

從大考試題評估融入計算機的素養評量¹

以 104-106 年試題為例

單維彰、歐志昌*、賴政泓**、吳汀菱***

國立中央大學數學系副教授

*國立高雄師範大學附屬高級中學數學教師

**國立政治大學附屬高級中學數學教師

***臺北市立中山女子高級中學數學教師

前情提要

108 課綱的素養導向課程涵蓋了教材、教法與評量。而「適當使用工具」是數學素養的教育目標之一。數學學科中心為協助教師同仁在校內的平時考、段考，順利地將知識或解題導向的評量，轉移到素養導向，特別是融入計算機的素養導向評量，舉辦過很多場關於命題的研習，也針對高一第一學期第一次定期考推出第一批實驗性的示範試題，公布如下：

教育部高中數學學科中心（2019）。普通高中第一學期第一次定期考數學素養評量試題（一）。高中數學學科中心電子報，146。取自 <https://ppt.cc/ftuVEx>。

「工具」的使用，特別是計算機的使用，確實是將數學教育導向素養的最關鍵措施，老師只要試過立刻會發現效果，也會促使我們一起思考數學在科技環境中的新價值。校內的平時考、定期考（月考與期末考）並非「高風險」考試，而且教育的理念本來就應該「教什麼就考什麼」，所以學科中心及本文作者建議

校內考試准許學生自由使用計算機

。只要此門一開，老師們選題與組卷的方向馬上就會改變。後文再說命題，先說學科中心已經邀集具備豐富行政經驗的同仁，研究出一套實施「考試准用計算機」的建議方案，包括要學生自備、隨身攜帶計算機的建議，採購的建議，試務作業流程的建議等，其「參考文獻」列出本刊（高中數學電子報）近年關於計算機融入教學與評量的所有文章，資訊非常豐富，敬請老師們撥冗參閱：

教育部高中數學學科中心（2019）。數學第一次段考使用計算機之邀請。高中數學學科中心電子報，147。取自 <https://ppt.cc/fc4zex>。

以上文件簡略提及命題與組卷，但是素養導向命題是一個相對較新的主題，我們需要比較長的時間一起探索。以下，本文先以一節簡述理念，再以一節舉例。

¹ 本文說計算機都是指掌上型電子計算器（Calculator），就功能而言，使用科學型或工程型，其零售價格應在 150—600 元之間。詳細規格請看《數學領綱課程手冊》附錄三 [1，頁 757]。

計算機融入評量²

課綱的理想是：計算機的使用，越自然越好。最後希望達到的境界是：計算機就像紙、筆、橡皮擦、直尺、三角板，成為師生的隨身工具，隨時可以自然地使用在數學的學習和評量裡，並感覺它有什麼特別。

既然數學的學習內容和學習表現，都包含計算機相關知能，而且評量試教學的一部份，所以評量的時候也該容許使用計算機。這項舉措，在臺灣是很不習慣的。但如果學校從小型考試開始准許學生攜帶（使用）計算機，哪怕一開始用不著也沒關係，經過初期的檢查之後，以後應該就會逐漸習慣而不需要經常檢查。當然，老師還是可以宣布臨時的狀況，在某些特定的考試禁止使用計算機；但是我們希望這種特例越少越好。

一旦開放了計算機，每次大小考試之前，老師們就可以順便檢查一下考題，移除明顯不值得評量的題目。最後，約定一套關於數值精度的溝通語言（課綱的學習內容，³ 使得學生能夠寫出比較一致的答案，讓教師比較方便閱卷。

