

# 數線上的加減

文／單維彰（數學系教授） 圖／Shutterstock

上回詳細的解釋了「數線」，希望同學們了解「分數」是「一個數」，而不是寫在上面和下面的兩個數。這回將引導大家在數線上重新認識「數的加減」。

同學們不容易把分數想成一個數的原因，或許是受到國語的影響。因為舉凡2、3、4都只要說一個字，可是 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 卻要說四個字，感覺就不像一個數！其實 $\frac{1}{2}$ 有一個數詞：「半」，用它來描述二分數，可能比較容易把它們想成一個數或一個單位，例如： $\frac{1}{2}$ 是一半， $\frac{2}{2}$ 是兩半， $\frac{3}{2}$ 是三半。

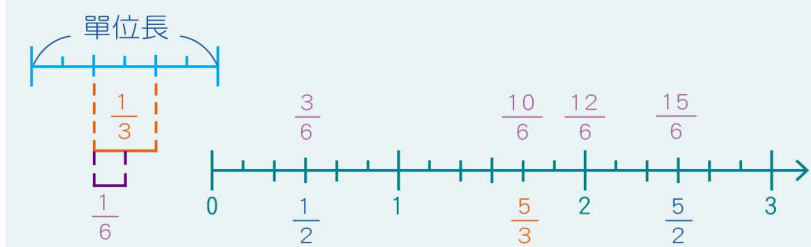
現在流行雙語教學，在數學裡順便學一點英文，有時對學習數學也有幫助。像是國語只有 $\frac{1}{2}$ 的數詞，但英語還有 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$ 的數詞： $\frac{1}{3}$ 是one third， $\frac{1}{4}$ 是one quarter；所以， $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{3}$ 就是two thirds、three thirds，而 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{4}{4}$ 就是two quarters、three quarters、four quarters。學會用這些「白話」來說分數，可能比較容易感覺每個分數都是一個數。

## 務必確實認識「等值分數」

對於分數最正當的想法，還是數線上的刻度。每個分數都是「一個」刻度，所以它是一個數。但是有些表面看起來不一樣的分數，卻是指同一個刻度，例如： $\frac{2}{2}$ 、 $\frac{3}{3}$ 、 $\frac{4}{4}$ 都跟1是同樣的刻度，我們就會說 $\frac{2}{2}$ 、 $\frac{3}{3}$ 、 $\frac{4}{4}$ 是「等值分數」，它們都等於1，數學說 $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = 1$ 。

利用圖一，我們來略為複習分數和等值分數：把單位長先平分三段，再把其中一段對半分，那麼六個小段就會湊成一整個單位，所以每小段是 $\frac{1}{6}$ 。用這一小段可以畫出 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{2}{6}$ 、 $\frac{3}{6}$ ……這些「六分數」的刻度，並且標示跟 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{5}{6}$ 、 $2$ 、 $\frac{5}{2}$ 等值的六分數。

圖一



## 利用「等值分數」做「分數的加減」

等值分數的用途之一，是幫助我們做分數的加減。分數為什麼要加減？這種需求經常發生，舉例來說：在處理「方程式」和「函數」時，有時「變數」必須「代入」分數，這時就經常要做分數的加減。

大家肯定都會算 $2+1$ 和 $2-1$ ，但是「加」和「減」在數線上是什麼意思呢？這裡有兩個關鍵：

1. 「數」本來是數線上的刻度，但是它可以搖身一變成為長度：就是從0到刻度的線段長。
2. 畫在數線一側的箭頭，表示正常方向，簡稱「正向」；同學不妨把有箭頭那一側想作「前」，而沒有箭頭那一側想作「後」。

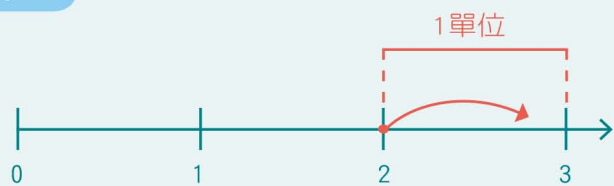




## 生活大智慧

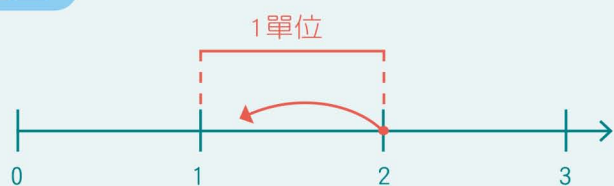
在數線上， $2+1$ 的意思是：想像一個點，從刻度2開始，向前走1單位，它抵達的位置刻度就是 $2+1$ 的結果。如圖二，顯然那個點落在刻度3的位置，所以數學說 $2+1=3$ 。在 $2+1$ 裡面，「+」號前面的數表示刻度，「+」號後面的數表示長度。

