

2021年3月
第十六卷·第一期

課程研究

Journal of Curriculum Studies *March* 2021

Sunday

Monday

Tuesday

Wednesday

Thursday

Friday

Saturday

素養導向的數學課程設計

主題論文

數學素養課程的轉銜

單維彰

數學學術素養：數學話語在課程與教學上的應用

陳嘉皇

新學制推行以來香港數學教育的發展與挑戰

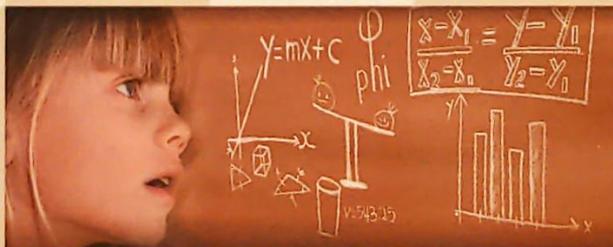
張僑平

實體教具融入國小數學教學設計：以方塊堆疊與計數為例 林筠修、鄭柔安、張淑怡

研究論文

國小教師因應混齡教學之實踐與省思探究：以國語科為例

方正一



專書導讀

培養學習數學的原力：如何幫助學習者發展數學閱讀理解能力

——評《閱讀數學：文本、理解與教學》

鄭英豪

Taipei

Beijing

Shanghai

London

Chicago

Sydney

Hong Kong

主題論文

課程研究

16 卷 1 期 2021 年 3 月 頁 17-39

數學學術素養： 數學話語在課程與教學上的應用

陳嘉皇



摘要

發展數學語言是向學生教授數學的重要層面，此過程會在整個數學教育中持續進行。就數學語言而言，使用詞彙解釋、證明和進行數學溝通的能力對於整體數學能力的發展至關重要，數學詞彙的理解使人們可以使用概念，所以在語言領域進行數學教學勢在必行。本文擬透過Moschkovich提出的數學專業素養內涵介紹，以數學話語連結數學能力和實踐，闡述數學話語的特徵和數學詞彙的類型，提供數學話語教學的流程與實例，希望藉此提供教師在未來實施數學語言領域教學之參考依據。

關鍵詞：四邊形、詞彙、話語、數學語言

陳嘉皇，國立臺中教育大學數學教育學系教授。E-mail: chench1109@mail.ntcu.edu.tw

doi: 10.3966/181653382021031601002

壹、前言

教育部（2018）於《十二年國民基本教育課程綱要》的基本理念中提到數學是一種語言，宜由自然語言的題材導入學習歷程，連結數學的文字與符號語言，最後以精簡的公式或理論來理解人類生活的世界。數學教學在小學階段就能以學習自然語言的方式開始，透過實際的操作與解說，逐步進入到抽象概念的學習，因此，**數學話語（mathematical discourse）**活動的推動具有特別的意義和重要性，學生可以在活動中與他人進行精確的溝通，構造可行的論點，批評他人的數學推理，解釋如何解題及使用清晰的定義和詞彙，以達到領綱中溝通和互動的核心素養目的。發展數學語言是向學生教授數學概念的重要層面，此過程會在整個數學學習的歷程中持續進行。數學話語的活動在於利用課室裡師生對於數學問題的論述，教導學生學習數學語言，就數學語言的發展而言，使用詞彙來解釋、證明和進行數學溝通對於整體數學能力的發展至關重要。研究已經顯示，語言是數學成功的關鍵因素（Seethaler, Fuchs, Star, & Bryant, 2011），而學生對數學詞彙的常識可以預測數學表現（van der Walt, 2009）。因此，**如何在數學話語的歷程達成有效的數學學習，實施數學語言和詞彙的教學將成為教師教學的一大挑戰。**

語言可用來代指諸如本國語言，或人類溝通訊息的各種指示現象，數學語言是指數學中代表特定性質的語言，不僅指具有精確數學意義的詞彙或技術單詞，也是指參與數學活動所必須的話語練習（使用語言和其他符號系統的方式）。數學詞彙是指表達數學語言中的概念或程序的單詞，數學詞彙對於證明數學熟練程度是不可少的元素（Riccomini, Smith, Hughes, & Fries, 2015）。Monroe與Panchyshyn（1995）將數學詞彙描述為：一、技術的，其含義僅適用於數學；二、具有多種含義的次要詞彙，其含義在內容區域或數學範圍內有所不同（如角度與溫度的關係）；三、日常語言或閱讀中使用的一般詞彙（如陰影或發現）；四、象徵性的，這意味著它是用數字或符號（如\$或3）表徵的。本文所謂的「話語」指的是課室論述數學的活動；「詞彙」指的是數學術語或專有名詞；「語言」則是指**詮釋數學概念用的語句或行動**。鑑於教學實務現場長久以來著重於計算技巧之熟練，對於數學詞彙教學較為生疏，如何透過數學詞彙教學轉換為數學語言之習得，本文擬透過Moschkovich（2015）的數學專業素養內涵介紹，以數學話語連結數學能力和實

踐，闡述數學話語活動的特徵和數學詞彙的類型，提供數學話語活動教學的流程與實例，希望藉此提供教師在未來實施數學領域教學之參考依據。

貳、數學學術素養的內涵

Moschkovich (2015) 認為數學學術素養由三個部分組成：數學能力、數學實踐和數學話語 (mathematical proficiency, mathematical practices, and mathematical discourse)，其定義包含數學活動的認知方面 (如數學推理、思維、概念和後設認知)、社會文化 (參與數學實踐) 和話語活動 (參與數學論述)。

一、數學能力

Kilpatrick、Swafford與Findell (2001) 描述五個相互交織的數學能力：(一) 對數學概念、運算和關係的概念理解；(二) 程序的流利度或靈活、準確、有效且適當地執程序的技巧；(三) 策略能力，即制定、表徵和解決數學問題 (新穎問題而非非常規練習) 的能力；(四) 適應性的推理或邏輯思維、反思、解釋和辯解；(五) 有生產力的傾向，將數學視為明智、有用和有價值的東西，加上對勤奮和自身效能的信念。概念的理解是關於學習者為數學解決方案構造的含義：了解結果的含義 (數字、解決方案或結果表示什麼)，知道過程為何有效和/或解釋為什麼特定結果是正確答案。概念理解的其他方面是將過程連接到概念，並將過程連接到多種表徵形式，如單詞、繪圖、符號、圖表、表格、圖形或方程式等 (Hiebert & Carpenter, 1992)。推理、邏輯思維、解釋和辯解與概念理解密切相關，當學生解釋為什麼特定結果是正確答案或得出結論時，學生推理就是概念理解的證據。例如，學生了解加法和乘法，在這兩個過程之間建立連繫，可以用多種方式表示它們，解釋乘法和加法之間的關係。