教師一開始可以使用學科中心開發的素養導向試題，減輕實施素養評量的負擔。如果要設計自己的試題，可以參考以下五個層次來進行。

1. 一旦學生可以使用計算機，某些考題就失去了效用。例如估計 $3^{3/2} \approx 5.2$ 這件事，除非有特殊的評量目標，否則就不適合當作考題了。（例如評量目標就是計算機的基本操作，或者在無法使用計算機的情境中，評量估算能力。）
2. 盡量在應用題裡面使用適當的單位，而學生回答應用題的時候，應該回答適當的估計量，而不是數學式。
3. 盡量採用符合情境的真實數據。例如在天文觀測的情境中，有時候只會獲得非常小的夾角，此外，跨自然領域時，也可以採用較真實的數據。
4. 修改舊題，提供搭配計算機解決問題的機會。過去因為不允許使用計算機，題目必須湊出恰好的數據，或者提供少數的函數表（指數、對數、正弦、餘弦等）。允許使用計算機之後，這些舊題都有翻新的機會。
5. 根據新的課綱，將以前不在課程裡的數學新物件放進考題。例如以前的試題只能算出某角的正弦或餘弦，現在則可以進一步要學生回答那個角的大小。

關於修改舊題的作法，單維彰曾在 2017 年提出初步的構想與實驗範例 [3]，後來更具體地使用整份 107 學測試題做了一次實驗性的評析 [4]。這種改題的方法似乎頗有效用，因此學科中心在今年六月邀請歐志昌、賴政泓、吳汀菱老師，

² 本節部份文字直接引自單維彰等人的教材教法專書第玖章第四節 [2]。

³ 參閱《數學領綱課程手冊》N-10-1 的相關約定 [1，頁 495]。

從融入計算機之素養評量的眼光，分別針對 104、105、106 年大考試題做部份的評析。下一節便是老師們的綜合評析簡報。⁴

大考試題評析

104 學測

104 年大學學科能力測驗試題共計單選 4 題，多重選 6 題，選填題 10 題。其中共有 5 題與計算機使用有相關性，其他 15 題皆與計算機是否使用並無相關；也就是說，准許學生使用計算機，並不影響那 15 題的作答。以下逐題解析與計算機相關的 5 個題目。

(一) 104 年大學學科能力測驗單選第 2 題：不必修題，亦可修改公比。

2. 第 1 天獲得 1 元、第 2 天獲得 2 元、第 3 天獲得 4 元、第 4 天獲得 8 元、依此每天所獲得的錢為前一天的兩倍，如此進行到第 30 天，試問這 30 天所獲得的錢，總數最接近下列哪一個選項？

- (1) 10,000 元
- (2) 1,000,000 元
- (3) 100,000,000 元
- (4) 1,000,000,000 元
- (5) 1,000,000,000,000 元

本題的解題概念為等比級數求和，題目將天數拉高到 30 天的目的，是希望學生不是用暴力方式條列出來硬算，需透過等比級數求和公式推估其近似值。使用等比級數求和公式可得： $S_{30} = \frac{1(2^{30} - 1)}{2 - 1} = 2^{30} - 1$ ，此時學生可透過以下方式估算答案：

- 1. 利用 $\log 2^{30} = 30 \times \log 2 \approx 30 \times 0.3010 = 9.03$ ，推得結果應該是 10 位數，故選 (4)。
- 2. 利用 $2^{10} = 1024 \approx 1000$ ，推得 $2^{30} = (2^{10})^3 \approx (1000)^3 = 10^9$ ，故選 (4)。

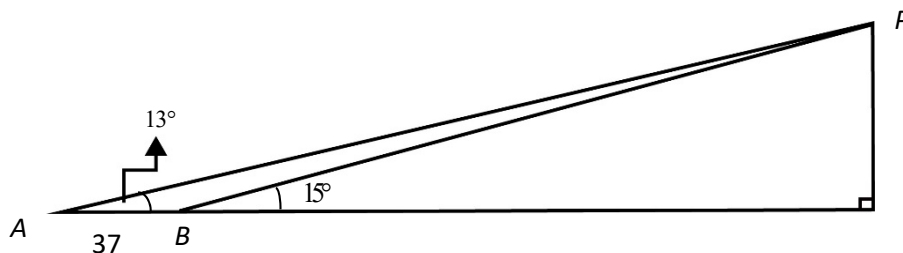
筆者猜測命題者可能想讓學生可以取 \log （符應課程學習內容，並凸顯對數的重要功能為處理數量級很大或很小的數），但又想要讓學生留意一些常用數字的特殊性，用來進行估算，所以選擇將公比訂為 2。這些用意都是非常好的，但也因此限制了題目的範圍與真實性。倘若學生的考試環境中有計算機可用，那麼同樣這個問題就可以設計公比不是 2 的狀況，取材也能更貼近真實的情境。不過，就算是原題，提供計算機給學生，也不會損及命題教師想要考的數學核心概念。

