

國立中央大學

數學系
碩士論文

國小六年級負數教學的探討

A Study on Teaching Negative Numbers in Sixth Grade

研究生：黃俊博

指導教授：單維彰

中華民國一百一十四年六月

國立中央大學圖書館學位論文授權書

填單日期：__114__ / __6__ / __24__

授權人姓名	黃俊博	學號	111221001
系所名稱	數學系	學位類別	☒ 碩士 ☐ 博士
論文名稱	國小六年級負數教學的探討	指導教授	單維彰

學位論文網路公開授權

授權本人撰寫之學位論文全文電子檔：

- 在「國立中央大學圖書館博碩士論文系統」。

(☒)同意立即網路公開

()同意 於西元____年____月____日網路公開

()不同意網路公開，原因是：_____

- 在國家圖書館「臺灣博碩士論文知識加值系統」

(☒)同意立即網路公開

()同意 於西元____年____月____日網路公開

()不同意網路公開，原因是：_____

依著作權法規定，非專屬、無償授權國立中央大學、台灣聯合大學系統與國家圖書館，不限地域、時間與次數，以文件、錄影帶、錄音帶、光碟、微縮、數位化或其他方式將上列授權標的基於非營利目的進行重製。

學位論文紙本延後公開申請 (紙本學位論文立即公開者此欄免填)

本人撰寫之學位論文紙本因以下原因將延後公開

- 延後原因

()已申請專利並檢附證明，專利申請案號：

()準備以上列論文投稿期刊

()涉國家機密

()依法不得提供，請說明：_____

- 公開日期：西元____年____月____日

※繳交教務處註冊組之紙本論文(送繳國家圖書館)若不立即公開，請加填「國家圖書館學位論文延後公開申請書」

研究生簽名： 黃俊博

指導教授簽名： 單維彰

國立中央大學碩士班研究生

論文指導教授推薦書

數學 學系/研究所 黃俊博 研究生所提
之論文

國小六年級負數教學的探討
係由本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授 單維章
114年4月30日

國立中央大學碩士班研究生
論文口試委員審定書

數學系碩士班 學系/研究所 黃俊博 研究生
所提之論文 國小六年級負數教學的探討
經由委員會審議，認定符合碩士資格標準。

學位考試委員會召集人

委

員

陳收權
陳收權
單維創
劉旨峯

中 華 民 國

114 年 6 月 11 日

摘要

本研究旨在研究國內六年級學生是否能學會負數，是否能達到國外同齡學生的程度。參考國內外不同版本的教科書，自行設計課程內容及教學方法，藉由研究者前往教學現場進行教學，以探討國小六年級學生對負數概念的學習成效，並期許學生能達到國外同齡學生的數學水平。

本研究同時進行量化與質性的研究。在量化方面，本研究採用採用前後測準實驗研究法，對台北市某國小四個班級的 76 位六年級學生進行教學實驗。資料分析以成對樣本 t 檢定的方式，來探究接受教學後受試者在學習成效測驗上的差異情形。

本研究的量化研究發現，接受教學後的學生其學習成效明顯高於接受教學前的時候，特別是對平時學業表現較好的學生，學習成效達到顯著的差異。因此推論在國小高年級進行負數單元的初步教學是可行的，能提升未來在與國中課程銜接時的學習效率。

質性研究方面，我們著重在學生是否具備跟負數相關的能力。諸如能繪製包含負數的數線、比較負數的大小、簡單整數的加減、相對量、負數和減號的讀法，並根據學生在課程及測驗的表現進行分析並找出學習困難的原因或學生能成功學習的證明。並且我們在應屆學生畢業升上國中正式學習負數後對部分學生進行訪談，透過問答了解提前授課對學生的幫助和學生對不同教學方法的接受程度。

最後本論文依據研究結果，對國小實施負數單元教學、課綱改革以及未來之相關研究提出建議。

關鍵字：六年級、負數、數學領域課程綱要、生活經驗

Abstract

The purpose of this study is to design curriculum content and teaching methods based on the first section "Negative Numbers and Number Lines" in the "Integers and Number Lines" unit of the domestic junior high school mathematics textbook (Kang Hsuan). The researcher will conduct teaching in the classroom to explore the learning effectiveness of upper-grade elementary school students regarding the concept of negative numbers.

This study employs a quasi-experimental pretest-posttest design, conducting a teaching experiment with 76 sixth-grade students from four classes in an elementary school in Taipei City (with one foreign student providing data for international students). Data analysis will utilize paired sample t-tests to investigate the differences in learning outcomes on the assessment after the instruction.

The quantitative findings of this study indicate that students' learning outcomes after instruction are significantly higher than before, particularly for those with better academic performance. This suggests that preliminary teaching of the negative numbers unit in upper-grade elementary school is feasible and can enhance learning efficiency when transitioning to junior high school curricula.

At the beginning of the experimental teaching, the researcher used concrete examples to help students discover and understand the concept of negative numbers, receiving a certain level of response during the instruction. This shows that the life experiences of domestic students are related to the negative numbers curriculum. By leveraging these life experiences, we assist students in learning about negative numbers and applying what they have learned to other real-life situations, promoting learning transfer. Notably, since students have already encountered thermometers in

natural science contexts, we designed a curriculum starting from temperature to bridge their old and new experiences.

In terms of qualitative research, we focus on whether students possess abilities related to negative numbers, such as drawing number lines that include negative numbers, comparing the magnitude of negative numbers, performing simple addition and subtraction with integers, understanding relative quantities, and reading negative numbers and subtraction signs. We analyze students' performances in lessons and assessments to identify the reasons for learning difficulties or evidence of successful learning.

Finally, based on the research findings, the researcher offers suggestions for implementing negative number unit instruction in elementary schools, curriculum reform, and future related studies.

Keywords: Sixth grade, Negative Numbers, Mathematics Curriculum Guidelines, Life Experience

誌謝

時光飛逝，一轉眼就到了口試的時間。一路走來，遇到了許多對我伸出援手的教授、老師和學生，因為有他們的幫助我才能完成學業。

首先，我要感謝我的指導教授單維彰教授，在論文的選題、研究及撰寫過程中提供了精心的指導與幫助。衷心地感謝單老師給我的論文提出了許多意見和建議，每當我缺少思路或是論文內容偏離主題您都會把我引回正確的道路上，包括實驗教學的上課內容、前後測的題目設計以及訪談的題目，這些都設計的目標與內容需要面面俱到，使學生深受啟發，思維開拓許多。

其次，我要感謝同意並協助我到國小授課的鄭秋美主任、張雅曠老師、曾淑玫老師、沈珏安老師和王雅惠老師，讓我占用他們的時間到班上授課並協助我完成同意書和前後測的收繳。若沒有他們協助，是無法完成研究資料的蒐集。更重要的是老師們在教學後會給我教學反饋，讓我知曉自己不足的地方，並能從專業教師的角度去重新認識負數這個單元與學生在學習負數時遇到的困難。

第三，我要感謝參與教學的學生與其家長，感謝家長的信任並同意自家的孩子參與課程，也謝謝願意犧牲自己的時間並花費心力來上課的學生，也因為有他們的參與才能讓這份研究的實驗數據更完整。

我還要感謝我的爸爸媽媽，焉得諼草，言樹之背，養育之恩，無以回報，你們永遠健康快樂是我最大的心願。

最後我要向百忙之中抽時間對本文進行審閱，評議和參與本人論文答辯的各位老師表示感謝。

三年來，我所取得的些許進步得益於這些老師的教導，在此深表敬意和謝意。感謝我周圍的同學和朋友，在我失去方向的時候，他們給我以靈感。感謝我父母，正是由於他們的支持我才能一步步走到今天，感恩之情，無以言表。感謝中央大學給我提供了一個良好的學習平台，讓我在這寧靜的環境中潛心苦讀三年，讓我有新的開始。

目錄

摘要.....	I
Abstract.....	II
誌謝.....	IV
目錄.....	V
圖目錄.....	VII
表目錄.....	VIII
第一章 緒論	
第一節 研究背景與動機.....	1
第二節 研究目的.....	5
第三節 研究問題.....	7
第四節 名詞釋義.....	7
第五節 研究範圍與限制.....	8
第二章 文獻探討	
第一節 負數的意義.....	12
第二節 負數的教學.....	15
第三節 負數的課程.....	20
第四節 負數教學的實證研究.....	28
第三章 研究方法與設計	
第一節 研究流程.....	36
第二節 研究對象.....	41
第三節 研究工具.....	41
第四節 教學方法.....	44
第五節 資料分析的統計方法.....	47

第四章 研究結果與討論	
第一節 研究指標與數據.....	49
第二節 前測數據分析結果.....	50
第三節 數據分析結果.....	53
第四節 數據討論.....	78
第五章 結論與建議	
第一節 結論.....	79
第二節 實驗教學的過程與後續.....	85
第三節 建議.....	90
參考文獻	95
附錄一 課程學習單(一)	97
附錄二 課程學習單(二)	98
附錄三 質性訪談內容	99
附錄四 前測測驗卷	100
附錄五 後測測驗卷	101
附錄六 教學投影片	102
附錄七 教學教案	103

圖目錄

圖 2-1-1 丟翻圖負負得正矩形示意圖.....	15
圖 2-4-1 數學應用-正負電荷互相抵銷概念.....	30
圖 2-4-2 負數算式在數線上的位移.....	30
圖 2-4-3 負數的意涵學習單.....	33
圖 2-4-4 負數在生活中的對比.....	34
圖 2-4-5 用正負號表示相對量.....	35
圖 3-1-1 實驗課程準備流程.....	40
圖 4-2-1 前測成績分布圖.....	50
圖 4-2-2 前測第一大題成績分布圖.....	51
圖 4-3-1 前後測總成績分布.....	57
圖 4-3-2 前後測第一大題成績分布.....	59
圖 4-3-3 前後測進階題成績分布.....	61
圖 4-3-4 錯誤類型 1.....	62
圖 4-3-5 錯誤類型 2.....	62
圖 4-3-6 錯誤類型 3.....	62
圖 4-3-7 錯誤類型 4.....	63
圖 4-3-8 前測第二大題題目.....	64
圖 4-3-9 前後測第二大題成績分布.....	65
圖 4-3-10 前測第三大題題目.....	68
圖 4-3-11 前後測第三大題成績分布.....	71
圖 4-3-12 前測第四大題題目.....	72
圖 4-3-13 前後測第四大題成績分布.....	73
圖 4-3-14 前測第五大題題目.....	75
圖 4-3-15 前後測第五大題成績分布.....	75