二、數學實踐

何謂數學實踐？它是以組織的、涉及符號系統，討論特定數學思想時採用共享的推理、爭論和象徵化的方式，應用數學概念與語言對問題進行詮釋和解題。數學實踐不僅是認知的、涉及數學思維和推理的行動，也包括在社會和文化的互動，它們起源於社區中成員資格的標記，也涉及符號、工具與其含義。

數學實踐可理解為使用話語和其他符號系統來思考、交談和參與學校學習的目標。數學活動涉及不同的社群（數學家、教師或學生）和不同的體裁（解釋、證明或演示），如National Council of Teachers of Mathematics（2014）《行動法則：確保所有人能在數學上成功》（*Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*）中的實踐法則：（一）理解問題並堅持不懈地解決；（二）抽象和定量地推理；（三）構建可行的論據並批評他人的推理；（四）數學模型；（五）有策略地使用適當的工具；（六）精確；（七）尋找並利用結構；（八）在重複推理中尋找並表達規律。

三、數學話語

數學話語具有多種含義，在有關數學教學的建議中，將其含義簡化為詞彙或語言（Cavanagh, 2005），數學的話語不僅是專業詞彙（熟悉單詞的新詞和新含義），還包括符號系統和人工製品（Moschkovich, 2015）、語法和組織（Crowhurst, 1994）、數學概念的運作（Halliday, 1978），以及溝通與解題實踐（Moschkovich, 2015）。從數學素養的社會文化角度來看，數學熟練程度是一種複雜的觀點，它涉及概念理解和數學論述的學科實踐基礎，數學話語活動的進行會利用混合資源，不僅涉及口頭和書面文本，還涉及多種模式、表徵形式（如手勢、對象、圖畫、表格、圖形、符號等）和表達（學校的數學語言、家庭和日常使用的語言）。由於數學話語活動是多模式的和多符號的（O'Halloran, 2005），因此包括多種交流方式、符號系統和文稿的類型。數學話語活動為學生提供機會，使他們能夠充分發揮其數學水平，在進行數學論述時，能積極使用數學概念並透過解釋和論證表達概念性理解。

總之，數學的學術素養涉及數學能力、數學實踐和數學話語。對數學學術素養的明確定義使教師能夠選擇（或設計）支持數學素養的任務，為學習者提供機會，並在活動中認識數學素養。

參、數學話語的特徵

數學話語活動包括說話、演唱、互動、思考、傳授、閱讀、寫作等方式，以及對數學所蘊含的價值、抱持的信念、出現的情境脈絡等呈現方式（Gee, 1996）。

數學話語在數學中具有不同的含義，不僅是專業詞彙，還包括語法和組織的擴展論述，使用數學話語來代指數學活動中所使用的特定概念性質，不僅包含具有準確數學含義的詞彙或學術詞彙，也指參與數學活動所需的對話，是使用詞彙和其他符號系統的方式（Barwell, Moschkovich, & Phakeng, 2017）。數學話語的實施具有以下特徵：

一、正式性

數學話語強調語法和組織、符號所使用的語法結構和形式，以及話語的實踐。當數學話語發生在教室時，數學詞彙就變成正式教學的內容（Dunston & Tyminski, 2013），有其較正式的表達方式。以四邊形中的正方形為例，一般人聯想到的可能是正方形的形象，再多一點的語言表達就是方方正正的圖形。數學上，它有其正式的概念敘述，敘述中包含直角、邊長等數學學術詞彙，是有語法、正式概念在其中的表達。

二、獨立性

詞彙有時候獨立代表一個概念，與其他詞彙所包含的觀念、想法和感覺或概念無關。例如，整數只能在數學中找到，它具有非常具體的含義，不會闡明其他的概念或構造（Dunston & Tyminski, 2013）。又如，「全等」這個詞彙只能在數學領域中看到，係用來描述兩圖形的關係，在任何時候提及全等皆是相同的概念，有其具體的描述，也僅有獨立的一個概念。

三、共享性

隨著數學話語發展，學生學會與同伴和其他人交流和共享通用的數學概念及操作。每個數學詞彙的背後蘊含不只一種概念，透過數學詞彙來為一個概念命名，以描述它和其他詞彙之間的關係。以「平行」和「垂直」來說，兩個詞彙各自包含了兩條直線間的關係描述，初次遇到此詞時，對學生來說是新的詞彙，當認識詞彙後，平行和垂直這兩個詞彙就產生了共享性，與他人溝通時不必再說一大串的句子表達兩直線關係，只需要一個詞彙就可讓對方了解。

四、連結性

詞彙知識對學生的成就至關重要，因為詞彙與閱讀理解緊密相關。例如一道題

目：「你有五個孩子和二十本書，你可以分給他們多少本書？」(If you have five children and twenty books, how many can you gave the books?) 學生將會討論「分給」一詞不同的可能含義和用法，決定計算上該使用加法或除法。這樣的討論是屬於語言學的部分，也是數學的一部分，因為釐清詞義有助於理解問題敘述和詞彙的數學結構。數學詞彙在教學中，有一部分是與他人進行交流，例如在描述兩直線關係時，會說「直線A和直線B互相垂直」，或是「直線A垂直於直線B」，學生是否能了解敘述的含義，關係著對語文的語法是否了解。

五、影響性

詞彙量的多寡是學生理解能力和內容領域學習的預測指標，若缺乏詞彙知識會對學習內容產生負面影響(van der Walt, 2009)。理解數學詞彙可為學生提供他們在面對新的數學概念時需要思考、討論和吸收的技能，對數學詞彙的理解使人們可以使用概念，所以，在數學領域進行數學話語教學是勢在必行的。有許多人面對數學時都是選擇先背公式，但其實理解概念後，很多公式不需要死背，有的甚至可以相通，如周長和面積的算法，如果理解面積的概念，不必急著記下公式，接下來發展到計算時也能很流暢地學習。

