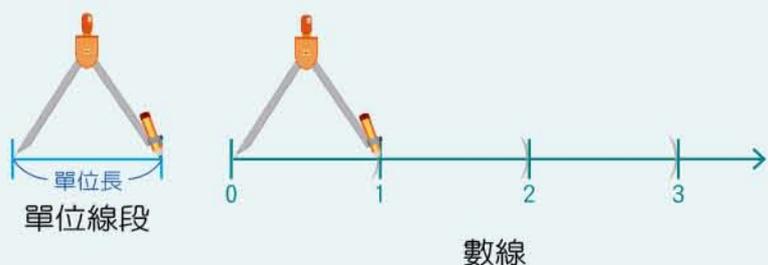
本文要為國中小同學補充大多教科書沒有好好解釋的「數線」。數線為什麼重要？因為數線是一把數學的尺，數學家用它丈量全世界；學習數學，很大一部分就在學習了解這把尺、使用這把尺。六或七年級是正式認識數線的適當時機，不過任何時候都可以預習或複習。

「單位長」選定後不容改變

第一個關鍵是：單位線段不在數線上。數線是一條直線，可畫長一點或短一點；但單位長是一個固定長度的線段，此線段稱為單位線段，其長度一經選定就不容許改變。好比我們如果用「吋」做測量單位，就不能隨意改變「吋」的長度。在學校裡，課本或老師可以指定單位長，引導同學們學習；在社會裡，單位通常是公會或政府決定的。現在，全世界都習慣把數線畫成水平線，令左端為射線的端點，標記它的刻度為0，在右端畫上箭頭，表示右邊比較大。有些人說數線的箭頭表示它無限延伸，其實沒說到重點。

利用圓規，我們可以依照下列步驟在數線上畫出一組刻度：先把圓規的針尖和筆尖對準單位線段的兩端點，然後鎖緊圓規，此時它的針尖和筆尖之間的距離就是單位長。將針尖刺在0的點，筆尖在右側畫弧，與數線的交點畫出刻度1；然後針尖刺在刻度1的點，筆尖在1的右側畫出刻度2；然後針尖刺在刻度2的點，依樣畫出刻度3，如圖一。

圖一

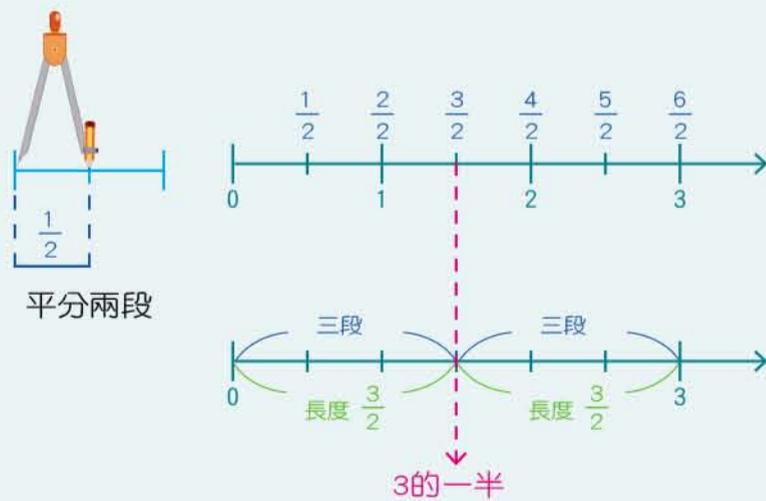


什麼是「數」？數就是數線上的刻度。以後會更精確的說它們是「實數」，但平常說「數」就可以了。用完整單位畫出的刻度1、2、3……等，叫做「整數」。一把只有整數刻度的尺，顯然不怎麼夠用，數線上還有其他刻度。

畫出數線上的「分數」

把單位線段平分兩段，也就是兩段為一單位。把圓規的針、筆距離調整成一段長，針尖刺在0的點向右畫弧，筆尖畫出的刻度寫 $\frac{1}{2}$ ，讀為「二分之一」；把針尖刺在 $\frac{1}{2}$ ，向右畫出的刻度寫 $\frac{2}{2}$ ，讀為「二分之一」；再依序畫出 $\frac{3}{2}$ 、 $\frac{4}{2}$ 、 $\frac{5}{2}$ 、 $\frac{6}{2}$ 等。這些用二等分單位畫出來的刻度，就叫做「二分數」，如圖二。

圖二



生活大智慧

從圖二可看出 $\frac{2}{2}$ 和 1 是同一刻度， $\frac{4}{2}$ 和 2 是同一刻度。這是因為兩段的「半單位」就是一整個單位，四段的半單位就是兩個單位，所以數學說 $\frac{2}{2}=1$ 、 $\frac{4}{2}=2$ 、 $\frac{6}{2}=3$ 。