表目錄

表 3-1-1 負數概念的教學目標.....	37
表 3-5-1 研究假設與變數.....	48
表 4-2-1 前測二、三大題正確率.....	52
表 4-2-2 前測四、五大題正確率.....	52
表 4-2-3 前測各大題詳細資料.....	52
表 4-3-1 六年五班課堂學習單表現.....	53
表 4-3-2 六年五班後測成績表現.....	54
表 4-3-3 前後測總成績樣本統計量.....	57
表 4-3-4 前後測總成績成對樣本相關性.....	57
表 4-3-5 前後測成對樣本檢定-成對差異.....	57
表 4-3-6 前後測第一大題樣本統計量.....	59
表 4-3-7 前後測第一大題成對樣本相關性.....	59
表 4-3-8 前後測第一大題成對樣本檢定-成對差異.....	60
表 4-3-9 前後測第二大題樣本統計量.....	66
表 4-3-10 前後測第二大題成對樣本相關性.....	66
表 4-3-11 前後測第二大題成對樣本檢定-成對差異.....	66
表 4-3-12 前後測第二大題正確率比較.....	67
表 4-3-13 前後測第三大題樣本統計量.....	71
表 4-3-14 前後測第三大題成對樣本相關性.....	71
表 4-3-15 前後測第三大題成對樣本檢定-成對差異.....	71
表 4-3-16 前後測第四大題樣本統計量.....	73
表 4-3-17 前後測第四大題成對樣本相關性.....	73
表 4-3-18 前後測第四大題成對樣本檢定-成對差異.....	73
表 4-3-19 前後測第五大題樣本統計量.....	76

表 4-3-20 前後測第五大題成對樣本相關性.....	76
表 4-3-21 前後測第五大題成對樣本檢定-成對差異.....	76

第一章 緒論

本章分為五節，第一節為研究背景與動機；第二節為研究目的；第三節為研究問題與研究假設；第四節為名詞解釋；第五節為研究範圍與限制。

第一節 研究背景與動機

數學是一門利用符號語言研究數量、結構、空間等概念的學科。知名的發展心理學家皮亞傑認為兒童的數學觀念並非有人傳授給他們，而是獨立發展出來的。當我們將概念灌輸給兒童時，所傳遞的不過是文字而已。概念的形成是一個漫長的過程，把遇到的經驗記錄在腦海中進行分類，或者把經驗歸類到舊有且符合的類別中。在我們的一生中，我們不斷重複分類歸檔的行為，就算隨著年齡遞增也沒有停止過。

皮亞傑認為兒童的認知能力非常豐富，只是會因為知識儲備量的不足導致思考方式不同。因此他針對兒童的年齡劃分出四個認知發展階段。而本次研究對象年齡為 12 歲兒童，其認知發展階段處於形式運算階段 (Formal Operations Stage)，開始會類推，並具有邏輯思維和抽象思維。

在接觸到新事物時，我們會和之前經歷過的事物比較，但是兩件事物是不可能相同的，會受時間、空間、外觀.....等因素影響。但我們會從之前的物體中篩選出不變量 (invariant)，而這些不變量會在我們記憶中保存很久，用來和之後遇到的資料比對。舉例來說，兒童在學習負數單元前可能已經在生活中接觸到負數，在冰箱上看到溫度顯示-2 度 C，在溫度計上看到-1、-2.....等刻度或是看到悠遊卡的餘額顯示-24 元。兒童將見到的負數共通點記錄在腦中(數字前面有一個負號，小，欠錢，低等概念)。之後只要遇到跟負數有關的事物就會喚醒我們之前對負數的記憶。抽象得到的不變量可能不只一個，我們會從數個不變量中進一步發展出更高層次的抽象通性，最後獲得

「負數」的概念。

在知曉一個事物的名稱前，我們對該事物就有一定的認知，之後透過命名對事物進行分類。上述的行為對於概念的成形有好有壞，因為我們是依靠某種標準去對事物分類。比如我們在溫度計上看到 0 以下的數字(-1、-2、-3...等)並提出疑問，「這些數字是甚麼?」「這些是負數。」。我們可能會在腦海中把前面有帶「-」的整數這個印象和負數概念作連結，雖然合理但這是不嚴謹的。不過一旦事物以這種方式分類就會減弱概念與其他事物連結的可能。就上述的例子，如果我們見到-2.15 這個數字，會和當初「負數是前面帶有-的整數」概念相衝突。這是人類在隨著生活經驗的增長，構建概念時可能會遇到的問題。

在形成新概念的時候，如果我們無法給予新的概念一個名稱，那我們只能憑感覺摸索，這樣概念的邊界是很模糊的。而且如果知曉概念的名稱，我們也可以透過名稱去反推概念的內容。

回憶一下在求學過程中，我們在學習一個新的數學觀念時，老師是透過語言喚醒腦海中的經驗，由此可知語言可以幫助概念的形成。如果我們將一個概念以語言或文字的形式加以定義，是否可以縮短概念形成的時間和手續?在數學領域中，定義是概念發展到最後的產物，但在教學現場教師通常都是由定義開始教學。

學生如果向老師詢問「負數究竟是甚麼?」，老師回答「負數是小於 0 的數。」並且用舉例的方式告訴學生「-1.2 、 $-\frac{2}{3}$ 、-4 這些數都是負數。」。如果學生接著問「老師，甚麼是數呢?」，我們就要考慮到很多如：整數，分數，小數.....。那我們還要一一去解釋這些個別概念，才能把它們統合成更高階的概念。這時定義就沒有想像中好用，但是定義並非全無用處，定義能幫助我們回溯我們心智發展的過程。

在我們生活中應用的概念都是相當基礎的，因此我們總是可以找到更高

階的概念並用定義的形式傳達較低階的概念給他人。通常還會補充自己對該物體的描述，如：學生向老師詢問甚麼是沙發？老師回答：「沙發是一種內部有填充物的椅子，它坐起來軟軟的」

在數學領域中概念比生活中的還要抽象。如：甚麼是數？，這時你會回答「1、3.5、-2、 $1/2$ 、0 是數，除了上述的之外無理數、複數甚至是 ∞ 都屬於數的範疇。」。除此之外，數也是量的抽象化，生活中我們常將 5 個人、5 台車等相似的類別用 5 來表示，較前面提到的「沙發」概念更難理解。

相較於美國、英國、芬蘭、德國等西方國家在兒童 10、11 歲(台灣學制國小高年級)就進行初步的負數單元教學(負數在數線上的位置，簡單負數加減，負數的大小)，台灣學生在 13 歲時才會正式接觸到負數單元，究竟是甚麼原因造成這個現象呢？單純課綱的安排？抑或是其他原因，如：生活環境不同造成學生知識儲備量不足，導致課綱決定不在小學階段教導負數這個數學概念。

班哲明 (Harold Benjamin) 在《劍齒虎課程》一書(呂正雄，1992)中，指出史前時代的部落透過類似學校教育的方式教導下一代「用火驅趕劍齒虎」、「徒手在河中抓魚」、「以粗樹枝擊殺小毛馬」等技能。但是在這個劍齒虎和小毛馬都已經不存在的時代，這些技能已經過時跟不上時代了。學生學習的課程也是如此，那我們還要去要求學生去學習過時的知識和技能嗎？英國的哲學家兼社會達爾文主義之父斯賓賽 (H.Spencer) 曾經對「何種知識最有價值？」這個問題提出想法，他認為對現在社會來說可以派上用場的知識才是有價值的，並用此觀點強調科學知識的重要性。

整體的教育環境有家庭、社區、工作場所等地點，學校只是其中的一環，所以就課程的選擇，學校應該安排一些能夠拓展日常生活經驗的學習經驗 (Tyler, 1958)。總而言之學校的主要功能是利用特有的資源與設備提供基本學科、複雜、重要、經純化過的學習經驗。若學校的課程無法按社會的

需求更新，將會失去其應有的功能，所以本國的課綱每隔一段時間就會進行修改，令課程更符合人們的需求。

相對於國中，國小的課程較為輕鬆，若安排小學生也能吸收的國中數學單元並弱化部份較不急著學習的課程，也能幫助學生提早適應國中課程並做銜接。其中一個議題是希望將國中的部分負數單元挪至國小高年級。其主要原因為國一的課程對學生負擔太重，為了配合自然領域會使用的科學記號概念，我國課綱將其安排進國中的數學領域，但是科學記號往後又延伸出了指數律。

Stein (2007) 對兩套內容編排差異極大的數學教材進行比較時，發現不同的內容呈現順序及題型比重會很大程度的影響學生的日後表現。Zhu 與 Fan (2006) 的研究也強調了教材題型的影響，研究顯示增加情境題和應用題的數量能讓教科書內容更加多元，也能建構一個幫助學生進行高層次理解的學習環境，除此之外更能讓學生明白學習該單元的作用，能解決生活中的哪些問題，許多專家強調數學學習應與情境結合(徐偉民，2014)。