圖二



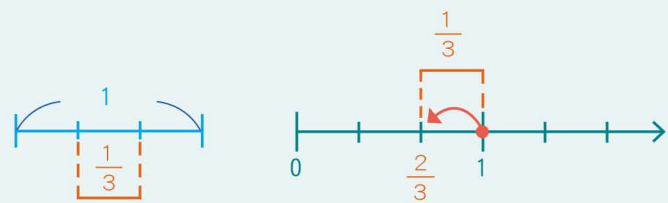
你可能已經猜對了：在數線上， $2-1$ 的意思是想像一個點，從刻度2開始，向後走1單位，它抵達的位置刻度就是 $2-1$ 的結果。如圖三，顯然那個點落在刻度1的位置，所以數學說 $2-1=1$ 。同樣的，在 $2-1$ 裡面，「-」號前面的數表示刻度，「-」號後面的數表示長度。

圖三



分數加減也是同樣的道理。例如： $1-\frac{1}{3}$ 是從刻度1開始，向後走 $\frac{1}{3}$ ，抵達的刻度就是答案。從圖四可以清楚看到抵達刻度 $\frac{2}{3}$ ，所以數學說 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 。

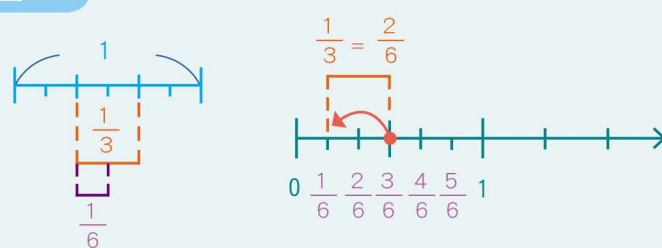
圖四



但是 $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ 可就不容易直接看清楚抵達的刻度。像這種情況，就要呼叫等值分數出來幫忙。從圖一我們已經注意到六分數將會成為二分數的等值分數，同

時也會成為三分數的等值分數。也就是說，如果把每單位等分六段，就會讓我們看清楚 $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ 的落點在哪裡。參照圖五，如果使用六分數的刻度，就能看清楚 $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ ， $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ ，所以 $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ 相當於從第3小段向後走2小段（每個小段是 $\frac{1}{6}$ ），抵達第1小段，也就是刻度 $\frac{1}{6}$ 的位置；所以數學說 $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ 。

圖五

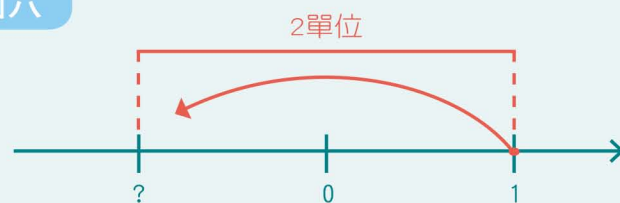


數線上的加減，讓我們認清「加」、「減」究竟是什麼意思，但是實際計算的時候，在數線上畫刻度真的太麻煩，這就是為什麼學校裡要教「通分」，因為通分能讓我們快速使用等值分數來做分數的加減；而通分的基本動作是找分母的「公倍數」，這就是為什麼學校裡要教「因數與倍數」。

## 探索什麼是「負數」

在數線上做減法的時候，假如向後走超過了0怎麼辦？例如 $1-2$ 是從刻度1開始，向後走2單位，那會抵達哪裡呢？小學的數線在0的後邊就沒了，但是小學生也知道，直線可以向前後兩個方向任意延長，所以沒必要限制數線只有「半條」。如圖六， $1-2$ 將會抵達0的左邊某一點，這一點的刻度就是「負數」。負數是國小沒有學的東西，它是國中生要開始探索的新世界。負數有什麼用呢？且聽下回分解。

圖六



## 單維彰教授小檔案

任教於中央大學數學系、師資培育中心與文學院學士班，從事數學教育的研究與寫作；是《文化脈絡中的數學》等13本書的作者，並擁有多多年編修課綱的經驗。想要多學一些的同學，請看單教授的網頁shann.idv.tw/middle，也歡迎追蹤他的臉書粉專「數學知行識」。