⁴ 107 年學測試題，已經由單維彰做過全卷評析 [4]。而 107 年的數甲、數乙試題，則由蘇麗敏老師做了部份評析，將以另文發表於電子報。

因此，本題可做為 108 課綱實施時，10 年級在介紹指數與等比級數的內容時，適合搭配計算機的考題。

(二) 104 年大學學科能力測驗選填題 A：可適度修改以適用計算機。

A. 如圖，老王在平地點 A 測得遠方山頂點 P 的仰角為 13° 。老王朝著山的方向前進 37 公丈後來到點 B ，再測得山頂點 P 的仰角為 15° 。則山高約為 ⑪ ⑫ 公丈。(四捨五入至個位數， $\tan 13^\circ \approx 0.231$ ， $\tan 15^\circ \approx 0.268$)



本題的解題概念為使用三角比進行平面三角測量，命題者設計的數據具有相當的合理性，是符合數學素養的命題。因此，角度不是特殊角，試題提供所需的三角比值讓學生選用。以本題而言，兩個 \tan 值都是 3 位小數，學生在處理這個

題目時會直覺假設山高為 h ，令山腳為 Q ，利用 $\tan 15^\circ = \frac{h}{BQ}$ 求得 $\overline{BQ} = \frac{h}{0.268}$ ，

再利用一次 $\tan 13^\circ = \frac{h}{AQ}$ 得到 $\overline{AQ} = \frac{h}{0.231}$ 。兼以 $\overline{AQ} = 37 + \overline{BQ}$ ，即 h 的一元一次

方程式 $\frac{h}{0.231} = 37 + \frac{h}{0.268}$ 。

為解上述方程的數字運算，是需要花點時間的。如果本題想要評量的數學概念為三角比的測量應用，那麼提供計算機將會是更好的安排，讓學生在正確列出算式後，能透過計算機將山高求出，也能避免學生因小數位數較多而算錯的情況。不過，在提供計算機的同時，其實這個题目的難度可能會被提高，因為目前的題目條件中有提供兩個 \tan 值，對於學生而言是一種解題方向的提示，若提供學生計算機使用，題目將不會有這樣的題示，學生必須自己想到要使用哪一個數學概念才能解決此問題。但這樣的改變，應該更符合數學素養的基本精神。

(三) 104 年大學學科能力測驗選填題 F：不必修題，也可以延長期滿年數。

F. 小華準備向銀行貸款 3 百萬元當做創業基金，其年利率為 3%，約定三年期滿一次還清貸款的本利和。銀行貸款一般以複利（每年複利一次）計息還款，但給小華創業優惠改以單利計息還款。試問在此優惠下，小華在三年期滿還款時可以比一般複利計息少繳 ⑳㉑㉒㉓ 元。

本題主要想測驗學生是否理解複利與單利的算法。又為了想讓學生能實際感受兩種計息方式的差異，所以數據上設計為 3 年，讓學生能透過筆算求得答案。

(複利部分可搭配立方和公式。)

$$\text{複利 3 年：} 3000000 \times (1 + 0.03)^3 = 3000000 \times (1 + 3 \times 0.03 + 3 \times 0.0009 + 0.000027)$$

$$\text{單利 3 年：} 3000000 \times (1 + 0.03 \times 3)$$

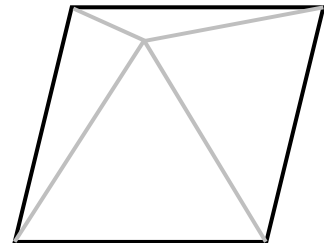
$$\text{所以少繳：} 3000000 \times (3 \times 0.0009 + 0.000027) = 8181$$