教科書的內容會大大的影響學生的學習機會，對學生學習數學的方式產生直接的影響，進而影響學生的學習成效。而教科書的內容是依據課綱所編寫，一個好的課程編排可以幫助學生一步一步的建立認知結構，若課綱編排不善將會影響學生之後的學習。雖然課綱不一定達成理想，例如：為了因應快速變遷的社會，我國大約每十年會更改一次課綱，對教學目標及內容進行調整，讓學生具備適應社會的能力。曾經為了適應 IT 社會而安排的資訊課在 108 課綱中也融入了各個學科當中，變成了「生生有平板」。但在專業人員眼中只局限於應用層面，並不算是完整的資訊融入課程，課綱的完整目標是讓學生能用科技實踐，解決生活中的問題。雖然在課綱的執行上，台灣的表現不是很理想，但是好的課綱能給予學生及現場教師一個明確的努力方向，協助學生替之後的課程打下好的基礎。

台灣的課綱確實考慮到培養學生適應社會的問題，但是在執行時學生會遇到的問題和承受的學習壓力這些似乎都被忽視了，或許是因為沒有辦法去實際教學且每位學生所能承受的負擔也不盡相同。所以這些問題的解決方式只有在實際執行課綱後下次再進行調整，每次調整我們無法去準確預期學生的實際情況，因為這牽涉到現場教師的教學及學生的知識儲備。將負數單元挪至國小高年級階段教學的結果，是好是壞我們無法預測，但是從國際上有許多國家將負數單元設置在國小高年級進行教學來看，這個舉動想必有可取之處。既然外國學生能在國小高年級學會複數相關知識，那是否代表存在一套教學方法能幫助學生在國小階段學會負數單元，幫助台灣的國中生減輕學習負擔，這個問題是我們要去深究的。

前面提到課綱的安排為素養導向，是為了幫助學生適應現在複雜的社會需求，除了讓學生學習知識與技能，更培養面對問題應具備的態度。讓學習與生活結合，身體力行促進學生的全人發展。因此在決定課綱的大方向後，對其架構適時的進行調整也是不可或缺。所以希望能對現有的課綱進行調整，將國中負數單元課程安排至國小六年級，讓課程安排變得更符合學生的需求，使整個學習架構更為順暢，提升學生的學習成效，降低學生國中的學習壓力。

第二節 研究目的

為了進行課程調整，將國中的負數單元移至國小六年級進行教學，研究者欲提出該方案具有可行性的證明。避免課綱更改後造成學生學習上的困擾，影響學生後續的發展。美國、德國、英國、中國等國家皆將負數單元安排至國小高年級進行教學，雖然台灣歷史上沒有將負數單元在國小進行教學的案例，但我們可以大膽假設是否存在一套適合國小六年級學習負數單元的教材教法。

研究者根據教育部 108 課綱所制定的國中數學課程中的「數與數線」其囊括的「正數與負數」及「正負數的加減」，參考國內外數學課本設計一套教學課程。藉由研究者在小學六年級四個班級進行教學後，以 t 檢定比較前後測成績，查看經過教學後學生的成績是否有顯著差異，來探究學生在負數單元的學習成效。若學習成效不彰，則證明將負數單元移至國小六年級進行教學的想法或是不可行的，課綱的調整需更深入的探討。

本研究的主要目的如下：

- 一、 設計以生活為主題融入國中數學「正數與負數」及「正負數的加減」之課程，了解國小高年級學生對負數相關單元的學習成效。
- 二、 根據測驗結果及學生回饋釐清學生學習負數單元時可能遇到問題和困難，透過分析前後測成績來評估六年級學生學習負數單元的合適性。

課程的合適性會從可學習性及內容的有效性為主要判斷依據，深度廣度次之。將學生現有的經驗為起點，以生活經驗為基礎，並視學習者的能力適用學習經驗的焦點。研究者先根據本國學生的學習經驗進行調整調適，為了促成有效的學習，在規劃學習經驗時需要考慮學生的能力。所以為探明本國學生的能力將進行實驗教學並針對結果進行分析。

本研究對於負數課程編入高年級具有以下意義：

1. 本研究探究高年級學生在接觸負數相關單元的情形，推動課綱的改革及幫助教師面對改革後可能會遇見的問題。
2. 本研究得出的數據可供其他教學者做參考使用，幫助學生學習負數單元，增加學習成效。

第三節 研究問題

依據上節之研究目的，本研究之研究問題說明如下：

1. 六年級學生是否具備學習負數單元的能力?是否能達到國外同齡學生的水平?

我們將學生學習負數單元的能力又細分為「包含負數的數線」、「負數的大小比較」、「負整數的加減」、「相對量」及「數的分類」。這五項能力與美國、英國課綱中負數單元內容互相對應，若學生具備這五項能力，我們就可以說學生可以達到國外同齡學生的水平，具備在國小六年級學習負數的能力。

2. 通過質性訪談調查國中上課內容、方式與實驗教學兩者對學生學習負數的幫助何者較大?何種授課方式有助於學生認識負數?
3. 學生在學習負數時遇到的困難是否具普遍性?該如何解決?

第四節 名詞釋義

為了使閱讀者方便理解，下面將定義研究所涉及的重要名詞。

- 一、 學業表現：在和各班教師溝通後，教師有提到許多學習成效低落的學生，其家長不願意他們的小孩參加這個研究。因此學生的水平比實際情況好上許多。但也如此實驗學生之間的落差將急遽縮小。但學年主任對這次研究表示支持說服班上全部學生及家長給予相當大的支持，因此研究者用主任班上的學生作為標準進行前後測等第的分配。在本研究中「學業表現」是指學生在實驗教學中的學習成效表現。將該班學生學習單成績 PR85 以上者訂為高學業表現，PR60 至 PR84 訂為中學業表現，PR59 以下為低學業表現。
- 二、 表徵：(representation, 張春興, 1989) 是認知學派的重要概念。認知心理學認為將現實世界的事物以另一種較為抽象或符號化的形式

(文字、語言是抽象的)來代表的歷程，便是表徵。Lesh, Post,&Behr (1987) 從溝通的觀點，區分表徵為實物(實際情境)、具體操作物、圖形、語言以及符號。美國心理學家 J. S. Bruner 將表徵分為三大類：

1. 動作表徵 (Enactive Representation)：指三歲以下幼兒靠動作來認識瞭解周圍的世界，亦即靠動作來獲得知識，即「由做中學」的經驗。
2. 形象表徵 (Iconic Representation)：指兒童經由對物體知覺留在記憶中的心象 (Mental Image)，或靠照片圖形等，即可獲得知識，即「由觀察中學」的經驗。
3. 符號表徵 (Symbolic Representation)：指運用符號、語言、文字為依據的求知方式，即「由思考中學」的經驗。

第五節 研究範圍與限制

為了達成前述的研究目的，於是將研究範圍與限制界定如下。

一、研究範圍

本研究主要在探討在國小六年級實施負數單元教學的可行性。在教學現場進行實體教學後，透過前後測方式檢視學生之學習成效。

● 研究對象

本研究以台北市的一所公立國民小學六年級四個班級的學生為研究對象，四個班級分別為 22、11、17、26 人，共計 76 人。以班級為單位進行到班授課，課程堂數每班各兩堂共 80 分鐘，每次授課相隔兩天。

● 研究工具

本研究的研究工具為自行編寫的課堂學習單、前後測問卷及訪談大綱。課程囊括範圍主要依據教科書審定本「康軒版本」《數學一上》第一章「整數的運算」單元第一節「負數與數線」及第二節「整數的加減」，「翰林版本」《數學一上》第一章「數與數線」單元第一節「正數與負數」及第二節「正負數的加減」課程內容為主的改編教材，並根據下述相關能力指標作為依據設計相關的課程。

- 1.能透過情境中意義相對的量認識正負數，並能用正負數表徵情境中性質相對的量。
- 2.了解較小的數也能減去較大的數，其結果就是負數。
- 3.能透過情境了解正負數除了能代表位置量也能表示變動量。
- 4.了解構成數線的三要素，原點、單位長和箭頭方向。
- 5.能透過數線理解正負數大小，並能正確比較兩負數大小。

二、研究限制

本次研究沒有進行倫理審查，但研究者依然會保護參與者的基本權益。每位參與者在參與研究前都會被明確告知他們的權益、風險及資料處理方法，讓參與者及其家長在知悉與理解後決定是否參與研究，並以知情同意書簽名的形式做出回應。

本研究由於時間、人力和客觀條件無法配合，有以下限制。

● 推論的限制

本研究僅以台北市的一所國民小學六年級四個班級的學生為研究對象。四個班級的學生皆為隨機分班，因此班級間學生資質不會有太大落差。但是將範圍放到全國來看學生的資質可能就並非落於平均值。這是因為該小學落於住宅區，該校學生幾乎都是附近的居民，定居於此的居

民們其經濟水準不會落差太大。在學者 Sewell 與 Hauser (1976) 所發展的威斯康辛模式 (Wisconsin model) 亦證實家庭社經地位與學生學業成就之間有相當強的關聯。在研究者的大學實習時，選擇的學校為大安區的金華國小做為對象，由於該校坐落於台北市精華地段該區住戶非富即貴，家長通常為高社經地位者，和本次研究參與的學生相比該校學生的程度明顯較高。我們這時該考慮究竟是家庭因素還是學校的品質影響學生的學習成就，抑或是兩者都有。

美國學者 Coleman 等人 (1966) 檢驗不同背景的學生所產生的學校成就，是否因為學校教育機會不平等而有所不同？一般人相信，不利背景的學生所進的學校，其師生比例、教師素質及學術氣氛等各方面均比較差，但是最後的研究結果卻發現學校品質與學生學業成就幾乎沒有相關。研究顯示影響學生學校成就的竟是學生心智能力及家庭背景，而不是學校因素。這項研究的結論令人震驚，並具有很大的爭議性，雖然它遭受到很多人的質疑，但影響力非常顯著。Jencks 等人 (1972) 在《不平等》 (Inequality: A reassessment of the effect of family and schooling in America) 一書中，對不平等的教育結果提出很多精闢的見解，其中有關家庭社經地位與教育成就的關係如下：就個人教育成就而言，其受家庭背景影響的程度遠大於智商的影響，而家庭背景所產生的影響，一部分取決於個人的社經地位，一部分取決於在社經地位以外的文化及心理特徵。在個人受教育年數長短的決定因素中，學校因素的影響是微不足道的。臺灣的相關實證研究大多也證實家庭社經地位與子女學業成就呈正相關，也就是家庭社經地位愈高，子女的學業成就也愈高（周新富，2008）。