六、多形式

Moschkovich (2015) 記錄學生如何使用多種模式學習，以及數學推理和意義形成通常是如何顯現的，當學生將手勢和對象視為有意義的資源時，才能在學習情況下使用它們。例如四邊形作圖，我們能以文字記錄、說話表示和動態作圖等方式表達作法，有時也能使用手勢輔助，由此可知，數學話語有多種形式的特徵，這些都是幫助順利傳遞想法的有用資源。

七、多義性

某些詞彙在日常使用中的含義與數學中的用語含義不同，且某些詞彙在數學中的使用方式不只一種，但是詞彙、短語和符號對於傳達數學思想影響巨大，且能將這些組織起來流暢的理解或表達，對於孩子的數學學習至關重要(Rubenstein & Thompson, 2002)。例如，在平行與垂直活動中最常出現的「直線」一詞，正符合多義性的特徵。在日常生活中，直線表示的是一條非彎曲的線，而在數學上，直線有更詳細的定義，又可細分為直線、射線和線段，相對於數學用語，生活用語的直

並沒有吧？

線涵蓋較廣，但數學又劃分出更具體的描述。

肆、數學詞彙的類型

不同的數學主題涉及不同層面的數學詞彙。例如，證明需要使用邏輯關係，機率則需要使用條件形式 (Kazima, 2007)。將數學詞彙之類別整理如下：

一、依據詞性

Schwartz與Kenney (1995) 將數學詞彙組織成常用的詞彙，如圖像、數字、度量、函數等數學名詞，而動詞則為解決問題和推理相關的動作。這種組織框架不僅代表個人解決問題時經歷的過程，而且還提供一種評估數學發展的方式。在四邊形的教學中，可以看見數學詞彙的名詞和動詞，如觀察、作圖、書寫學習單等，屬於靜態的數學名詞；而小組合作共同組合扣條，並使用工具觀察討論時，這樣解決問題的相關動作即屬於動態的數學動詞。

二、依據專業程度

Monroe與Panchyshyn (1995) 主張，學生必須學習四類的詞彙以協助發展數學概念：詞彙、準詞彙 (semi-technical)、一般 (general) 詞彙和符號 (symbolic)。例如，「指數」和「正三角形」即是數學領域的詞彙；「volume」則是準詞彙，其在數學領域與日常生活中的含義不同；而一般詞彙是數學領域中使用且意義與日常生活運用相同的詞彙；符號指的是非文字形式傳遞數學意義的表徵，如數字、等號、單位等均屬之 (吳昭容、曾建銘、鄭鈴華、陳柏熹、吳宜玲, 2018)。在四邊形單元的教學活動中，「正方形」、「長方形」等四邊形名稱即是數學領域的學術詞彙；而準詞彙則是在數學領域上有正式規定和定義的詞彙，與日常生活共用但含義不同，如「角」一詞，在數學上有嚴格的定義；一般詞彙如「距離」，在數學領域與日常生活中的含義相同；符號則如直角記號，以非文字形式表達數學概念。

注意：直線距離 vs 軌跡長

三、依據符號系統

數學詞彙涉及三個符號系統的相互作用，分別為自然語言、數學符號系統和視覺顯示 (Barwell et al., 2017)。若將四邊形教學中的數學詞彙依據符號系統來分

類，自然語言為發表、討論等對話；數學符號系統是表示垂直和平行的符號；視覺顯示則為四邊形的圖像來呈現概念。

四、依據表徵模式

Zwiers (2006) 提及學術詞彙包括：(一) 語言模式和短語，如「我同意他的說法」或「我們討論後發現……」；(二) 針對內容領域的書面和口頭語言模式，如證明解決問題的書面證明或討論；(三) 特定學科的詞彙，如測量、倒數或垂直等。四邊形教學中的數學詞彙，依據表徵模式來分類，可分為對話模式和短語，如對話過程中的「你是怎麼知道的？」、「你同意嗎？」等引發討論或總結的話語；針對內容領域的書面和口頭語言模式比前述再多點數學詞彙的語言，如「用量角器量梯形的角」；特定學科的詞彙則如課程中所提及「垂直」、「平行四邊形」等數學詞彙。

破音
異義

五、根據使用頻率

詞彙可分為三個級別：第一層為最典型的單詞，是生活中人際交流中的一部分；第二層是在各個領域中發現的高頻率詞彙，包括功能性或程序性詞彙，如識別和評估，稱為「學術詞彙」，即學生跨學科會遇到的單詞；第三層為較低頻率的單詞，通常是特定於內容的單詞，如同位素、指數等，稱為「特定領域詞彙」，即特定主題或學科的專門詞彙。

改「同位角」更好

數學課堂中使用的數學話語形式多樣，涉及口語、書面、接受和表達等多種模式；也有多樣的表徵形式，如圖像、圖片、詞彙、符號、圖表等；還有課本、應用問題、學生解釋、教師解釋等不同呈現方式；亦有不同類型的對話方式，如探索性、說明性等，以及向教師、同學、教師對學生等不同聽眾的發表方式 (Barwell et al., 2017)。數學話語活動的進行不只侷限於課堂中，也非僅有詞彙形式呈現，對象也不一定為師生，其涵蓋許多層面，比一般人想像得還廣泛。在進行數學話語活動教學前，為使學生們能順利的學習數學詞彙，Klaus-Quinlan與Nathenson-Mejía (2010) 認為教師需要：(一) 理解日常對話和學術話語之間的區別；(二) 確定、明確地教導和營造專業學術詞彙的使用；(三) 了解詞彙和學生用語之間的異同，可建立在其相似性上，使彼此間差異清晰且可理解。在教學過程中應積極向學生介紹詞彙，鼓勵學生找到自己的描述方式且能與他人互動的方法。教師專業知識方面，應與其他領域教師一同討論，將數學教學方面的專業知識與話語教學方面的

專業知識相結合 (Barwell et al., 2017)。

伍、數學話語活動設計

此節每前文判若兩文，未足夠連結和呼應

為了能讓師生進行順暢之數學話語的活動，教師可從分析教科書內容中的數學詞彙開始，然後進行數學話語活動的設計，最後進行課室互動，以提升數學語言的連結和應用。本文茲以國小四年級之四邊形單元為例，提供範例參考。