本題在大考中心所公布的統計資料中顯示，答對率只有 26%，應該算偏低。筆者認為可能因素包含：(1) 未能掌握複利與單利的計算方式（雖然在課本中都有），(2) 或是在計算複利時，3 次方計算錯誤。此時回到評量目標，本題若是想檢測學生是否理解複利與單利的算法，則計算錯誤的因素將嚴重影響我們對於學生的學習結果判斷。單看答對率 26%，可以解釋為有 74% 的學生不懂複利與單利嗎？這個推論太過偏頗，但是縱使我們知道沒那麼誇張，我們也無法區辨到底有多少的比例是學生不懂複利與單利。此時，若在考試過程中有提供計算機，我們所獲得的數據應該會比較貼近本題的評量目標，因為計算機可以協助排除因計算錯誤所造成的誤解。

(四) 104 年大學學科能力測驗選填題 I：小幅修改為問夾角的度數。

1. 在空間中，一個斜面的「坡度」定義為斜面與水平面夾角 θ 的正切值 $\tan \theta$ 。若一金字塔（底部為一正方形，四個斜面為等腰三角形）的每一個斜面的坡度皆為 $\frac{2}{5}$ ，如圖。則相鄰斜面的夾角的餘弦函數的絕對

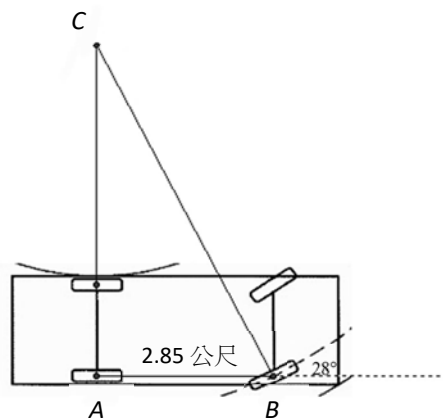
值為 $\frac{\textcircled{32} \textcircled{33}}{\textcircled{34} \textcircled{35}}$ 。（化為最簡分數）



本題為空間概念中兩面角的問題，題目結合三角比的概念介紹坡度，並以學生熟悉的建築物金字塔為探討對象，蠻符合數學素養的命題方向。在 99 課綱的範疇下，未能從三角比反問角度，因此過去的命題，題目皆只能要學生寫出角度的三角比值或是判斷該角度的範圍（除特殊角外），也讓問題的處理離真實問題的解決方向更遠。從實際狀況來看，我們做任何的數據處理，希望得到的應該是對我們有感覺的幾何量，所以我們期望看到的是夾角的度數，而不是夾角的三角比值。因此筆者建議在本題的問題設定上，能將最後的敘述更改為：「則相鄰斜面的夾角為_____度(四捨五入到整數)」。當然此時就要借助計算機的協助，讓學生在處理完兩面角後，透過計算機的反三角按鍵得到所需的答案，也能讓學生對於熟悉的建築物的一些幾何量有感。

(五) 104 年大學學科能力測驗選填題 J：應刪除提示的三角比。

- J. 下圖為汽車迴轉示意圖。汽車迴轉時，將方向盤轉動到極限，以低速讓汽車進行轉向圓周運動，汽車轉向時所形成的圓周的半徑就是迴轉半徑，如圖中的 \overline{BC} 即是。已知在低速前進時，圖中 A 處的輪胎行進方向與 \overline{AC} 垂直， B 處的輪胎行進方向與 \overline{BC} 垂直。在圖中，已知軸距 \overline{AB} 為 2.85 公尺，方向盤轉到極限時，輪子方向偏了 28 度，試問此車的迴轉半徑 \overline{BC} 為 36.37 公尺。(小數點後第一位以下四捨五入， $\sin 28^\circ \approx 0.4695$, $\cos 28^\circ \approx 0.8829$)