通過其他學者的研究我們理解學生學習成就和家庭社經地位有關，從 2023 年台北市各區平均所得來看，大安區的平均收入高於大同區，

而收入和社經地位成正相關，由此得出大安區學生家長之平均社經地位高於大同區。所以若此研究在金華國小實施，測驗結果將優於在大龍國小實施。因此在本研究中我們選擇的研究對象可能無法代表全台灣國小六年級生的平均值。

- 研究內容的限制

在研究內容方面，本研究的內容範圍為國中數學「數與數線」單元中的負數概念，所以研究結果不宜推論到其他科目或國中數學領域的其他單元。

第二章 文獻探討

本章依研究主題進行相關文獻之探討，以作為本研究的理論基礎，並藉此建立研究架構。本研究主要是使用自編教材在教學現場授課，並透過前後測結果評估學生在負數單元的學習成效，用來探討台灣國中負數單元部分內容在國小六年級進行教學的可行性。因此，本章分四節做相關之文獻探討，第一節討論負數的概念，第二節探討負數的教學，第三節分析負數的課程內容，第四節討論負數教學的實證相關研究。

第一節 負數的概念

西方的負數起源於希臘文化，希臘是西方文化的源泉，從哲學、藝術到數學都大大影響現代社會的發展。希臘文中 philosophy 一字代表「愛智慧」，又稱哲學，是對自然知識、社會知識、思維知識的統稱，用來追求世界的本質和共性或或絕對的形而上者為形式，用來確立哲學世界觀和引導人們正確的認識世界。

在希臘時期，數是一個存在量的表示方法，這造成負數概念的發展尤為困難。負數概念直到被西方承認要等到 19 世紀(陳淑娟，2013)，在這段時間中許多數學家投身於相關研究當中，融合各自年代的文化背景、觀點、技能才突破種種局限，促使這項數學成就的達成。

在東方，負數這個概念早在三國時期就被提出，著名數學家劉徽給出了正負數的定義，「今兩算得失相反，要令正負以名之。」(《九章算數，方程章著》)。劉徽曾經說過：「正算赤，負算黑，否則以斜正為異。」。用紅色的棍子擺出的數視為正數，用黑色的棍子擺出的數視為負數，也可以用擺放的方式區分，擺放歪斜的視為負數，擺放端正的視為正數。從這裡可以看出，古人已經把負數視為一個實質的量，而不是只

存在於概念之中。在數學著作《九章算術》中是這麼描述的：「正負數曰：同名相除，異名相益，正無入負之，負無入正之；其異名相除，同名相益，正無入正之，負無入負之。」。意思是同號的兩個數字相減，得到的答案為兩數字絕對值相減；異號兩數相減，得到的答案為其絕對值相加。用文字闡述可能不是很清楚，我們看看下面「同名相除」的例子：

$$(-4)-(-2)=- (4-2) \text{ 以及 } (+4)-(-2)=+(4+2)$$

同號兩數相減，括號前的符號為被減數的符號，括號內的數字為被減數的絕對值減去減數的絕對值；「異名相益」，異號兩數相減，括號前為被減數符號，括號內為被減數絕對值加上減數絕對值。「正無入負之，負無入正之」，零減去負數得到正數，零減去正數得到負數。這段關於負數運算的描述是無誤的。

負數其實不會距離我們的生活非常遙遠，在做生意時會有餘有虧，我們賺錢時會記錄賺取的金額，那虧錢時該怎麼紀錄呢，這種生活中可見的相反量是促進負數產生的主要原因。也因如此研究者認為我國學生在國中接觸負數略嫌太晚，負數概念偏向生活而非專業領域，在小學進行教學較為恰當。

「負是後退」、「負是相反」，目的在利用對比差異進而得到概念的意義(陳玉芬，2024)。國外的教科書中會利用數線來進行負數加減的教學，在台灣的國中課程中整數加減也是如此。國小時 $1+2=3$ 的算式，教師會說：「原本有一隻小貓又來了兩隻小貓，現在總共有三隻小貓。」。在國中認識完整的數線後，整數在數線上也會有其意義。我們賦予數距離和位置，不再只是一個單純的量。 $1+2=3$ 可以看成「從 1 的位置往正方向移動兩個單位長，最後落在 3 的位置」。也有另一種說法是「從原點往正方向移動 1 單位長後再往正方向移動 2 單位長，最終落在 3 的位置」。

那 $1+(-2)$ 呢? 「+」, 加號代表著往正方向, (-2) 代表著移動的單位長。若 2 是往前兩個單位長, 那 (-2) 便是後退兩個單位長。

在現在負數已經變成基本算數的一部分, 但在過去負數尚未被承認的時代, 雖然科學已經在其他方面有所建樹, 人們對負數了解卻不夠深入。1550 年, 史帝費爾 (Stifel) 認為負數是虛構的。1630 年, 法國 數學家笛卡兒認為負數是荒謬的。19 世紀中葉英國 數學家迪摩根 (De Morgan) 認為負數的解答無法想像。而在 1618 年, 克卜勒提出了行星運動規律, 1866 年阿爾佛·諾貝爾發明了矽土炸藥。那究竟是甚麼阻礙了人們對負數的認識, 英國 數學家迪摩根 (De Morgan) 在 1831 年說到:

「虛數 $\sqrt{-a}$ 和負數 $(-b)$, 兩者之間有一個共通點, 那就是它們以問題的答案出現時, 會出些一些矛盾和無法解釋的事情, 從實際意義來看 $0-a$ 和 $\sqrt{-a}$ 的存在一樣。」。

歐洲 的負數概念其實是波斯數學家阿爾·花喇子模從印度傳入歐洲, 印度人婆羅摩及多 (598-660) 和婆什迦羅 (1114-1185) 早就認識並懂得使用負數, 他們對負數的認識至今仍然被數學史學家所引用(國家教育研究院, 2007)。不過儘管歐洲人對負數的認識源自印度, 卻沒有受到印度人研究成果的影響。

希臘 數學家丟番圖 (Diophantus, 200-284) 在數的運算上也頗有研究, 但是他是透過展開方程 $(X-a)(X-b)$, 雖然並不是直接的證明, 但是這也側面反映出丟番圖確實懂得正負數法則。雖然可能正負數法則最初不是應用在「負數」這個獨立存在的概念。接下來我們以圖示的方式直觀了解「負數相乘, 得到一個正數」。

下面是丟番圖的作法, 令 a 、 b 、 c 、 d 皆為正數, $a > b$ 且 $c > d$, $(a-b)(c-d)$ 為何? 我們可以假設有一矩形兩邊長分別為 a 和 c , 在 a 、 c 兩邊上再定 b 、 d 兩點。 $(a-b) \times (c-d)$ 是個屬於 $a \times c$ 的小矩形, 它的面積是從 $a \times c$

的矩形面積減掉 $a \times d$ 和 $b \times c$ 這兩矩形面積，但這樣 $b \times d$ 矩形面積被減兩次，所以必須把它補回一次。最終 $(a-b) \times (c-d)$ 的矩形面積 $(a-b) \times (c-d) = ac - ad - bc + bd$ 也就是 $(-b) \times (-d) = bd$ 。

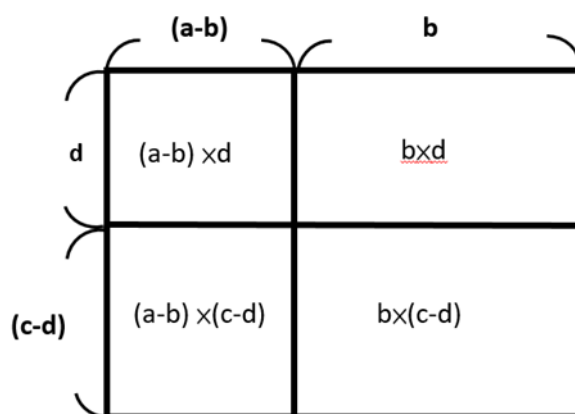


圖 2-1-1 丟翻圖負負得正矩形示意圖

根據上述研究內容研究者在實驗教學的課程中編入數線的教學，而非單純的負數認識，希望藉此讓學生更了解加減與數線的關係和釐清「負數具備相反性質」的意義，甚至能把負數相乘這種生活中不會出現的特殊現象用數學的角度去認識，讓「負負得正」不再是一句空洞的口訣。

第二節 負數的教學

隨著 108 課綱的推行，政府希望學校能培養學生「適應現在生活及未來挑戰所應具備的，知識、能力和態度」。但是數學領綱的研修團隊指出「態度」的層次太高不適合作為學習目標，反而較像是十二年國教完成時的總體目標(單維彰，2016)。因此在數學領域中前導研究提出以「知行識」作為課程的架構，以便「容易讓教科書編著者、教學者、評量者，都能了解課程設計的方向，使課程整體與實際執行之間能夠順利銜接」(林福來等，2013)。

「知」、「行」兩者就是「知道是甚麼」和「如何去做」，在教學上「知」是學習內容，「行」是操作能力。具體來說「行」不只要能完成操作與計算，學生還要知道「該做甚麼」，至於「為什麼要這麼做」、「以後會在哪裡派上用場」這些「識」方面的學習目標需要與學科內容作連結與統整，甚至是跨領域的整合，讓學生發現並欣賞到數學的價值並建立對數學的良好態度。