一、教材數學詞彙分析

教科書中有關四邊形單元內之數學詞彙分類與比較如表1。

表1

教科書有關四邊形數學詞彙彙整

版本 內容	甲版	乙版	丙版
兩直線間的關係：垂直和平行的認識、判斷、繪製	<ol style="list-style-type: none"> 互相垂直：兩條直線相交所形成的角是直角時 互相平行：同一平面上，兩條直線垂直於同一條直線時 兩平行線之間的距離處處相等 <ul style="list-style-type: none"> 關係的敘述：直線A和直線B互相垂直、直線A垂直於直線B 如何檢視：先把互相垂直的線做上直角記號、延長直線 描繪：三角板畫出互相垂直和互相平行的直線 	<ol style="list-style-type: none"> 互相垂直／垂直：兩條直線相交的夾角是直角時 互相平行／平行：在同一平面上，兩條直線同時垂直另一條直線時 和兩條平行線互相垂直的線段長是兩條平行線間的距離 <ul style="list-style-type: none"> 關係的敘述：直線A和直線B互相垂直 如何檢視：直線\perp延長和直線\perp相交後的夾角是90°時、把有互相垂直的直線做上直角記號 描繪：描出三角板上直角的兩邊、三角板、量角器畫垂直 	<ol style="list-style-type: none"> 互相垂直：兩條相交的直線，相交處如果有一個角是直角（兩條直線相交，只要有一個角是直角，則其他的角也都是直角） 互相平行：藍線、綠線都和紅線互相垂直，我們稱藍線和綠線互相平行 兩平行線間的距離處處相等 <ul style="list-style-type: none"> 關係的敘述：直線A和直線B互相垂直 如何檢視：三角板或量角器檢查兩條直線是否互相垂直、互相平行（用尺測量輔助） 描繪：三角板畫出互相垂直的線

表1 (續)

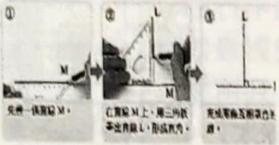
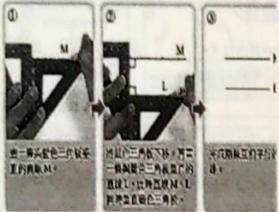
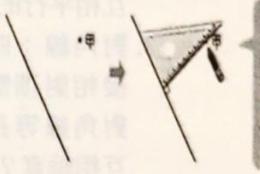
版本 內容	甲版	乙版	丙版
	<p>⑦ 用三角板畫出互相垂直的直線。</p>  <p>⑧ 用一組三角板畫出互相平行的直線。</p> 	<p>⑦ 畫出兩條互相垂直的線。說說看，你是怎麼畫的？</p> <p>方法一：我先把三角板上的直角的兩條邊。</p> <p>方法二：我先畫一條直線，再把三角板放在直線上，用三角板上的直角來畫。</p> <p>方法三：我利用量角器畫出90度的角。</p> 	<p>② 通過甲點畫一條和紅線互相垂直的直線。</p> 
<p>四邊形性質的認識</p>	<p>4. 四邊形：有四個邊和四個角的圖形</p> <p>5. 對邊：相對的邊</p> <p>6. 鄰邊：相鄰的邊</p> <p>7. 對角：相對的角</p> <p>8. 正方形：四個邊都等長且四個角都是直角的四邊形→對邊是否互相平行？</p> <p>9. 長方形：兩雙對邊分別等長且四個角都是直角的四邊形→對邊是否互相平行？</p> <p>10. 菱形：四個邊都等長的四邊形→對邊是否互相平行？對角是否互相相等？</p> <p>11. 平行四邊形：兩雙對邊分別互相平行的四邊形→對邊是否互相相等？對角是否互相相等？</p>	<p>4. 四邊形：有四個頂點、四條邊和四個角</p> <p>5. 鄰邊：共用頂點的兩條邊</p> <p>6. 對邊：相對的兩條邊</p> <p>7. 對角：相對的兩個角</p> <p>8. 對角線：相對頂點的連線</p> <p>9. 正方形：四條邊都一樣長，四個角都是直角，且兩雙對邊都分別互相平行</p> <p>10. 長方形：四個角都是直角，兩雙對邊等長，且都分別互相平行</p> <p>11. 菱形：四條邊都一樣長的四邊形→四個角有什麼關係？兩雙對邊分別互相平行嗎？</p>	<p>4. 對邊：四邊形中相對的邊</p> <p>5. 鄰邊：四邊形中相鄰的邊</p> <p>6. 對角：四邊形中相對的角</p> <p>7. 長方形：四個直角，兩雙對邊等長且互相平行</p> <p>8. 正方形：四個邊等長，四個角都是直角，兩雙對邊都互相平行</p> <p>9. 平行四邊形：四邊形的兩雙對邊都互相平行</p> <p>10. 梯形：四邊形只有一雙對邊平行，另一雙對邊不平行</p> <p>• 檢查平行四邊形的對邊是否平行：延長直線再檢查是否平行</p>

表1 (續)

版本 內容	甲版	乙版	丙版
----------	----	----	----

- | | |
|--|---|
| <p>12. 梯形：只有一雙對邊互相平行的四邊形</p> <p>13. 對角線：四邊形中連接相對頂點的直線→對角線等長？對角線互相垂直？</p> | <p>12. 平行四邊形：兩雙對邊都分別互相平行的四邊形（兩雙對邊都分別一樣長，且兩雙對角都分別一樣大）</p> <p>13. 梯形：只有一雙對邊互相平行的四邊形</p> |
|--|---|

先寫出各四邊形的名稱，並在敘述正確的「」中打「✓」：

四邊形				
名稱				
四邊都等長				
兩雙對邊分別等長				
四邊角都是直角				
兩雙對角分別相等				
兩雙對邊分別互相平行				
只有一雙對邊互相平行				

下面各種四邊形分別有哪些性質？在方格內打「✓」。

性質	平行四邊形	長方形	菱形	正方形	梯形
兩雙對邊分別互相平行					
只有一雙對邊互相平行					
兩雙對角分別相等					
4 條邊都一樣長					
兩雙對角分別相等					
4 個角都是直角					

