弦表：三角函數的真諦

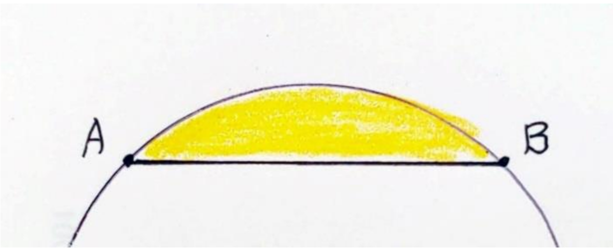
單維彰・民國 113 年 3 月 18 日・8 月 11 日修

在〈拋物線本事 — 文化觀點〉裡，作者說古希臘數學「並沒有不重實用」。現在要說的故事，可以為那一句雙否定修辭提供一則肯定的例子：古希臘也有超級實用的數學。那就是托勒密（Claudius Ptolemy，約 100–170）的弦表。弦表不但是最早的函數觀念之一，也具體呈現了三角函數（sin、cos 等）的真諦，它還是對數（log）的動機。說這個故事的目的並不是講史，讀者很容易查到相關的數學史；作者想說的是歷史對數學教育的啟發，特別要闡明「角」與「三角」真正應該學習的素養。

故事從《九章算術》說起。很多讀者已經知道：《九章》是古中國最偉大的數學典籍，兩千年來（進入現代之前）的華人數學家（以前稱為「疇人」）皆以此書作為標準的入門教材。很多人寫過《九章》「有」什麼，但這裡要說它「沒有」什麼——《九章》有兩個主要「懸念」：兩道沒有正確公式的題目。

《九章》的第一個懸念是球體積公式；可見這條公式不容易，它可以作為文明進展的一個里程碑。這個懸念還好，不太久之後被祖氏父子（祖沖之與祖暅）解決了；所謂「祖暅原理」就是在球體積公式的推論過程中出現的，可惜目前的教科書都沒有善用這一則美妙的歷史故事。漢文明比希臘文明晚了 700 多年抵達「球體積」里程碑，但比起其他文明還算是早的。

《九章》的第二個懸念「弧弦互算」可就嚴重了。問題來自於〈方田〉章「弧田」節，書中未能提供「弦矢求弧」的一般性算法；且聽我娓娓道來。在圓上任取兩點，就說它們是 A、B。兩點決定的線段稱為 AB 弦；兩點之間，而且長度不超過半圓的那一段圓周，稱為 AB 弧──本文所說的「弧」都是「圓弧」的簡稱，如圖一。在此配置中，AB 弦和 AB 弧稱為彼此相對的弦或弧。



圖一

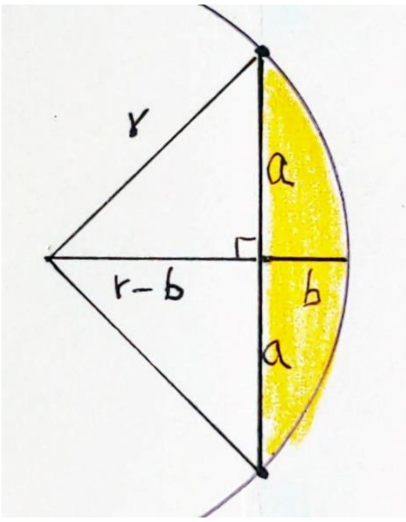
彼此相對的弦與弧圍成的平面區域，如今稱為弓形，《九章》稱為弧田。在弓形內部，弦的中垂線段稱為矢。所謂弦矢求弧的題目是：已知弦長與矢長，求弧田面積。《九章》沒能給出這一題的公式。而這個弧田未竟的懸念，成為中國數學的千年懸案，一直懸到歐洲數學傳入為止；華人始終沒能自己解決這個問題。