在學習負數的過程中學生會遇到一些困難，這並不意外，畢竟數學家們為了適應正負數的符號規則也花了 1500 年 (Janvier, 1983)。在教學中學生為理解負數這種複雜主題其過程的艱辛、經歷的困難需要被拿出來逐一探討。Altiparmak 與 Ozdogan (2010) 將學生學習負數時遇到的問題分成三大類;第一類：數的意義及數的方向性，第二類：負數的運算及意義，第三類：負號本身的意義，這些都是抽象的概念。Altiparmak 與 Ozdogan (2010) 認為使用具體的教學活動能幫助學生理解抽象的數學概念，比如負號的性質與代表含意及其在運算中的意義。研究顯示具備較高層次概念的學生比少概念知識的學生更能精確的表達問題 (Rittle-Johnson et al., 2001)，僅僅讓學生掌握負數的運算技能不足以幫助他們解決上述學習負數面臨的三個困難。

Schacterand 與 Fagnano (1999) 認為應該要制定一個教學策略是能讓學生將概念串聯在一起，對於首次接觸負數概念的學生，將環境中的已知事物與抽象概念聯繫起來會有很大的幫助，但並非對所有學生有效。因此建議使用計算機作為增強學習的工具，支持者認為此舉能增強學生的學習動機並使學習更有效率。Ball (1993) 通過為學生環境中發生的事件建立模型，成功解決了如負數的意義、數字系統、算術運算及負性的含義等問題，這些模型與他所識別的困境相一致。

Gallardo (1995) 和 Fischer (2003) 通過各種標準和分類研究了負數的認知表徵。他們指出，負數可以在數線上以合理的方式進行認知表徵。Gallardo 提出了負數的離散模型，並強調了這些模型在整數的加法和減法中的重要性。Peled (1991) 則構建了負數概念的量化維度和數線維度，並提到了數字知識的不同層次以及在數線上進行加法和減法的情形（如 $a, b > 0, a+b, b+a, a-b, b-a$ ）。Hativa 和 Cohen (1995) 的研究則識別了學生在理解有符號數字或負數的概念及其運算時所面臨的困難。

教學中教師會要求學生背誦「負負得正」這樣的口訣，學生總是無意識地重覆負數運算口訣進行代數運算，而因此認為自己已理解了負數運算 (Baroody 和 Ginsburg 1876; Gagatsis 和 Maria 2022)，但是學生其實不理解口訣的運作原理。

Hativa 和 Cohen (1995) 的研究指出，學生在理解正負數的概念以及正負數的運算時存在困難。他們建議利用電腦來促進自主學習，通過解決符合學生能力的挑戰性問題，並使用數線作為直觀模型，來幫助學生學習。他們的研究結果證明了學生在正式教學之前對負數有直覺的理解和非正式的知識，並且能夠進行簡單的運算。

Bruno 和 Martinon (1999) 使用「numerical knowledge」這個詞語去描述涉及數的概念、程序、表徵和算法相關的知識，並將其分成三種類：抽象的、情境的和數線的。他們認為數學的過程不應該總是具體的，例如：進行負數加減時要求學生畫出數線並在上面進行操作。

Altıparmak (2010) 認為教學者要逐步引導學生將過程抽象化，讓學生將程度提升到能進行抽象的過程。讓學生能進入抽象思考的階段是非常重要的，因此 Altıparmak 的研究將負數分為三個面向，負數計算的意義與數線，對負數有意義學習的詮釋和負數的例子。這三個面向對於從具體學習轉變為抽象學習至關重要，教學時使用電腦動畫將外面世界的素

材帶到教室中。某些情況下的負數案例無法被轉換成現實中的案例讓學生理解，因此也會使用電腦建立模型來輔助教學。

上述的研究者都認為學習負數需要一個過程，由具體到抽象，因此對於剛接觸負數單元的學生，我們應使用具體的教學方式引導，而非空泛的口訣。數字的方向性及大小在學習正負數時極具重要性，將現實中的例子轉換成表達式可以幫助學生理解，「一隻海鷗在海平面上方兩米處飛行，在數學上我們可以用+2 來表示」，運用情境幫助學生學習負數。

根據法國數學教育家 Guy Brousseau 的教學情境理論，其解釋了在教學過程中生成數學知識的條件。Brousseau (1997) 認為教學情境是一種教師與學生之間的關係，我們可以發現這是在建立一個讓學習者獲得知識的社會性計畫。因此數學概念的教學不能以純數學中所見的抽象結構形式進行。它必須在學校環境中進行；必須以一個有趣的問題的具體形式呈現，並轉化為學生能夠理解的意義。這樣，問題會引發他們的各種行動，包括對可能解決方案的某些表述、對同學或教師的解釋，從而在某種程度上促進所教概念的誕生。

數學教學中最大的問題是識別阻礙學生理解數學學科的障礙，許多概念被人們所認識到之前對許多數學家造成了困擾。因此，我們可以合理的假設這些問題仍困擾著剛接觸該領域的學生。數學的認知障礙也成為數學教學法中的一個研究方向，但是認知障礙論仍有一些爭議，許多研究者如 Artigue、Brousseau、Duroux、Schubring、Sierpinska 等均繼續完善這個理論 (Bruno, 1999)，不可否認的是學生在教學中的確會有認知上的困難，而教師要去解決這些問題。

在數學基礎中運算佔據了很大的一部分，在小學課程我們會用到加、減、乘、除……等符號進行運算，和舊課綱相比我們學數學的目的已經從知識本位轉移到能力本位，但是數學運算的重要性不能被輕忽，因為如

果缺乏足夠的運思練習，要達到真正的概念理解是不可能的(Schmid,2000)。我們想要帶給學生的並不是單純的計算答案，還要考慮具備理論上及實務上的重要性，況且數學基本計算是之後代數單元的先備知識，這是因為數字上的算術和多項式的算術有異曲同工之妙。

語言的學習有聽說讀寫四個部分，數學也是如此。聽，又分成兩個部分，聽老師說和同學說。聽老師說是最常見的上課模式，老師以講述法將知識傳遞給學生，而聽同學說是利用討論或發表等方式，讓單獨學生說出自己的想法，其餘學生思考其回答的合適性。因為年齡相近的緣故，同學之間的思想交流更能引起共鳴。說，將透過閱讀課本、課外刊物甚至聽講師授課讀到或聽到的知識以口語的方式表達出來。除了知識外思考歷程也相當重要，和同儕討論時能讓同學理解你的想法是最重要的。這代表被教學者能明確地將思考的過程闡述出來，透過這個行為也能去檢查是否將教學內容內化成功，也能訓練口語能力。說，在數學中還有一個稱呼叫做「讀」，此「讀」非彼「讀」，這個讀並非閱讀而是唸，學習目標中有許多和「讀」息息相關。例如：在負數單元，老師需要檢視學生是否能正確讀出包含負數的算式。讀，即閱讀，許多人認為數學領域的閱讀應該閱讀教材，但並不全然。學生應廣泛閱讀課外讀物如「中小學生數學課外閱讀系列」叢書、小學生數學報紙雜誌等。在教學現場實習時，會發現現在國小在推動晨間讀報活動，讀報不僅能使學生關注國內外大事，還能使學生關心生活週遭的數學，接觸有用的數學信息，感受數學的價值及數學帶來的便利。數學中的閱讀能力並非是單純的閱讀，而是類似建模的能力，能把數學文字轉換為實際情況或者將實際情況轉為數學文字。這對於應用解題和解決生活中的問題非常有幫助。寫，寫和說都是表達能力的一種，但是寫的層次卻高於說，這是因為寫是通過聽和讀進一步延伸的能力，需要聽讀有一定的程度，可以用

作對聽讀能力的檢驗，也是口說能力的深化。一個好的課程應該兼顧到聽、說、讀、寫四個方面。這四個能力環環相扣，每一個都需要教學者好好引導。

第三節 負數的課程

和台灣的課程安排不同，美國、英國、德國等國家將負數單元安排在孩童 10 或 11 歲的階段，並訂出該年齡孩童所應達到的學習目標，下面我們會逐一介紹。

美國各州的數學課綱和評量標準並不一致，這是因為美國憲法規定聯邦政府不能干預各州的教育。但在 2010 年聯邦政府提出了名為 CCSS (Common Core States Standards) 《各州共同核心標準》的文件，並在 2014 年實施，希望各州能有一套一致的評量機制。在六年級的評量標準中有下列幾項。

- 1.了解正數和負數並一起用於描述具有相反性質的值或物，例如：溫度高於/低於 0 度，海拔高度高於/低於海平面，正/負電荷。能使用正負數表示現實世界中的數量，解釋 0 在各種情況下代表的涵義。
- 2.能知道有理數是數線上的一個點，並將之前學習的數線和坐標往負數方面延伸。透過觀察數線觀察數字的負號的含意，認識到一個數在數線上以 0 為中心的對稱位置會相差一個負號，進而得出負負得正的結論。舉個例子：-3 在數線上以 0 為對稱點相反的位置是 $-(-3)=3$ ，而 0 的對稱點還是 0。
- 3.理解對數中前後數字符號不同，用來表示在坐標平面上不同象限，若兩坐標僅有符號不同，後方數字皆相同，那兩坐標位置是以一個或兩個坐標軸為對稱關係。

4.能在水平或垂直數線上找出特定整數或其他有理數，能在坐標平面上找出特定的有理數對。

上面四項為美國六年級小學生負數單元的教學目標 CCSS，接下來我們再看看英國的 National curriculum in England: mathematics programmes of study。

英國國小學生在六年級會有一個單元是「integer」也就是整數，單元的教學目標有下列六點。

1.認識整數，這個認識整數說的很籠統，但之後有作出解釋。是希望學生能透過情境來判斷該用甚麼數字來表達。舉個例子，請問哪個整數能表示下列情況：

「在盤子中放上四個糖果？」是+4 還是-4 呢？

「物品減少一公斤」又該如何表示呢？是+1 還是-1 呢？

2.認識數線上的整數，在數線上挖空後，學生能正確回答空格該填入的數字。

3.能正確的畫出數線並標上數字。

4.能知曉何謂相反值，會先請學生在數線上找出一個數字，並請他們找出其相反數。

5.能比較整數的大小，能判斷任意兩正負數的大小，教師在初期可以透過數線進行輔助。

6.能將多個整數從小排到大，此能力為第五項能力之延伸。學生將範圍擴大到所有整數，而不在拘泥於比較兩個數字，考驗學生對於數線的認識。

在德國的課程中 (Affordable Online Maths & English Tutoring for Year 1 to 12-German Curriculum)，12 歲的孩童除了負數概念外也開始接觸到平面坐標和向量之概念。將坐標的移動向量化在負數加減部分是一個重