繪製四邊形

- 使用一組三角板正方形：一條直線邊 \hookrightarrow 垂直於邊 \hookrightarrow 的平行線 \hookrightarrow 、 \square →在平行線 \hookrightarrow 、 \square 上找出和邊 \hookrightarrow 等長的地方為頂點→連接頂點
- 平行四邊形：兩條平行線 \hookrightarrow 、 \hookrightarrow →一條和兩條平行線 \hookrightarrow 、 \hookrightarrow 相交的斜線邊 \square →畫出和邊 \square 平行，且和兩條平行線 \hookrightarrow 、 \hookrightarrow 相交的直線 \hookrightarrow
- 梯形：兩條不等長的平行線 \hookrightarrow 、 \hookrightarrow →連接兩條平行線 \hookrightarrow 和邊 \hookrightarrow 的頂點
- 方格紙畫給定兩邊的平行四邊形、給定一邊的正方形、長方形、菱形
- 梯形：先畫出一條直線，再畫出一條不等長的平行線，再分別連接起來畫出另外兩邊
- 平行四邊形：畫出與第一條一樣長的平行線，再分別連接起來畫出另外兩邊
- 有刻度的兩條平行線畫出平行四邊形和梯形

用下面有刻度的兩條平行線作邊，畫出平行四邊形和梯形。

② 小組用一組三角板畫正方形。

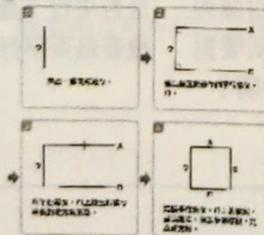
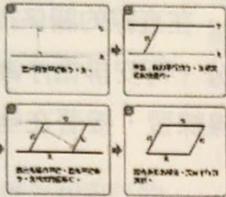
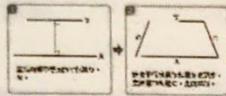


表1 (續)

版本 內容	甲版	乙版	丙版	
全等圖形	<p>① 全等用一組三角板畫出平行四邊形。</p>  <p>② 全等用一組三角板畫出正方形。</p> 	<p>14. 全等三角形：兩個三角形可以完全疊合</p> <ul style="list-style-type: none"> 找出全等三角形：找出兩個全等三角形的對應邊和對應角並做上相同記號 	<p>14. 全等三角形：沿著四邊形對角線剪開→正方形可以剪成兩個全等的三角形，且這兩個三角形是等腰直角三角形</p>	<p>11. 對應點：兩個圖疊合在一起的頂點</p> <p>12. 對應邊：兩個圖疊合在一起的邊</p> <p>13. 對應角：兩個圖疊合在一起的角</p> <p>14. 全等圖形：兩個形狀和大小一樣的圖形</p> <p>15. 兩個全等圖形，對應邊一樣長，對應角一樣大</p> <p>16. 平行四邊形的兩雙對邊等長，兩雙對角分別一樣大</p> <ul style="list-style-type: none"> 拿出附件，沿對折線/虛線(對角線)剪開

三個版本在平行垂直到四邊形的活動順序相同，先介紹垂直和平行，接著說明四邊形的邊、角性質，再認識各類四邊形。在最後的畫四邊形和全等圖形的順序上稍有不同，甲版和乙版先安排全等三角形再畫圖，丙版則相反。丙版藉由對平行四邊形進行分割後形成的兩三角形疊合，以推得平行四邊形的兩雙對邊等長，兩雙對角分別一樣大。本文使用的版本是甲版，從學習內容來看，課本內容大致符合所對應的學習內容；在教學流程看來，有一定的順序，後一活動基於前一活動所學的概念進行。其中，認識對角線的活動或許可穿插在認識四邊形中，因透過對角線的分割可得知四邊形的內部特徵，而前一活動的認識四邊形中最後的比較表格即為統整

支持丙版。
甲、乙版捨
前面發展的
四邊形經
發不用，則
到純數學
觀察的三角
形全等。甚至
導向而不智。

四邊形特徵，若依據課本安排順序，學生認識四邊形特徵後，又再探討各四邊形特徵，似乎又繞回前一活動的比較，若讓後一個活動緊扣前一個活動的結果或概念，教學流程會較為流暢；教學內容上，操作活動多，可讓學生從操作中發現四邊形性質，學習能有深刻印象，但有些地方可再調整，例如，在直線的關係描述上出現直線A垂直於直線B，但前面部分未提及；畫四邊形部分，可安排循序漸進的活動，先從方格紙開始畫圖，再用有標記刻度的兩條平行線練習，接著在全白的紙上作圖，讓學生逐漸熟悉作圖。

二、數學話語教學的活動設計

學生在四邊形活動中，會使用先前兩活動所需概念，配合工具再轉化為有步驟的動作，出現之相關詞彙有：平行、垂直、鄰邊、對邊；作圖上，正方形和長方形皆由一點開始畫出一邊，透過垂直關係畫出其兩鄰邊，再取固定長度畫出對邊。平行四邊形和梯形是由點開始畫出一邊，透過平行關係畫出其對邊，再由平行關係畫出鄰邊；學生可觀察的動作有：使用尺畫線、量角器或三角板畫出平行或垂直的邊，會發現學生根據四邊形的邊和角的性質，依序畫出四邊形。有關繪製四邊形性質之數學語言，彙整其中共同出現的詞彙及動作，作為學生在此教學活動中應表現的數學語言，活動內容如表2。

表2

數學話語教學活動內容

活動名稱	學習目標	教學內容
平行與垂直	垂直和平行的認識、判斷	1. 教師出示鋼筋混凝土的圖片並提問： <ol style="list-style-type: none"> (1) 看過這個嗎？在哪看過？ (2) 該怎麼組才能讓房子穩固？ (3) 直的和橫的之間有什麼關係呢？ (4) 橫的呢？它們之間又有什麼關係？
		2. 教師歸納學生想法並提出平行和垂直的概念： <ol style="list-style-type: none"> (1) 平行：在同一平面上，兩條直線垂直於同一條直線時 (2) 垂直：兩條直線相交所形成的角是直角時
		3. 教師與全班討論如何判別平行和垂直： <ol style="list-style-type: none"> (1) 該怎麼知道這兩條線是否互相平行或垂直呢？ (2) 可以使用什麼工具協助檢查？ (3) 該怎麼做？

表2 (續)