歷史還有另一種可能，後面再說。

讀者的立即反應或許是：弓形面積不就是扇形減去三角形嗎？這個觀念沒錯。參閱圖二，三角形的一個頂點是圓心。為了稍後的公式較為簡潔，假設已知的弦長為 $2a$，矢長為 b，則三角形面積很簡單：$a(r-b)$；但扇形面積是什麼？古人知道：假如弧長是 $2s$，則這一段弧在整個圓中所佔的比例為 $\frac{s}{\pi r}$，所以扇形面積是 $\pi r^2 \times \frac{s}{\pi r} = rs$。於是可以得到「弦矢求弧」的公式：

$$\text{弧田面積} = rs - ar + ab$$

其中，圓半徑 r 可以運用畢氏定理從弦矢算出來：$r = \frac{a^2+b^2}{2b}$，但始終找不到從弦矢算出弧長 $2s$ 的公式，也就是無法從 a、b 算出 s。所以「弦矢求弧」也可以說是從弦矢求弧長的問題。而這個問題的本質，其實是「弧弦互算」，也就是在已知半徑的前提下，從弧算出相對的弦長，反之從弦算出相對的弧長。



圖二

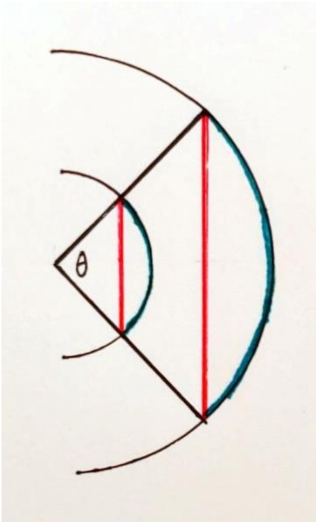
讀者如果搜尋心中記得的公式，會想到：我們需要知道弧所對的圓心角。這就是關鍵了：東方與西方文明的一個關鍵性的分岔點，就發生在這個不起眼的小觀念：角。《九章》以及其後的所有中國算書，都沒有討論圓心角，也沒想到：把弦與弧聯繫起來的關鍵是圓心角，當然也不曾想過要測量角。缺了角的漢文明，始終不能「弧弦互算」。作者認為「華人無角」這個歷史評論，雖然嫌它過於簡化，卻大體上不失公允。[1]

所有圓彼此相似。參閱圖三，給定圓心角之後，伸縮半徑，只會使得角所對的弦和弧按比例放大或縮小；也就是說半徑在這個脈絡裡的角色就像比例常數，它不是問題的關鍵。因此，現代教科書大多令半徑為單位長。從此之後，本文一

---

[1] 延伸閱讀：李國偉（1991）。中國古代對角度的認識。載於李迪主編，**數學史研究文集第二輯**，內蒙古大學出版社與九章出版社，6–14。http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/ar/ar_li031208_1

律以「給定半徑 r」為大前提。



圖三

如圖三，我們以 θ 同時表示圓心角以及它的測量數值（角量）。因為圓具備任意旋轉的對稱性，所以θ 所對的弧長／弦長只由角的大小決定，與角的方位無關。因此弧長／弦長全然由角量決定，這就是函數觀念：弧長／弦長是所對之圓心角量的函數，讓我們分別用 $\mathrm{arc}\theta$ 和 $\mathrm{crd}\theta$ 表示這兩個函數。小學用「度」作為角量的單位，得到 arc 的公式——函數的代數表達式——是：

$$\mathrm{arc}\theta = \frac{\pi}{180}\cdot r\theta \text{，其定義域為 } 0 \le \theta \le 360$$

高中用「弳」為單位換成另一條公式：$\mathrm{arc}\theta = r\theta$，其定義域為 $0 \le \theta \le 2\pi$。弧長公式是「反之亦然」的函數關係，意思是圓心角量決定它所對的弧長：$s = \mathrm{arc}\theta$，弧長也決定它所對的圓心角量：$\theta = \mathrm{arc}^{-1} s$。反算的公式為：

$$\theta = \mathrm{arc}^{-1} s = \frac{180}{\pi}\cdot\frac{s}{r} \text{ 度 } = \frac{s}{r} \text{ 弳}$$