要的教學目標，比如： $2+3=5$ 我們可以想成在數線上 2 的位置向右移動 3 單位，最後會到達 5 的位置。這對於之後國中的平面坐標單元有非常大的幫助。

比較國外的課程安排，在美國的《Houghton Mifflin Math》課本中完全沒有明確提到何謂負數，一進這個單元便說可以觀察數線，透過整數的位置判斷數線上各個整數的大小。沒有向學生解釋「-」的存在及其所代表的意思，好像已經將阿拉伯數字前面可以加上「-」視為理所當然。而另一本美國教科書《Everday Mathematics》中則有運用溫度計上的刻度去引導學生，計算負數加減時也以行人在數線上行走的方式讓學生對加減計算有更深的認識，例如

$$-3+5$$

行人從(-3)的位置出發，+代表行人的臉面向數線的正方向，加數的 5 則表示往前走 5 格。

英國的《Oxford Mathematics》課本中則有明確提到一個較小的數減去較大的數則會得到負數，之後直接引進包含負數的數線請學生觀察，課本上與生活經驗作連結的部分則出現在較後面的部分。

芬蘭的《Milli 4B》則單純的將數線往左延伸拓展負數部分，並透過數線讓學生比較負數的大小。在此引入負數的原因是為了後面的平面坐標部分，芬蘭在四年級就將坐標分為四個象限。而負數的加減則不在小學的課程範圍。

研究者借鑒了上述的資料並做出一些取捨，設計出適合台灣國小學生的實驗課程。

我們可以看到在介紹負數的單元，康軒及翰林的國中課本皆以正負溫度、氣溫等引入負號，並用零上和零下溫度來表示相對意義的量。較小的數字可以減去大數是小學「減法」概念的擴充，將原本認識的數從數

線上 0 的右邊擴展到整個數線。在現實生活中很多相對意義的量並不是一定要用正負數來處理，會使用到正負數的機會也不多。最貼近生活的應該是紀錄收支的時候，媽媽買菜花了 13500 元，出車禍醫藥費 68000 元而家庭收入是 54000 那我們用正負數來表示應該用

$$(-13500)+(+54000)+(-68000)$$

算出家庭的總開銷，若為負數代表入不敷出。一般我們會先比較數字的大小，這裡明顯看出

$$(-13500)+(+54000)+(-68000)$$

結果為負，確定正負後再用

$$68000+13500-54000$$

算出差額(林保平，2005)。對國小六年級學生而言算式「A-B」，只有 A 大於 B 時才會出現，若 B 大於 A 則應記為「B-A」。但其實「A-B」還是「B-A」無論 A，B 何者為大皆為正確，這是兩數比較大小時，統一的表示方式。在教學時除了前者的引入條件外，後者的存在也有其意義，協助學生建立統一的比較大小呈現方式，並能透過 A-B 的結果判斷 A，B 兩數的大小。

過去已經有學者做出相關研究，林保平的研究指出在 30 個六年級學生中(未正式學過正負數)，對於下面兩題計算題

$$(1) \quad 28-72$$

$$(2) \quad 5-8-2+40$$

詢問是否可以計算，每題均有 13%的學生認為不能算，認為能算的學生在(1)中只有 19%的學生算錯，可見小的數減大的數這件事對國小六年級學生而言並非難以接受。學生的經驗中或多或少都接觸過負數，而認為(2)的問題可以作答的學生中有 35%的學生做錯。(林保平，2005)

在負數單元中除了基本計算外，相對量的概念尤為重要，因為相對量在生活中實例頗多，氣溫、溫度計、海平面、東西方向、水位變化就連撲克牌中的撿紅點遊戲規則也適用。雖然引入負數概念，但是上面這些情況有時會因為生活習慣而有所變化。「以東方為正方向，向西走 6 公里。」相對於「走-6 公里」，「水位上升 7 公分。」相對於「水位變化+7 公分。」。「走」和「變化」這兩個詞是不具方向性的，所以比較不會對學生產生誤解。我們知道算式 $A-B=2$ 的含意是 A 比 B 大 2，那 $C-D=-4$ 我們會說成 C 比 D 大-4 嗎？可是明明 D 比較大。因「獲利=收入-支出」如果我們的獲利-2000 元，這樣還算獲利嗎？這容易產生誤解，雖然為了替之後的符號口訣(負負得正，負正得負)做引導，教師會像這樣設計題目：

若 A 說他賺了 2000 元，B 說他賺了-2000 元，C 說他賠了 1000 元，D 說他賠了-1000 元。請按錢的多寡將 ABCD 依序排列出來。

研究結果顯示有 47%的學生回答正確，53%的學生回答錯誤。而且我們發現一個神奇的現象就是回答錯誤的學生均認為 D 所獲得的錢最少，很明顯學生沒有理解賠了-1000 的意義，但對 A 和 B 之間的多寡沒有異議，有 27%的學生只看數字的大小進行比較，並未考慮到正負號。(林保平，2005)

大部分的教科書並不會和學生討論這個問題，這個邏輯思考問題比較抽象，學生可能無法將賺和賠的概念與正負做聯想。賠-1000 元我們可以看出成-(-1000)元也就是賺 1000 元，這是語言中的雙重否定。或者我們從數線上來看會比較容易理解，在台灣的國中課程中「相反數」這個概念被提及時老師是這麼說的「一個數在數線上以原點為中心的另一個對稱點

即為其相反數」或者「一個數加上負號就會變成其相反數」。我們可以透過數線觀察到 6 以原點為對稱點的點是(-6)，那(-6)的相反數呢？

在國小五年級時，學生已經接觸過「對稱點」的概念，在圍棋的棋盤上指出任一個點，學生要有能找出其對稱點的能力。在這過程中學生會發現若 A 為 B 的對稱點，那 B 也為 A 的對稱點，對稱點關係是互相的。同理，相反數也是如此， $-(-6)$ 代表著-6 的相反數也就是 6，所以我們可以得知 $-(-6)=+6$ ，負負得正即由此而來。在數線上帶入對稱的概念，相信學生也能輕易理解何謂相反數。「負負得正，負正得負，正正得正」的口訣和相反數息息相關，但這次的課程我們暫時不會提到相反數，因此先不做討論。

這次我們要探討的是「+」和「-」符號，研究者曾經私底下問過學生，你們聽過或看過「正號」或「負號」嗎？學生回答：「算式裡經常看到」。接著研究者請學生寫出包含「正號」或「負號」的算式，學生寫出了

$$\text{A 學生：} 3-2=1$$

$$\text{B 學生：} -1-2=-3$$

從這兩個算式我們可以判斷出 A 學生無法正確「負號」和「減號」的區別，或許 A 學生根本沒有意識到這是兩種不同的符號，畢竟從外觀上來看兩者都是用「-」來表示。而我們無法判斷 B 學生究竟是否明白何謂「負號」，因為他可能把「負一減二」的減也當作負號。這是因為小學生目前只接觸到運算符號還未知曉性質符號。

「+」和「-」是運算符號也是性質符號。在 *Algorismus proportionum* 一書中 Nicole d'Oresme(1323-1382)使用「+」來表示拉丁中的 and。最早發現使用「+」和「-」是在西元 1417 年的某些手寫稿上，但並不是用來表示加減，而是表示貿易中的過剩和不足。Smith(1925)認為已知最

早將「+」和「-」用於運算的是德國數學家 Henricus Grammateus 在 1526 年用於 Ayn new Kunstlich Buech(新技術著作)一書中，該書也是德國最早的書面記帳本。「+」和「-」在書中用來表達「剩餘」和「不足」(正和負)時就是性質符號，表示數的性質。

在台灣、日本和韓國，一個算式中，表示性質的符號為了與運算符號做出區分，我們會用小括號將數字與性質符號括在一起，一看就一目了然。但研究者觀察到在歐美的教材和課程綱要有許多都不使用括號，但他們有屬於自己的一套區分方法。但在教職現場教師應一步一步來，使用逐漸省略的方式，幫助學生了解運算及運算規則。

在了解符號及其含義後我們要討論「數」的大小，在學生剛接觸「數」這個概念時，我們是以實體物品的數算，記錄數量後再透過「部分與整體關係」「次序關係」，討論量的多少，之後再引入自然數的大小(田耐青，2002)。相比於分數和小數是將量進行分割，負數並不是單純對量進行描述，而是對應到正數的相反意義。因此其大小無法單純用純量的數算或分割來比較大小，通常使用具有數線或刻度的物品如：溫度計，做教學。透過溫度計上的刻度討論溫度的冷熱高低，找出任一個數對應大小，之後再對照數線討論正負數的大小。在教學時研究者對負數大小的說法是「負數，負號後面的數字越大，整個數越小。」，這個說法並不嚴謹，正確來說是「負數的絕對值越大，其值越小」，但是這又涉及到「絕對值」的概念。

絕對值是數線上一點距離原點(0)的距離，假設 A 點位於(3)的位置，那 A 點距離原點 3 個單位長，那麼 3 的絕對值就是 3，記作 $|3|=3$ 。有一點 B 位於(-5)的位置，距離原點 5 個單位長，(-5)的絕對值就是 5，記作 $|-5|=5$ 。既然絕對值是距離，那麼絕對值就不可以是負數，因為距離不存在小於 0 的情況。我們看到數線，原點位於數線的中心，若找出要距離原

點 2 個單位長的點，我們可以往原點的兩邊去延伸，若往正方向延伸我們可以找到(+2)，若往反方向延伸我們會找到(-2)這個點。這兩個點雖然不同，但它們距離原點的距離都是 2。