本題與選填題 A 的測驗目標有相似之處，都是融合生活情境並使用三角比的素養考題。與選填題 A 不同之處是，本題學生須分析題目條件，決定要使用題目中所提供的哪一個三角比。這個狀況就如同筆者在選填題 A 中所提的，目前的題目設計具有引導作答方向的可能。如果我們需要學生展現選擇適當的解題策略進行解題，那麼就比較建議提供學生計算機，將題目中的三角比刪除，讓學生能選用適當的解題工具，求得正確的答案。

105 學測、數甲、數乙

105 年的學測、數甲、數乙試題，除了以下題目以外，都無礙於使用計算機；也就是說，大多數題目可以用原題讓學生使用計算機應試，不會產生不公平或不良的效果。

筆者認為以下幾題的評量目標就是估算，所以不宜直接當作融入計算機的試題。

(一) 105 學測單選題 2：不宜作為准用計算機的試題。

2. 請問 $\sin 73^\circ$ 、 $\sin 146^\circ$ 、 $\sin 219^\circ$ 、 $\sin 292^\circ$ 、 $\sin 365^\circ$ 這五個數值的中位數是哪一個？

- (1) $\sin 73^\circ$ (2) $\sin 146^\circ$ (3) $\sin 219^\circ$ (4) $\sin 292^\circ$ (5) $\sin 365^\circ$

【測驗目標】廣義角的化簡與正弦判斷大小

【計算機融入考題】此題的精神為廣義角的化簡與正弦判斷大小。若使用計算機則直接算出其近似值即可，失去了從角的位置判斷正弦的意義，而此題的價值僅剩下中位數的概念。若只是考中位數之概念，也就無需出此類型的題目了。

(二) 105 學測單選題 6：若准用計算機則取消估算之評量目標。

6. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一等比數列。已知前十項的和為 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 80$ ，前五個奇數項的和為

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 120$ ，請選出首項 a_1 的正確範圍。

(1) $a_1 < 80$ (2) $80 \leq a_1 < 90$ (3) $90 \leq a_1 < 100$ (4) $100 \leq a_1 < 110$ (5) $110 \leq a_1$

【測驗目標】等比級數和的應用

【試題解析】設首項 a_1 ，公比 r

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{a_1(1-r^{10})}{1-r} = 80 \dots\dots \textcircled{1}, \quad a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = \frac{a_1(1-r^{10})}{1-r^2} = 120 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \frac{1-r^2}{1-r} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3} \Rightarrow 1+r = \frac{2}{3} \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \frac{1-r^2}{1-r} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3} \Rightarrow 1+r = \frac{2}{3} \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$$
$$\text{代入} \textcircled{1} \Rightarrow a_1 \left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right) = 80 \times \frac{4}{3} = \frac{320}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{\frac{320}{3}}{1 - \frac{1}{3^{10}}} \approx \frac{320}{3} \approx 107$$

【計算機融入考題】若不使用計算機，則此題在最後一步是「估算」能力的一種表現。若是計算機融入此試題，則學生在此步驟之前的觀念如果完備，或許更能提高答對率。兩相比較的結果，更能呈現出學生估算的能力。

(三) 105 學測多選題 11：應可修改選項擴大評量範圍。

11. 一個 41 人的班級某次數學考試，每個人的成績都未超過 59 分。老師決定以

下列方式調整成績：原始成績為 x 分的學生，新成績調整為 $40 \log_{10} \left(\frac{x+1}{10}\right) + 60$ 分(四捨五入到整數)。請選出正確的選項。

- (1) 若某人原始成績是 9 分，則新成績為 60 分
- (2) 若某人原始成績是 20 分，則其新成績超過 70 分
- (3) 調整後全班成績的全距比原始成績的全距大
- (4) 已知小文的原始成績恰等於全班原始成績的中位數，則小文的新成績仍然等於調整後全班成績的中位數
- (5) 已知小美的原始成績恰等於全班原始成績的平均，則小美的新成績仍然等於調整後全班成績的平均(四捨五入到整數)