同樣地，若將角限定在 $0°$ 到 $180°$ 範圍內，則角 θ 與弦 c 之間也有「反之亦然」的函數關係；圓心角量決定它所對的弦長：$c = \mathrm{crd}\theta$，弦長也決定它所對的圓心角量：$\theta = \mathrm{crd}^{-1} c$。

以圓心角為中介，arc 和 crd 兩種函數可以實現「弧弦互算」，而配置如圖二的「弦矢求弧」就能算了：弧長 $2s = \mathrm{arc}\left(\mathrm{crd}^{-1}(2a)\right)$；題目中的矢長 b 用來決定半徑 r。但問題是 $\theta = \mathrm{crd}^{-1} c$ 只是觀念上的函數，它並沒有代數表達式，也就是說它沒有「公式」，所以它還是不能算。其實歷史有另一種可能：或許《九章》作者群以及後來的疇人思考過圓心角，但是苦於找不到 $\theta = \mathrm{crd}^{-1} c$ 的公式，因此而裹足不前。

缺了角的漢文明仍然有高度的工程成就：我們不但有萬里長城，還有南北大

運河，這些工程都少不了大地測量。由此可見，大地測量並不真的需要角。《九章》的〈勾股〉那一章提供了足夠測量所需的數學。勾股就是直角三角形，《九章》從不討論它的銳角，只運用它的三邊比就足夠做大地測量了。西方採用一般三角形做測量，其優勢是可以應用正弦定理與餘弦定理。但這兩個定理都是畢氏定理的推廣(〈勾股〉章也有畢氏定理)，所以採用一般三角形只是比較方便一點，可以少做幾次測量，並沒有本質的差異。

真正需要角的是「弧弦互算」，它不但可以解決弦矢求弧問題，也是天文測量的基礎數學；可以說角的威力在於量天，而不是量地。缺角對文明的損害，首先發生在天文與曆算。當耶穌會傳教士來到中國，東方的曆算已經落後了，西來會士靠著曆算本領進入欽天監，在朝廷裡找到了立足點。難道西方找到了「弧弦互算」的公式嗎？理論上並沒有，但實際上夠用了。關鍵人物就是托勒密。

相對中國人追求 $c=\mathrm{crd}\theta$ 的計算公式，希臘人則追求它的尺規作圖法，兩者皆不可得。生於希臘文明晚期的托勒密突破了傳統桎梏，他想：就算沒有從角 θ 算弦 c 的公式，但畢竟 θ 和 c 的一一對應是固定的，只要使盡渾身解數，運用各種湊合的方法，把 θ 和 c 的對應數值算出來記在一張表格上，就可以取代公式了。想想看，還有什麼比製表更實用的數學？再想想，如果有人願意十年寒窗苦，把這張表算出來，並且昭告天下，使得任何人不再需要算，只要查表就知道答案，那是何等偉大的人格？托勒密就是這樣的偉人。

表格中的 θ 不可能涵蓋 $0°$ 到 $180°$ 範圍內的所有角度，但托勒密估計未來五百年的測量儀器最多只能觀測到 1/2 度，所以它決定從 1/2 度開始，每隔 1/2 度算出 θ 所對的弦長：亦即「解析度」是 $\frac{1}{2}°$。但弦長通常是無理數，表格中的 c 不可能呈現全部小數。但實際測量並不需要很多位小數，托勒密決定將「精確度」設為六十進制的三位小數（六十進制第一、第二、第三位小數的位名為分、秒、忽），也就是每個弦長的數值準確到半徑的 60^3 分之一；意思是說，假設半徑為 1，弦長的數值準確到 $\frac{1}{216000}$。這份偉大的成果就是托勒密的「弦表」。