Ellis 和 Bryson (2011) 提到當絕對值問題變得更加複雜時，學生通常無法理解其概念和意義。學習絕對值方面多半是要處理複雜的等式與不等式問題。Wade(2012)提到與其讓學生只利用代數來解決等式和不等式問題，以距離概念理解會更有意義。在 108 課綱中(N-7-5)寫到學生學習絕對值能夠理解表達兩點之間的距離，學習表現 n-V-4 理解絕對值應用在各種數與量之上的意義，能操作其運算，欣賞其一致性，並能用以描述現象及溝通，其中要求學生進行絕對值的運算。而美國的共同核心州數學標準(CCSSM，2010)，學生從 6 年級開始接觸絕對值，學生需要理解有理數與 0 的距離，並能解釋絕對值可以用於解釋正數或負數的數量。兩國的課程差異在於是否進行簡單運算，研究者遵從本國的課程安排決定將絕對值的部分繼續保留在國中的課程內，畢竟要在一個單元內要學生接受絕對值這種高層次的概念(需先具備負數的概念)並做出計算有點強人所難。

美國數學家克萊茵 (M.Kline，1908-1992) 在《Mathematical Thought From Ancient to Modern Times》一書中說過：「負數是具體數學走向形式數學的第一步」。「使用負數」和「接受負數」是兩個不同的層次，學生或許能將生活中具有相反意義的量用正負數來表示，但也僅僅如此而已，要讓學生接受負數不是一蹴可及，需讓學生從感性經驗中發現再到理性的認識。這需要一段時間給學生去消化知識，把抽象問題一一解決。

當然上述的理論是我們後人跨越了數百年，站在一個古人從未到達的高度居高臨下的進行評論罷了。證據是因為在英國負數的合理化是依賴

於抽象符號決定的代數結構而非先前提到的數量的科學。有趣的是，先前反對負數的數學家迪摩根在《代數學》一書中對於負數的看法已經不是那麼堅持。造成這樣的原因可能是比例的意義。今天有 2、(-3)、(-6)和 9 四個數字，2 除以(-3)等於(-6)除以 9 這表示比例相同，但是在代數中，「等於」和「除以」有更多額外意義。大於和小於在算術中並不是總是適用的，就像 2 大於(-6)，(-3)小於 9 但兩組數字在比例上卻是相等的。不論甚麼原因，既然負數的存在已經被多數數學家所承認，那麼負數的出現必然對我們所認知的社會與各種學科產生重大的影響，因此了解負數的日程必然也要安排上了。至於確切的時間是甚麼時候就是我們這次所要討論的。

第四節 負數教學的實證研究

對於台灣的國中學生來說負數是沒有在小學課堂中正式接觸過的領域，就算是溫度計也要在國二理化溫度與熱量的單元才會正式提及(十二年國民基本教育自然科學領域課程綱要)。但是當我們拿出溫度計請學生念出上面的溫度時，大部分學生都能正確讀出，這表明學生透過生活的環境或媒體等地方接收過相關資訊，也代表國小學生具備了學習負數的基礎。

Gagatsis 和 Alexandrou (2022) ，以數學模型(正負電荷和數線)為主題進行了一項負數教學研究，希望能證明使用模型進行負數的教學對於學生是有向幫助的。研究將數學概念的歷史研究、認知障礙概念、教學契約概念、教學轉化或教學轉置理論，以及教學情境理論應用於負數單元的研究中。並介紹了表徵和模型在數學教學中的作用，並強調多表徵在教學中的重要性。

在正式進入教學前，Gagatsis(2003)發現學生會將數線當成表徵而非模型。許多教科書會使用數線來教導整數的加減，所以一些教育學者經常將繪製數線的能力與簡單整數加減掛勾。但也有一些人抱持著相反的看法如：Hart (1981) 認為應該放棄數線模型，Liebeck (1984) 則聲稱，數線對於幫助孩子學習整數加減法並不是一個有效的視覺輔助工具。另一方面，Ernest (1985) 指出，學生對整數加法的理解與他們對數線表示這一運算的理解之間可能存在不匹配的情況。因此 Gagatsis (2003) 以四份不同的問卷對學生進行測試，發現兩份簡單計算的試卷，能以數線做輔助計算的學生結果較不能使用數線的學生優秀。但另兩份要求學生在數線上用弧線表示整數運算，並找出這些運算的數字關係以及結果及要求學生使用數線做計算並寫出計算過程，但這兩份的結果並無太大區別。

使用變量之間的層次關係（Gras，1979；Gras & Couturier，2013）進行題目之間的分析，只有要求學生在數線上詳細標出計算過程的兩份試卷存在含義關係。這意味著，成功解答了兩份題目的學生，未必能在簡單問卷中的某些題目中給出正確答案。事實上，這是一種分隔化現象，而其原因在於兩份複雜的問卷中學生必須在數線上進行操作。也就是說，初學者將數線作為一種簡單的表示方式，而不是作為幾何模型來使用。這種分隔化現象在其他研究中也有觀察到（Gatatsis，2003）。在釐清模型在負數教學中扮演的角色後，就進到教學的環節。

在釐清模型在負數教學中扮演的角色後，就進到教學的環節。

一.電荷模型與數線模型的負數教學效果比較

Gagatsis 和 Alexandrou 使用標記有「+」和「-」記號的球狀電荷模型作為正負的基本單位。將一正一負兩電荷湊成一組，告訴學生兩者會互相抵銷。並將抽象的數學問題轉換成模型的操作。

在加法運算中，我們首先畫出表示兩個加數的電荷，根據它們是正電荷還是負電荷來選擇適當的符號。然後，我們尋找所有可以配對的相反電荷，並將它們劃去（因為它們的值為零）。最後，我們計算剩下的電荷，這些電荷必須是相同類型的。例如，為了計算 $4 + 3$ ，我們畫出四個正電荷，然後再畫出三個正電荷。總共有七個正電荷，因此，總和是七。對於兩個負數的加法，我們也採取類似的操作。

例如，為了計算 $(-4) + (+3)$ ，我們首先畫出四個負電荷，然後再畫出三個正電荷。我們注意到，有三對相反的電荷可以配對並劃去（因為它們相加為零）。因此，最後剩下一個負電荷。

Operation	Symbolic representation	Answer
$(-4) + (+3)$	$\ominus \ominus \ominus \ominus$ $\oplus \oplus \oplus$	$(-4) + (+3) = -1$

圖 2-4-1 數學應用-正負電荷互相抵銷概念

Athanasios Gagatsis 和 Maria Alexandrou (2022) 也有使用電荷模型對負數乘法除法的部分進行教學，但是我們這次只討論負數的加減因此不多贅述。

之後 Athanasios Gagatsis 和 Maria Alexandrou 也使用了數線模型進行教學， $(+2)+3$ 其操作方式如下，先從 0 往右數兩單位找到(+2)後在往右三個單位，最後落在 5。

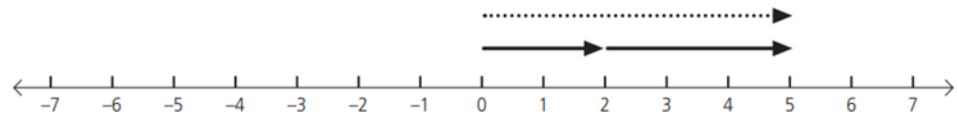


圖 2-4-2 負數算式在數線上的位移

為比較兩種模型對負數教學的有效性，將 18 名 12 至 13 歲的學生分為同質的 A、B 兩組。A 組接受電荷模型的負數教學，B 組接受數線模型的負數教學，在教學結束後請學生完成學習單，最後再從學習單結果分析模型。研究結果顯示無論哪種模型學生在負數減法的部分正確率較加法低，但是電荷模型在負數減去負(正)數的表現較數線模型優秀，但是數線模型也有勝出的地方，在負數加正數的問題其正確率較電荷模型高。

Athanasios Gagatsis 和 Maria Alexandrou 認為常見的錯誤不僅出現在涉及負數的計算中，也出現在理解和解釋負數及其運算的過程中，通過適當的教學方法，特別是基於數線幾何模型的教學方法，可以克服這些持久的障礙和誤解，適當的模型也能幫助學生更快釐清抽象的加減概念。

二.識讀文本對教學的影響-負數單元

陳玉芬(2024)以識讀文本作為主要教材進行教學，觀察識讀文本對國中一年級學生的負數素養產生的影響，並從「知」、「行」、「識」三個面向去做檢測。

「知」以聽寫為例，學生須按照老師的口述將聽到的算式記錄下來，其中學生要能知曉負號需要加上括號用來和減號做出區別。「行」是以三個整數的連續加減做為測驗依據，透過實驗結果發現文本設計能修正學生常犯的計算錯誤與偵測學生是否有學習障礙。「識」是請學生提出「減」與「負」之間的差異，以此判斷在學習後學生的觀點及知識是否有所修正及改變。

教學的過程主要以概念譬喻及視覺操作的方式進行負數單元的多元學習，研究結果也表明用識讀文本學習的學生對於負數的具體認識較無使用識讀文本的學生有正向的進步，具有釐清負數抽象概念的表現。

可見只要找到正確的學習方式及教材能大幅增加學生的學習效率，改善學生對於負數的理解。實驗結果也佐證了，識讀文本對於 DFMS 學習障礙的學生得到改善。

該實驗中有一部分研究是檢驗學生教學前後對於「負數想法」與「負數認識」的文字敘述，依據回饋資訊及文字描述分為「識能理解」、「一般理解」、「錯誤理解」、「字詞誤解」以及「無法表達」5種等級(陳玉芬，2023)。因為其中實驗組與對照組前測表現落差太大因此我們將兩組一同考慮來分析國中生未接受教學前對於負數的認識，約有 17.3%的學生處於無法表達，20.3%的學生屬於字詞誤解，8.4%的學生屬於錯誤理解，47.5%的學生屬於一般理解，6.5%的學生為識能理解。在上課過程中研究者也向學生提出了「何謂負數」這個疑問，雖沒有實際統計數量，但多數學生能回答出「比 0 小的數」、「計算溫度」、「不夠減」，完全沒有回答的學生屈指可數。可見六年級學生普遍處於「一般理解」、「錯誤理解」、「字詞誤解」三個階段，這和國一學生沒有太大的區別，既然國中生能學會負數的單元，那麼六年級學生有極大的機率能學會，這些資料也給研究一個好的開始。