【測驗目標】對數函數與平均數的應用

【計算機融入考題】若使用計算機，選項 (2) 可以更寬廣，例如原始成績為 66，求新的成績。甚至可以應用於反推，例如某人新的成績為 85 分，則其原始成績為何？這樣的題目更能檢視出學生對「對數」的認知。

(四)105 數甲單選題 2：不宜作為准用計算機的試題，平常考可。

2. 下列哪一個選項的數值最接近 $\cos(2.6\pi)$ ？

- (1) $\sin(2.6\pi)$ (2) $\tan(2.6\pi)$ (3) $\cot(2.6\pi)$ (4) $\sec(2.6\pi)$ (5) $\csc(2.6\pi)$

【測驗目標】弧度制與三角函數值的判別

【計算機融入考題】此題若准用計算機將變得太簡單，除非是平常考，用來評量學生能夠切換弧度制與度制的使用。

(五)105 數乙多選題 6：不宜作為准用計算機的試題。

6. 設 $a = 10^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$, $b = a^{\sqrt{2}}$ 。請選出正確的選項。

- (1) $1 < a$ (2) $a < \sqrt{3}$ (3) $a^2 < b^{\sqrt{3}}$ (4) $10^{0.4} < b < 10^{0.5}$ (5) $(ab)^{\sqrt{2}} < 10$

【測驗目標】指、對數函數的單調性(遞增與遞減)

【計算機融入考題】此題可以用計算機算出近似值，故不適用於計算機考題。

106 學測、數甲、數乙

同上，僅討論准用計算機之後將受影響的試題。

(一) 106 學測單選題 2：修改後適用計算機。

2. 某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2 。當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^3 。試問實數 b 最接近下列哪一個選項？

- (1) 1.7 (2) 3 (3) 5.2 (4) 9 (5) 81

本題的解題觀念為指數律及有理數指數的估算，學生要能從題意中正確列出

$((b^2)^2)^2 = 81^3$ ，並使用指數律化為 $b^8 = (3^4)^3 = 3^{12}$ ，所以 $b = 3^{\frac{12}{8}} = 3^{\frac{3}{2}}$ ，接著看出

$3^{\frac{3}{2}} = 3^{1+\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3} \approx 3 \times 1.732 = 5.196$ ，因而得到選項(3) 的答案。

如果可以使用計算機，則學生在得知 $b = 3^{\frac{3}{2}}$ 之後，可利用計算機得到 b 的近似值，會再降低難度。若同時將題目中的選項修改為更接近此數的近似值，例如：(1)5 (2) 5.1 (3) 5.2 (4)5.3 (5) 5.4，則會比原先的選項難度高一些。此時，對於程度較弱的學生，若能理解題意但列不出 $((b^2)^2)^2 = 81^3$ 這樣的式子，將 5 個選項一一試誤，還是可以得到正確答案。

(二) 106 學測單選題 6：使用計算機似可實驗，但是幫助不大。

6. 試問有多少個實數 x 滿足 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 且 $\cos x^\circ \leq \cos x$ ？

(1) 0 個 (2) 1 個 (3) 2 個 (4) 4 個 (5) 無窮多個

本題牽涉到的觀念有無理數 π 的近似值、弧度單位與廣義三角比的定義與值的範圍，為融合兩個以上觀念的題目，加上敘述中符號多，中下程度的學生很容易被嚇到放棄。

解題關鍵是，若 x 為實數時， $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 解讀為 x 的值介於 $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ 與 $\frac{3\pi}{2} \approx 4.71$ 之間。若 x 為角度且單位是徑時， $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 解讀為 $90^\circ \leq x \leq 270^\circ$ 。而 $\cos x^\circ$ 中的 x 值為實數， $\cos x$ 中的 x 為角度。所以當 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 時， $\cos 1.57^\circ \leq \cos x^\circ \leq \cos 4.71^\circ$ ， $\cos 90^\circ \leq \cos x \leq \cos 270^\circ$ ，顯然範圍中的 $\cos x^\circ$ 值皆為正數， $\cos x$ 的值都是負數，所以 $\cos x^\circ \leq \cos x$ 無解。