活動名稱	學習目標	教學內容
平行與垂直	垂直和平行的繪製	4. 教師與全班討論平行和垂直該做什麼記號表示 5. 發下學習單請學生辨別是否平行或垂直，並將互相平行和垂直的線做記號 1. 教師提問引導學生畫兩平行和垂直的線： (1) 你覺得需要哪些工具？ (2) 該怎麼畫呢？說說看你的想法 (3) 該怎麼檢查是否畫正確呢？需要哪些工具？怎麼做？ (4) 學生回答整理提出平行的性質：兩平行線間距離處處相等 2. 學生使用工具實際畫出與給定直線互相平行或垂直的線 3. 評量：學生完成學習單
四邊形	全等圖形性質	1. 教師向全班介紹扣條怎麼使用 2. 教師帶全班回顧三角形的分類： (1) 以角來分：銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形 (2) 以邊來分：不等邊三角形、等腰三角形、正三角形 3. 教師指派任務，請小組利用扣條組合給定的三角形： (1) 正三角形 (2) 等腰三角形（橘+紫色） (3) 等腰三角形（綠+黃色） (4) 等腰三角形（藍+紅色） (5) 不等邊三角形 4. 小組觀察三角形邊角特徵並向全班分享，展示結果 5. 教師請各小組做出五種全等的三角形：正三角形、等腰三角形、等腰直角三角形、直角三角形、不等邊三角形 (1) 怎麼做出這兩個一模一樣的三角形呢？ (2) 怎麼知道這兩個三角形一模一樣呢？ (3) 教師整理學生回答並提出全等圖形性質 6. 請學生將兩全等三角形的一邊重疊： (1) 兩個三角形組合成新的圖形叫什麼？是怎麼想的？ (2) 這個四邊形有幾個邊？幾個角？ (3) 如果想要讓別人清楚知道我在說的這兩條邊的位置關係（手指黑板），該怎麼說別人才聽得懂？ (4) 那麼原本重疊的那個三角形的邊該怎麼說呢？ (5) 整理學生回答： 相鄰的邊叫做「鄰邊」 在對面的邊叫做「對邊」 對角的連線叫做「對角線」

表2 (續)

活動名稱	學習目標	教學內容
四邊形	透過操作，認識四邊形的簡單性質	<p>1. 教師要求學生將三角形一邊重疊組成四邊形並分類：</p> <ul style="list-style-type: none"> (1) 正三角形組成的四邊形 (2) 等腰三角形組成的四邊形 (3) 等腰直角三角形組成的四邊形 (4) 直角三角形組成的四邊形 (5) 不等邊三角形組成的四邊形 <p>2. 教師帶全班為四邊形命名，並且一一整理各四邊形的性質：</p> <ul style="list-style-type: none"> (1) 這種四邊形的邊有什麼特別的地方？角呢？ (2) 如果要幫這種四邊形取名字會取什麼？說說看為什麼？ (3) 有哪些圖形是由兩個全等的三角形組成的？說說看你怎麼知道的？ (4) 教師整理學生回答，將結果再次告知全班： <ul style="list-style-type: none"> 正方形：四個邊都等長且四個角都是直角的四邊形 長方形：兩雙對邊分別等長且四個角都是直角的四邊形 菱形：四個邊都等長的四邊形 平行四邊形：兩雙對邊分別互相平行的四邊形 梯形：只有一雙對邊互相平行的四邊形 <p>3. 評量：小組完成學習單</p> <p>1. 教師發下釘板和橡皮筋（兩人共用一個釘板），請學生觀察釘板，並試著做出給定邊長的各四邊形：</p> <ul style="list-style-type: none"> (1) 請和隔壁同學討論，試著用橡皮筋做出邊長3個格子的正方形，說說看你們是怎麼做的？ (2) 依此類推，教師請學生做出指定邊長的各四邊形：長方形、平行四邊形、梯形 <p>2. 教師總結學生們操作方法（步驟）：由一點作為頂點開畫出直角與平行線段，並用</p> <p>3. 教師發下學習單（方格紙）：行間巡視，分別找出畫出正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形的學生，並邀請他們分享如何畫出這些圖形</p> <p>4. 教師總結學生們的作圖方法</p> <p>5. 教師發下學習單（兩平行線），請學生畫出正方形、長方形、平行四邊形、梯形</p> <p>6. 教師發下學習單（全白、給定邊長），請學生畫出正方形、長方形、平行四邊形、梯形：</p> <ul style="list-style-type: none"> (1) 這次畫圖與前面幾次有什麼不一樣的地方？說說看

表2 (續)

活動名稱	學習目標	教學內容
		(2) 在紙上畫圖需要準備哪些工具？說說看你是怎麼想的
		(3) 由學生分享總結畫圖方法

三、數學話語課室的實施方案

(一) 認識平行與垂直 (如圖 1)

1. 鋼筋間該如何綁才能讓房子穩固？怎麼想的？ *四年級生活經驗？*
2. 將照片中平行的地方找出來並做記號，說說看什麼是平行？
3. 將照片中垂直的地方找出來並做記號，說說看什麼是垂直？
4. 我們要如何知道這兩條線是不是平行呢？可以使用哪些工具幫忙？為什麼？

把方法寫下來。

5. 我們要如何知道這兩條線是不是垂直呢？可以使用哪些工具幫忙？為什麼？

把方法寫下來。

6. 挑戰一下，將互相平行和垂直的線做上記號。

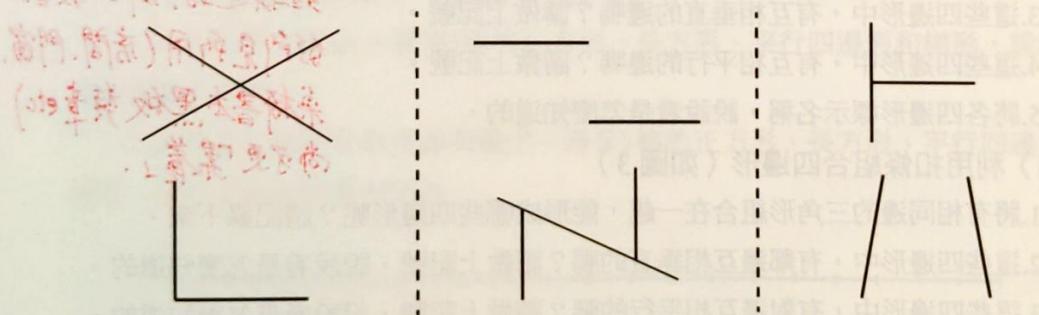


圖1 認識平行與垂直

(二) 畫出平行線與垂直線 (如圖 2)

