

有效位數的溝通意義

單維彰·民國 108 年 3 月 20 日

當我們用科學記號表達一個數，通常「不言而喻」的意思是：它是概數。一個確切的數值，例如確切的三百萬元，通常就會寫成「3,000,000 元」或「3,000 千元」而不會寫成「 3×10^6 元」。相對地，所謂「光速每秒三十萬公里」僅為概數，比較常會寫成「 3×10^5 km/s」而比較少寫「300,000 km/s」。當然，以上指出的是言談上的習慣，並非嚴格的定義；一般的情況下，我們應該能根據前後文以及談話的主題，來判斷所談的數字是確數還是概數？

只要表達的是「概數」，就表示它的「尾數」並不重要，可以含糊地處理。這個觀念本身，對學生（以及一些數學老師）來說，很可能是「怪異」的。在數學裡，哪有含糊的數字呢？1 就是 1，2 就是 2，隨便錯一個數字就整題錯了，哪裡有含糊的空間？

以上的思維，是整數思維，是代數思維，但是數學裡還有實數和分析，它們的思維不太一樣。在整數裡，當然每一位數字都很重要。100 和 101 完全不同，沒有什麼「差不多」可談；100 是 10 的完全平方，而 101 是質數。8128 也不能隨便改成「差不多」的 8129，8128 是完美數，8129 可能什麼也不是。¹

一字不能有誤的整數思維、代數思維，當然有其價值，也是高深的數學。但是數學不僅於此，因為人生中確實有不必要、不宜、不能精確之情境。即使是整數，也有可以含糊的情況。例如一群朋友出去聚餐，分攤下來每人要出 503 元，做莊的你可能就會慷慨地要大家各出 500 元就好，3 塊錢就算了（由你補給店家。）

以下這個實驗，我做過很多次：問「臺灣有多少人？」，幾乎每個人都會說「兩千三百萬」。這就是一個科學記號數字： 2.3×10^7 。有沒有人知道兩千三百的下一位是多少呢？我還沒遇過可以回答的人。理論上，在每一剎那，臺灣的人口數當然是一個可以精確決定的正整數，但是每當我們說話的那一秒鐘，都可能有人出生，有人告別。所以，實際上哪有精確獲知這個數字的方法？而一般人（包括內政部）又哪有確知這個數字的必要？

當你被問「你們學校有幾名學生？」，有多少人會回答到個位數？考慮一下這一大類的問題，就明白生活中早有一種潛在的約定：有效位數的約定。當我們

¹ 但是它也不是「最無聊的數」。數學家已經證明了，正整數裡不存在「最無聊的數」。（這只是開個玩笑。）

只說最高的兩位數，就是使用兩位有效數字的概數；不論說「兩千三百萬」還是「兩千三」還是「兩百三」，都在自然語言裡採用了兩位有效數字的科學記號：係數皆為 2.3，但是它們的位值不同，就是指數 7、3 和 2 的不同。²

小結以上冗長的敘述，重點有三：

- (1) 生活的言語和觀念中，就有科學記號。
- (2) 當每一位數都很重要（不得含糊）時，通常不會使用科學記號數字。
- (3) 既然使用科學記號，通常就表示可能有些不重要的數字被省略了。

有效位數意在溝通

在數學課程中引進「有效位數」的觀念和「語言」的約定，主要的目的是為了滿足溝通概數的需求。這一套約定的語言，讓我們得以簡明而精確地表達一個數值的概數。

《課程手冊》約定了一套溝通概數的語言，茲將相關內容整理如下。

1. 約至 k 位小數

意思是：若第 $k+1$ 位小數的數值大於或等於 5，則將第 k 位小數加 1；然後捨去從第 $k+1$ 位開始的全部小數。同義語句為「取 k 位最近小數」。其中「第 k 位小數」的同義詞是「小數點下第 k 位」，而「第 1 位小數」、「第 2 位小數」、「第 3 位小數」、「第 4 位小數」又依序有以下同義詞：「十分位」、「百分位」、「千分位」、「萬分位」。例如約至四位小數的 π 是 3.1416，約至百分位的 π 是 3.14。

2. 算到 k 位小數

意思是無條件捨去從第 $k+1$ 位開始的全部小數。同義語句為「準至 k 位小數」。例如算到四位小數的 π 是 3.1415，準至百分位的 π 是 3.14。

3. 以 k 位有效數字表達

意思是先將它寫成科學記號數字，再將它的係數約至 $k-1$ 位小數，然後以普通記號（整數、小數）或科學記號呈現其數值。例如 24,000,000 或 2.4×10^7 都是 23,584,865 的兩位有效數字表達。

為了修辭上的需要，老師們在口語上、書面上還可以做出許多變化的說法，無法窮舉詳列。在以下的附錄中，筆者借用一些教師同仁的命題，省略完整的題

² 根據內政部統計到 2018 年 11 月結束時的結果，臺灣有 23,584,865 人。所以，如果按照數學課程對於「兩位有效數字」的約定，我們該改口說「臺灣有兩千四百萬住民」了。

幹，呈現提問之中關於有效數字的溝通語句，作為範例。(附錄不計稿費。)

附錄

1. 試問 1999 年發生於南投縣集集鎮的芮氏規模 7.3 地震，其震央所釋放的能量是 2018 年發生於花蓮縣近海芮氏規模 6.2 地震之震央釋放能量的_____倍 (約至整數)。(汪雅芬老師)
2. 根據環保署公布的資訊，有 50 噸重油溢洩，初始溢油面積為 3 公頃，問常數 k_1 為何 (約至千分位)？(魏光亮老師)
3. 如果要蓋樓房，蓋滿容積率且每一層的平面設計都一樣，則單層地板面積的最大可能坪數為何 (算到十分位)？(張志鵬老師)
4. 若期望臺灣能從 2017 年起，每年的 TFR 都能增加 $r\%$ ，而在三年後達到與香港同樣的 1.19，試求平均成長率 $r\%$ (將 r 約至十分位)。(周靜慧老師)
5. 假如一名體重 50 公斤的同學吃完這包洋芋片，若用每小時 8 公里的速度慢跑，請問至少需跑幾 (整數) 分鐘才能確保完全消耗這包洋芋片的熱量？(何思穎、葉佳惠老師)
6. 阿宗最少需要減重多少 (整數) 公斤，才能達到 BMI 的體重正常？(魏光旺老師)