這一題若開放使用計算機，則學生仍須具備理解 π 的近似值及弧度單位的觀念，才能正確使用計算機，若學生不清楚廣義三角比的定義與值的範圍，取幾個 x 的值嘗試得到估計值，想推測出可能的答案，仍具有相當難度。

(三) 106 學測選填題 E：108 課綱已刪除，以後不要考。

E. 設 a, b, x 皆為正整數且滿足 $a \leq x \leq b$ 及 $b - a = 3$ 。若用內插法從 $\log a, \log b$ 求得 $\log x$ 的近似值為

$$\log x \approx \frac{1}{3} \log a + \frac{2}{3} \log b = \frac{1}{3} (1 + 2 \log 3 - \log 2) + \frac{2}{3} (4 \log 2 + \log 3),$$

則 x 的值為 27 28。

本題先測驗學生對數律的運算，再評量內插法即分點公式的意涵，

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} (1 + 2 \log 3 - \log 2) + \frac{2}{3} (4 \log 2 + \log 3) &= \frac{1}{3} \log \frac{10 \times 3^2}{2} + \frac{2}{3} \log 2^4 \times 3 \\ &= \frac{1}{3} \log 45 + \frac{2}{3} \log 48, \text{ 故 } a = 45, b = 48. \text{ 由 } \log x \approx \frac{1}{3} \log a + \frac{2}{3} \log b \text{ 及內插法,} \\ \text{得知 } x &= \frac{1}{3} \times 45 + \frac{2}{3} \times 48, x \text{ 為 } 45 \text{ 與 } 48 \text{ 的第一個三等分點 } 46. \end{aligned}$$

如果開放使用計算機，得到 $\log x \approx \frac{1}{3}\log 45 + \frac{2}{3}\log 48 = 1.672$ ，

$x = 10^{1.672} = 46.989$ ，不須使用分點公式，得到 x 的近似值為 47，為另一個答案。

(四) 106 數甲單選題 2：若評量目標為估算，則不合適。

2. 設 $a = \sqrt[3]{10}$ 。關於 a^5 的範圍，試選出正確的選項。

(1) $25 \leq a^5 < 30$

(2) $30 \leq a^5 < 35$

(3) $35 \leq a^5 < 40$

(4) $40 \leq a^5 < 45$

(5) $45 \leq a^5 < 50$

本題的解法為 $a^5 = (10^{\frac{1}{3}})^5 = 10^{\frac{5}{3}} = 10 \times 10^{\frac{2}{3}} = 10\sqrt[3]{100}$ ，而 $4^3 < 100 < 5^3$ ，可知 $4 < \sqrt[3]{100} < 5$ ，選項縮小範圍到選項(4)與(5)。但是 $4.5^3 = (\frac{9}{2})^3 = \frac{729}{8} = 91.125 < 100$ ，

故 $4.5 < \sqrt[3]{100} < 5$ ，確定答案為 (5)。

若能使用計算機，則只要知道指數律，上述所有的估算的觀念皆可拋棄，仍可快速得到答案。因此要視出題者欲測知的能力來決定此題是否恰當。

(五) 106 數乙單選題 2：應徹底避免這樣的「學科導向」試題。

2. 下列哪一個選項的值最大？

(1) $\log_2 3$

(2) $\log_4 6$

(3) $\log_8 12$

(4) $\log_{16} 24$

(5) $\log_{32} 48$

本題使用公式 $\log_{a^r} b = \frac{1}{r}\log_a b = \log_a b^{\frac{1}{r}}$ ，將每個選項化為底數 2，再配合估算，可以得到答案 (1)。若能使用計算機，又有上述概念，則不須估算的能力，使用計算機即可比較。但假使學生沒有上述能力，但知道下列性質：

$$\log_2 3 = \log_{10^{\log_2 10}} 10^{\log_2 3} = \frac{\log 3}{\log 2} \log_{10} 10 = \frac{\log 3}{\log 2}$$