1. 暖身一下，將互相平行和垂直的線做上記號。

2. 畫畫看：

- (1) 試著畫出和直線互相平行的線，說說看需要什麼工具？你是怎麼畫的？

把步驟寫下來。

- (2) 該怎麼檢查自己是否畫對？把方法記下來。

- (3) 試著畫出和直線互相平行的線，說說看需要什麼工具？你是怎麼畫的？

把步驟寫下來。

(4) 該怎麼檢查自己是否畫對？把方法記下來。

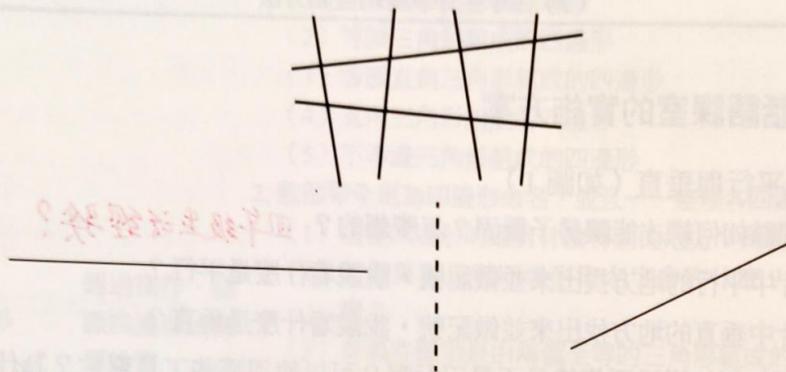


圖2 畫出平行與垂直線

(三) 利用扣條組合三角形

1. 利用扣條組合出的三角形有哪些？請記錄下來。

2. 兩個全等三角形能組成哪些四邊形呢？請記錄下來。

3. 這些四邊形中，有互相垂直的邊嗎？請做上記號。

4. 這些四邊形中，有互相平行的邊嗎？請做上記號。

5. 將各四邊形標示名稱，說說看是怎麼知道的。

(四) 利用扣條組合四邊形（如圖3）

1. 將有相同邊的三角形組合在一起，能形成哪些四邊形呢？請記錄下來。

2. 這些四邊形中，有鄰邊互相垂直的嗎？請做上記號，說說看是怎麼知道的。

3. 這些四邊形中，有對邊互相平行的嗎？請做上記號，說說看是怎麼知道的。

4. 將各四邊形標示名稱，說說看是怎麼知道的。

(五) 利用釘板作圖

1. 利用釘板，做出一邊長3格的正方形，說說看是怎麼完成的，把作法寫下來。

2. 利用釘板，做出一邊長3格的長方形，說說看是怎麼完成的，把作法寫下來。

3. 利用釘板，做出一邊長3格的平行四邊形，說說看是怎麼完成的，把作法寫下來。

至此看來皆為對管設計的
的教室內活動，亦與生活
經驗連結，例如教室內
的所見所用（房間、門窗、
桌椅書本黑板獎章etc）
尚可更「累贅」。

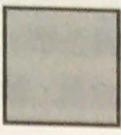
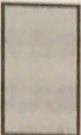
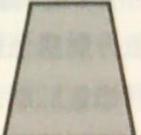
圖形					
名稱					
由哪兩種三角形構成？					
這兩種三角形有什麼特徵？					
四邊形有什麼特徵？	邊長				
	對邊				
	角				
	對角				
	其他				

圖3 利用扣條組合四邊形

4.利用釘板，做出一邊長3格的梯形，說說看是怎麼完成的，把作法寫下來。

(六) 方格紙畫圖與創作 (如圖 4、圖 5)

1.在方格紙上畫出一邊長3格的正方形、長方形、平行四邊形和梯形，說說看是如何畫出來的。

2.在兩條互相平行的直線間畫出一邊長3格的正方形、長方形、平行四邊形和梯形，說說看是如何畫出來的。

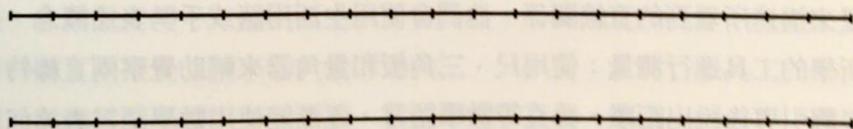


圖4 利用線段畫出四邊形

3.畫出一邊長3公分的正方形、長方形、平行四邊形和梯形，說說看是如何畫出來的。

(1) 需要哪些工具？

(2) 怎麼畫出來的，把步驟寫下來。

- A.正方形 B.長方形 C.平行四邊形 D.梯形

4.塗塗看：請將圖中的梯形塗上紅色，平行四邊形塗上橘色，菱形塗上綠色，正方形塗上藍色，三角形塗上黃色。

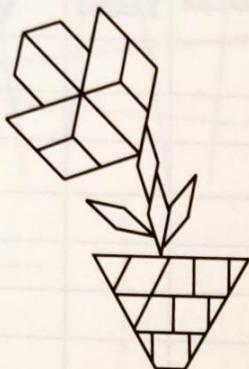


圖5 將圖形塗上顏色

陸、結論與建議

一、結論

(一) 在平行和垂直活動中，學生大多能使用距離、垂直等數學語言表達平行和垂直的概念

學生在學習平行和垂直時，由於沒有垂直和平行的詞彙知識，一開始僅能從視覺的感受來描述所看到的直線關係，他們會使用生活用語或手勢表達概念，接著透過先前所學的工具進行測量：使用尺、三角板和量角器來輔助觀察兩直線特徵，再經教師提醒引導後說出距離、垂直等數學語言，逐漸能使用數學語言表達何謂平行和垂直。

(二) 在四邊形概念活動中，學生大都能從邊和角的特徵表達四邊形的概念
學生由三角型分類依據——邊和角的分類方式開始活動，透過扣條組合三角形，再將兩個全等或是有一邊相等的三角形合成一個四邊形，學生由先前奠基的三角形邊、角概念，延伸擴大到整個四邊形的特徵，並引入「鄰邊」、「對邊」等名詞，以及前一活動的平行和垂直，從邊和角的特徵來表達四邊形的概念。