同學們可能記得： $\frac{3}{2}$ 的意義是 3 的一半。沒錯！數本來是數線上的刻度，但是它可以輕易搖身一變為長度，也就是從 0 到刻度的線段長。例如，從 0 到 3 的線段長度是 3，而刻度 $\frac{3}{2}$ 恰好在這個線段的正中央——它跟 0 距離三段，跟 3 也距離三段——所以它把長度為 3 的線段平分兩半，每半的長度是 $\frac{3}{2}$ ，而刻度 $\frac{3}{2}$ 又搖身一變為長度 $\frac{3}{2}$ 。這一段話是希望同學放心：雖然「數」的本意是數線上的刻度，但是它可以引伸或變化來解釋以前學過的所有關於數的知識，不會發生錯誤。

練習題

把單位線段平分三段，請同學用其中一段，在數線上畫出三分數 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{3}$ 、 $\frac{4}{3}$ 、 $\frac{5}{3}$ …… $\frac{9}{3}$ 的刻度，並將 1、2、3 的刻度標示出來。



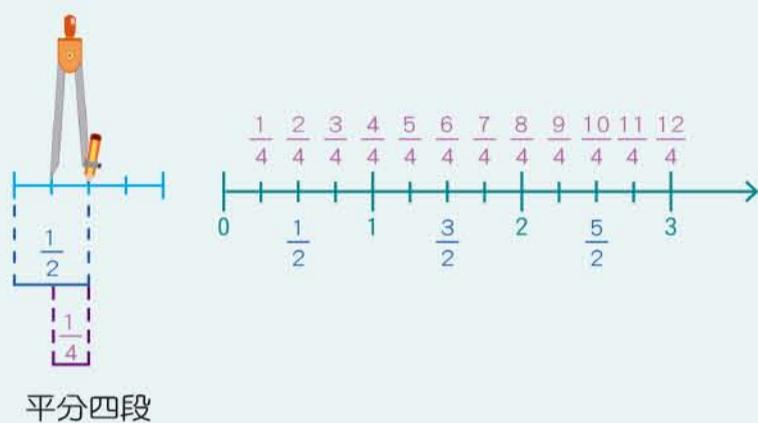
數線上用等分單位畫出的刻度 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{4}$ 等，通通叫做「分數」。也就是說，二分數、三分數、四分數……等，通稱為分數。

什麼是「等值分數」？

參照圖三：把 $\frac{1}{2}$ 單位再平分兩段，相當於把單位長等分四段，每段就是 $\frac{1}{4}$ 單位。用 $\frac{1}{4}$ 單位依序在數線上畫出 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{4}{4}$ 、 $\frac{5}{4}$ 、 $\frac{6}{4}$ ……等四分數的刻度，

可以看到 $\frac{2}{4}$ 和 $\frac{1}{2}$ 重合， $\frac{4}{4}$ 和 1 重合， $\frac{6}{4}$ 和 $\frac{3}{2}$ 重合， $\frac{8}{4}$ 和 2 重合。這是因為 $\frac{1}{4}$ 單位是把 $\frac{1}{2}$ 再平分，所以兩段 $\frac{1}{4}$ 就是一段 $\frac{1}{2}$ 。所以數學會說 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ， $\frac{4}{4}=1$ ， $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ ， $\frac{8}{4}=2$ ，……。

圖三



數學「規定」，分母是 1 的分數就是分子，所以 $\frac{1}{1}$ 、 $\frac{2}{1}$ 、 $\frac{3}{1}$ 、 $\frac{4}{1}$ ……就是 1、2、3、4……。在這個規定之下，所有整數也都是分數了，它們是分母為 1 的分數。所以，像 $\frac{2}{2}=\frac{4}{4}=1$ 、 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ 、 $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ 、 $\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=2$ 這樣一組一組相等的數，就叫做「等值分數」。它們雖然表面上看起來不同，但卻是數線上相同的刻度，所以它們是相等的數。

為何要把「數」說得這麼麻煩？因為這樣可以幫助我們認清：(1)為什麼分數是「一個數」，而不是寫在上面和下面的兩個數？(2)為什麼會有等值分數？下回，我們將在數線上重新認識數的加減，然後就可以認清：什麼是「負數」？

單維彰教授小檔案

任教於中央大學數學系、師資培育中心與文學院學士班，從事數學教育的研究與寫作；是《文化脈絡中的數學》等 13 本書的作者，並擁有多多年編修課綱的經驗。想要多學一些的同學，請看單教授的網頁 shann.idv.tw/middle，也歡迎追蹤他的臉書粉專「數學知行識」。