則使用計算機，也可以比較大小。

但是，此題可列為「素養導向」試題的反例，不宜列為評量試題。

(六) 106 數乙多選題 5：不需計算機，有計算機可做實驗，但是耗時間。

5. 設 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 是一公比為 $\frac{1}{2}$ 的無窮等比數列且 $a_1=1$ 。試問以下

哪些數列會收斂？

(1) $-a_1, -a_2, \dots, -a_n, \dots$

(2) $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2, \dots$

(3) $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n}, \dots$

(4) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots$

(5) $\log a_1, \log a_2, \dots, \log a_n, \dots$

要能正確回答本題所需的觀念為公差不為 0 的無窮等差數列必不收斂，公比 r 滿足 $-1 < r < 1$ 的無窮等比數列會收斂，其餘的會發散，所以只要判斷出選項 (1)、(2)、(3) 皆為 $-1 < r < 1$ 的無窮等比數列，所以都收斂，選項 (4) 為公比 2 的等比數列，會發散，選項 (5) 為等差數列亦發散。

如果能使用計算機，則上述觀念不清楚的學生可以從計算機算出的值猜測判斷，可降低難度，但是消耗的時間變長，所以也沒有不公平。

(七) 106 數乙多選題 7：不需計算機，有計算機可做實驗，但是耗時間。

7. 小明參加某次國文、英文、數學、自然、社會五個科目的測驗，每一科的分數均為 0~100 分。已知小明國英數三科的分數分別為 75, 80, 85 分。試問下列哪些選項會讓小明五科成績的平均不低於 80 分且五科標準差不大於 5 分？

(註：標準差 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$ ，其中 μ 為平均數。)

(1) 自然 75 分，社會 80 分

(2) 自然與社會兩科皆 80 分

(3) 自然與社會的平均 85 分

(4) 自然與社會兩科之和不低於 160 分且兩科差距不超過 10 分

(5) 自然與社會兩科的分數都介於 80 與 82 分之間

本題考兩個概念：算術平均數與標準差。要同時達到五科成績的 (A) 平均不低於 80 分，且 (B) 五科標準差不大於 5 分，可先篩選條件 (A)：因為原本的三科 75, 80, 85 平均正好為 80，所以另兩科的和不能少於 160，選項 (1) 因而刪去。接著驗證條件 (B)，選項 (2) 顯然數據中有 3 個 80 分，另外兩個 75, 85 非極端值，與 80 的距離皆為 5，可以判斷選項 (2) 可選；而選項 (3) 因為不能保證兩科加入後有集中趨勢（例如 70 與 100 分，則標準差大於 5），所以不選。考慮到這一點的時候，便可知第 (5) 選項符合兩條件。要驗證第 (4) 選項的話，

使用最極端的數據來驗證：100 與 90，此時平均數為 86，標準差為

$$\sqrt{\frac{(75-86)^2 + (80-86)^2 + (85-86)^2 + (90-86)^2 + (100-86)^2}{5}}$$

顯然大於 5，所以不合。

本題重在推理，計算量不多，所以若能使用計算機，對解題速度或技巧並沒有助益，但如果程度較差的學生會使用試誤法，嘗試舉例再計算，仍然有可能獲得部分分數。

參考文獻

1. 國家教育研究院 (2019)。十二年國民基本教育課程綱要·數學領域課程手冊。新北市：作者。取自 <https://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/img/67/127960501.pdf>。
2. 單維彰 (主編)、吳汀菱、曾明德、鄭章華、謝豐瑞 (2019)。分科教材教法：中學數學教材教法。出版中。
3. 單維彰 (2017)。素養評量芻議。高中數學學科中心電子報，124。取自 <https://ppt.cc/fq4l0x>。
4. 單維彰 (2018)。從 108 課綱的觀點看 107 學測試題一數學。高中數學學科中心電子報，131。取自 <https://ppt.cc/f9IBHx>。

註：本文為計算機系列(4)，於 2019 年 8 月 10 日完稿。