(三) 在四邊形繪製活動中，學生能用作圖工具由邊和角的特性畫出四邊形。延伸前幾個活動的概念，學生具備平行和垂直概念，以及了解四邊形特徵，透過工具（尺、三角板）的使用，能先畫出直線的平行或垂直關係，再依據四邊形特徵逐步畫出四邊形。

二、建議

在教學上，面對無法表達完整的學生，可鼓勵以畫圖方式表達，再配合文字補充說明，讓表達更清楚。引入概念和名稱後，可透過提問引導，帶學生聚焦在圖形特徵的名稱和關係上，如垂直、平行、鄰邊等，並適時停頓，等待學生思考和整理想法。討論發表時，當一學生分享完，教師也能邀請其他學生補充、修正，讓敘述能愈來愈完整。而在作圖時，學生會不習慣將作法說出來，教師可在臺前示範且刻意做錯，學生即會立刻修正作法，為了能畫正確，使用的語言會愈來愈精確。由於數學概念的發展與數學詞彙緊密關聯，且數學課堂中語言的複雜性，要支持學生應對這種複雜性，應制定有原則、有目的性的數學話語活動，透過課室師生實踐，以支持學生學習在數學課堂中使用數學詞彙，並用數學概念進行推理與解題應用。數學話語活動的實施可以整合學生數學能力的發展，強化學生數學學術素養，期盼在教學的歷程能支持數學討論，允許學生使用多種表徵形式，以進行有關數學內容的交流和從事數學實踐。

參考文獻

- 吳昭容、曾建銘、鄭鈴華、陳柏熹、吳宜玲（2018）。領域特定詞彙知識的測量：三至八年級學生數學詞彙能力。《教育研究與發展期刊》，14（4），1-40。doi:10.3966/181665042018121404001 [Wu, C.-J., Chang, C.-M., Zheng Q.-H., Chen, P.-H., & Wu, Y.-L. (2018). Measurement of domain-specific vocabulary knowledge: Math vocabulary abilities of students in grades 3-8. *Journal of Educational Research and Development*, 14(4), 1-40. doi: 10.3966/181665042018121404001]
- 教育部（2018）。十二年國民基本教育課程綱要：國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域。臺北市：作者。[Ministry of Education. (2018). *Twelve-year national basic education curriculum outline: National primary and secondary schools and ordinary senior secondary school mathematics*. Taipei, Taiwan: Author.]
- Barwell, R., Moschkovich, J., & Phakeng, M. S. (2017). Language diversity and mathematics: Second language, bilingual and multilingual learners. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 583-606). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cavanagh, S. (2005, July). Math: The not-so-universal language. *Education Week*. Retrieved from [http://www.barrow.k12.ga.us/esol/Math The Not So Universal Language.pdf](http://www.barrow.k12.ga.us/esol/Math%20The%20Not%20So%20Universal%20Language.pdf)
- Crowhurst, M. (1994). *Language and learning across the curriculum*. Scarborough, Canada: Allyn & Bacon.
- Dunston, P. J., & Tyminski, A. M. (2013). What's the big deal about vocabulary?. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 19(1), 38-45.
- Gee, J. P. (1996). *Social linguistics and literacies: Ideology in discourses*. London, UK: Imprint Routledge. doi:10.4324/9781315722511
- Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning*. Baltimore, MD: University Park Press.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Groups (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-98). New York, NY: Macmillan.
- Kazima, M. (2007). Malawian students' meanings for probability vocabulary. *Educational Studies*

- in *Mathematics*, 64(2), 169-189.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press. doi:10.17226/9822
- Klaus-Quinlan, M., & Nathenson-Mejía, S. (2010). *Bridging words and worlds: Effective instruction for culturally and linguistically diverse learners*. Denver, CO: Public Education & Business Coalition.
- Monroe, E. E., & Panchyshyn, R. (1995). Vocabulary considerations for teaching mathematics. *Childhood Education*, 72(2), 80-83.
- Moschkovich, J. N. (2015). Academic literacy in mathematics for English learners. *Journal of Mathematical Behavior*, 40, 43-62. doi:10.1016/j.jmathb.2015.01.005
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: Author.
- O'Halloran, K. (2005). *Mathematical discourse: Language, symbolism and visual images*. London, UK: Continuum.
- Riccomini, P. L., Smith, G. W., Hughes, E. M., & Fries, K. M. (2015). The language of mathematics: The importance of teaching and learning mathematical vocabulary. *Reading & Writing Quarterly*, 31(3), 235-252. doi:10.1080/10573569.2015.1030995
- Rubenstein, R. N., & Thompson, D. R. (2002). Understanding and supporting children's mathematical vocabulary development. *Teaching Children Mathematics*, 9(2), 107-113.
- Schwartz, J. L., & Kenney, J. M. (1995). *Assessing mathematical understanding and skills effectively*. Cambridge, MA: Harvard Graduate School of Education.
- Seethaler, P. M., Fuchs, L. S., Star, J. R., & Bryant, J. (2011). The cognitive predictors of computational skill with whole versus rational numbers: An exploratory study. *Learning and Individual Differences*, 21(5), 536-542. doi:10.1016/j.lindif.2011.05.002
- van der Walt, M. (2009). Study orientation and basic vocabulary in mathematics in primary school. *South African Journal of Science and Technology*, 28(4), 378-392. doi:10.4102/satnt.v28i4.73
- Zwiers, J. (2006). *Building academic language: Essential practices for content classrooms*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

(本篇已授權收納於高等教育知識庫，<http://www.ericdata.com>)

Mathematics Academic Literacy: The Application of Mathematical Discourse in Curriculum and Teaching

Chia-Huang Chen

Abstract

The development of mathematics language is an important aspect of teaching mathematics to students, and this process will continue throughout the mathematics education. As far as mathematical language is concerned, the ability to use vocabulary to explain, prove, and communicate mathematically is essential to the development of overall mathematical ability. The understanding of mathematical vocabulary allows people to use concepts, so it is imperative to carry out mathematical teaching in the field of language. This article intends to introduce the Moschkovich's connotation of mathematical profession literacy, connect mathematical ability and practice with mathematical discourse, explain the characteristics of mathematical discourse and the types of mathematical vocabulary, provide the process and examples of mathematical discourse teaching, and hope to provide teachers with the teaching of mathematics in the future reference basis.

Keywords: quadrilaterals, vocabulary, discourse, mathematical language