因為圓內接正六邊形的邊長等於半徑，所以 $\mathrm{crd}\,60°=1$；《幾何原本》有正五邊形的尺規作圖法，托勒密用它推論圓內接正五邊形的邊長，並取得六十進制的三位小數估計值：$\mathrm{crd}\,72°\approx 1$ 又 10 分 21 秒 3 忽（誤差約為 0.000001）。托勒密應用古典的平面幾何知識──對托勒密來說，歐幾里得是 400 年前的古人──證明了 crd 函數的差角公式、和角公式、倍角和半角公式，過程中出現著名的托勒密四點共圓定理。他用這些公式計算 $\mathrm{crd}(72°-60°)=\mathrm{crd}\,12°$、$\mathrm{crd}\,6°$、$\mathrm{crd}\,3°$，因為當時的代數技術不足，托勒密無法推論三倍角公式，所以他不能求解 $\mathrm{crd}\,1°$。托勒密另闢蹊徑，證明不等式：

$$\frac{2}{3}\operatorname{crd}\frac{3}{2}^\circ \le \operatorname{crd}1^\circ \le \frac{4}{3}\operatorname{crd}\frac{3}{4}^\circ$$

用它「夾擠」出 $\operatorname{crd}1^\circ \approx 1$ 分 2 秒 50 忽（誤差約為 0.0000007）。最後，弦表提供了 $\operatorname{crd}\frac{1}{2}^\circ$、$\operatorname{crd}1^\circ$、$\operatorname{crd}1\frac{1}{2}^\circ$、… 的六十進制估計值。假如真的發生不在表內的角度，例如需要估計 $\operatorname{crd}47\frac{23}{60}^\circ$，托勒密也提供了內插算法。這張表經過阿拉伯傳入歐洲，一直用到十六世紀。

伊斯蘭文明在托勒密弦表的基礎上，創造了三角函數。以正弦為例，參閱圖二，令圓心角為 θ，則 $\frac{a}{r}=\sin\frac{\theta}{2}$。我們可以用托勒密的 crd 來定義 sin：

$$\sin\theta=\frac{1}{2}\operatorname{crd}2\theta$$

在當時，三角函數都是沒有公式的觀念性函數，它們全都以數值表格呈現。大多數使用三角函數的人並不知道那張表是怎麼來的，就像我們日常使用的語言文字一樣，弦表和三角函數表可以視為文化遺產：它怎麼來的並不重要，重要的是能夠使用它。

受弦表的啟發，西方人食髓知味，做了對數表。函數 $y=\log x$ 的意義是 $10^y=x$，當時它也是一個找不到公式的觀念性函數，但有人想到可以製表，用數值表格呈現對數函數。直到現在，臺灣的數學教育仍然延續文化的情緒：糾結於公式。當函數關係沒有公式的時候，我們就不知道該教什麼？不論三角還是對數，我們的教學經常專注於相關的公式（它們都是次要的公式），卻不學習直接應用這些函數來解決問題，很可能是因為心理上還沒接受「表格」也是函數。

現在我們知道，由弦算角的公式需要無窮多步驟的計算，也就是說，函數 $\operatorname{crd}^{-1}c$ 的代數表達是所謂的冪級數，反之 $c=\operatorname{crd}\theta$ 的公式也是冪級數，這不是古人能做的。如今主流文化認為「弧弦互算」是牛頓（1642–1727）的成就之一，但日本人發現關孝和（1642–1708）也做出同樣結果，因此感到非常光榮。

華語有牛角、街角、視角（看法、觀點），但它們都不是數學上的「角」；這四種角在英語各有不同的字，顯示中西文化對「角」的概念截然不同。對我們而言，數學上的「角」全然是外來的概念。這個事實對數學教育有著幽微而長遠的影響，我們必須特別謹慎以對。最根本的是修改三角比的教學態度：三角比是歷史文化傳給我們的工具，不要追求它的公式，不要專攻它的恆等式，要學習如何用它解決問題。而大地測量並不是「角」的重要應用，特別在 GPS 時代，測量已經變成人文的（歷史的）學習內容，所以「角」的學習不該聚焦於三角形，而是圓心角。