三.五開教學模式-負數單元

萬金娟(2023)在「負數的初步認識-教學片段與思考」中對國小六年級學生進行負數單元的教學並將負數單元分成幾個教學段落記錄學生的學習過程，分析學生的回答與思考歷程。教學段落分成五項：「尋找原型，把握起點」、「建立表徵，明晰意義」、「對比分析，強化理解」、「數線排序，深化理解」和「鞏固應用，內化提升」。

「尋找原型，把握起點」是指從生活周遭的相關事物作為切入點，幫助引出課程後續。這裡萬金娟(2023)使用的是中國特有的微信支付，觀察帳單上的一筆筆收支，尋找學生沒有見過的數字。

「建立表徵，明晰意義」，將生活中的物品用抽象的數字符號去表示，從溫度計到地圖的海拔高度甚至有些電梯的按鈕地下室樓層不會用B1、B2表示而是使用-1、-2。請學生講出一個會使用負數的情況，並解釋該情況下該負數所代表的含意，完成後發表自己選擇的場景，並與其他同學交流。

圖 2-4-3 負數的意涵學習單

根據 von Glassersfeldt (1979) 提出的結構主義，知識並非一次次單獨的經驗，而是從多次經驗中抽取出的共通性及不變性。我們無法在短時間內增加學生的生活經歷，只能透過交換彼此的意見增加相關的經驗。萬金娟(2023)發現學生對於負數形式上的認知有著比較豐富的生活經驗，因此利用微信紅包的情境幫助學生梳理對負數的認知，引導學生找負數、讀負數的過程。萬金娟(2023)認為認識負數不是一個簡單機械的概念重複，需要學生在自主探索的基礎上通過思辨明白其本質內涵。給學生充足的思考空間、表達自己的想法，幫助學生構建負數的意義。先讓學生基於原有的經驗，在交流中強化認識、提煉要點。初步讓學生了解在同情境中正負數代表的意義是相反的，為之後深化理解成「正負數可以表示意義相反的量」埋下伏筆。課堂中萬金娟利用水銀溫度計讓學生一格一格的數，為比較正數、0、負數的大小打下基礎的同時，順便培養學生的數感。

「對比分析，強化管理」，萬金娟認為負數是學生對數系的一次擴充，讓學生理解正負數可以用來表示意義相反的量以及 0 既不是正數也不是負數是這堂課的教學重點。教師設計一項活動，利用生活中不同類型的場景進行多元表徵，讓學生的思維可視化。隨後學生在關於「0」的交流爭辯中深化理解「0」的意義與作用，凸顯「0」對於正負數的獨特價值。

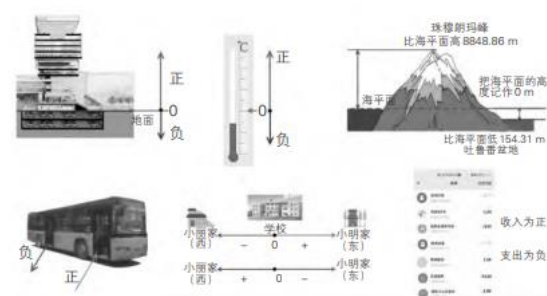


圖 2-4-4 負數在生活中的對比

「數線排序，深化理解」，在尚未接觸負數之前，學生所學習的數線是以 0 為起點，學習負數後 0 就變成了正數與負數的分界點。雖然萬金娟沒有在這次課程中繼續使用作為培養數感及動手操作的道具-水銀溫度計，而是使用抽象的支出概念， (-3) 就是支出 3 元，若按大小將 (-3) ， (-1) ， (-2) ， $(+1)$ ， (2.1) 五個數字排列，理應是 (-3) 最小。但是有學生卻寫出 $(-1) < (-2) < (-3) < (+1) < (2.1)$ ，這是因為學生用之前比較正數大小的方式去判斷，教師要強調「-」是欠的意思，因此欠得越多，數會越小。萬金娟設計了一個活動，請每一位學生抽一張印有正數或負數的卡片，並在地板上繪製一條數線標出正方向，請學生按照自己的數字在數線上排隊。此活動引導學生將數在數線上的位置表現出來，充分利用幾何直觀幫助學生加深理解負數的意義。

「鞏固應用，內化提升」，設計兩道題目給學生練習，題目體現出了素養，給學生提供素材，讓學生運用負數的知識解決真實的問題，進一

步幫助學生完善已有的認知。對學習中沒有關注到的問題進行補充說明，注重學生的思維體現，尋找學生思維的生長點。

這項研究是重慶市教育科學「十三五」規劃重點課題「五開教學模式在小學數學課堂中的實踐研究」成果之一。屬於綜合與實踐領域中的數學遊戲內容，只在激發學生的好奇心與探索欲，拓展學生的數學視野，培養勇於探究的精神。

1. 填一填。

(1) 华山比海平面高 2000 m, 记作 () m; 死海比海平面低 392 m, 记作 () m。

(2) 南极是地球上最冷的大陆, 最低温度可达到零下 94℃, 记作 ()℃; 非洲是地球上最热的大陆, 最高温度可达到 55℃, 记作 ()℃。

(3) 向西走 0.3 km, 记作 () km; 向 () 走 0.8 km, 记作 () km。

2. 议一议。

近段时间, 我区中小学正在开展体质健康比赛, 其中的跳绳项目, 老师收到了一份这样的成绩单: 李研同学的成绩是 -2 个。你认为这个成绩可能出现吗?

圖 2-4-5 用正負號表示相對量

從「負數的初步認識-教學片段與思考」(萬金娟, 2023)中可以看出五開教學模式對於負數學習的幫助，完整的一套流程，從生活經驗引導學生認識負數，慢慢建立表徵，再和之前學習的正數互相比較，再到數線的擴充，最後是負數的應用環環相扣，讓學生能經歷思考、操作、比較並發現的思考過程。該研究給研究者的課程設計提供了部分靈感，促成了本研究的課程設計。

第三章 研究方法與設計

本研究聚焦於負數單元在小學六年級教學中的可行性及有效教學策略，旨在通過精心設計的教學流程與實證研究，為小學數學教育提供有益的參考。為此，設計了一套完整的研究流程。首先，研究者自行編纂教材，內容選定與編排參考了國內外多本教科書及文獻資料，確保有效性和適用性。經過與小學教師的深入討論，教材經過多次修訂後最終確定。隨後，研究者親自進入課堂，以複合式教學法進行教學，結合觀察法、提問法等多種教學手段，激發學生的學習興趣。為檢視教學效果，研究者還設計了前測和後測，通過比較學生在學習負數單元前後的數據，評估教學的有效性。整個研究流程嚴謹、科學，期望能為小學數學教育帶來新的參考資料。

第一節 研究流程

1. 擬定研究題目

與指導教授討論研究題目

2. 決定實驗場所與實驗對象

因為曾經在大龍國小實習的原因與該校主任及六年級教師較為熟悉且交通方便的原因，選擇了大龍國小成為施測場地。被選中四個班級皆為與其班導較為熟悉，因此願意安排時間讓研究者進行進班教學和協助同意書及前後測的實施。

3. 設計知情同意書，前後測內容

研究者設計知情同意書告知家長實驗的目的與內容，以及如何保障學生的隱私防止資料。與教授討論實驗的範圍與測驗的題目類型，設計前後測。之後與教授修改部分內容及對文字潤色。

4. 設計授課教案與教學簡報(PPT)

- 研究者自行編排的課程參考了外國教科書《Houghton Mifflin

Math》、《Oxford Mathematics Primary Years Programme 6》、《新しい算數 6 下》等書，與台灣國中課程互相比較。再與指導教授和國小學年主任討論過從中選出重複率高且合適的內容作為教材，主要內容有「負數在數線上的位置」、「負數的大小」、「符號表示相對的量」、「負數的讀法」和「負數的加減」。並選擇與課本類似的範例讓學生練習。

- 本研究為了設計負數概念的教學課程與負數概念的成效測驗，將先統整出「負數概念的教學目標」。剛開始研究者先閱讀台灣國中不同版本的教材內容、教師手冊及文獻資料等，參考並分析，最後統整出「負數概念的教學目標」，如表 3-1-1，依據下表設計課程，並期待學生能從課程中完成下目標。

表 3-1-1 負數概念的教學目標

概念類別	教學目標
相對的事或物與正負號的連結。	能透過情境中意義相對的量認識正負數，並能用正負數表達情境中相對的量。
數也可能小於 0，之前學過的數線並不完整還可以往左邊延伸。	能了解小的數也能減大的數，其值為負數。
數線的繪製與特性。	能透過數線的形成了解數線的三要素原點、單位長和方向。
數之間的大小。	能透過數線理解正負數的大小並知道比較兩負數的大小。
符號的意義	能理解一個正負數前面加上正負號的意義。

設計教案時選中部分九年一貫的能力指標和 108 課綱中的學習表現，讓課程與之互相呼應，舉例如下。

「正負數加減運算」能力指標

正負數的加法

1. 能透過問題情境，理解正負數加法的意義。
2. 能透過性質相反的規律，將情境問題化為含正

負數的加法算式。(因課程時間安排，無納入評量，只在課堂上口頭詢問。)

3. 能透過正負數的相對性質，理解歸納加法的運算規則。

正負數的減法

1. 能透過性質相反的特性，將情境問題化為含正負數的減法算式。
2. 能透過正負數的相對性質，理解歸納減法的運算規則。
3. 能理解正負數中大的數減去小的數為正數，小的數減去大的數為負數。

- 確定授課範圍後，研究者並沒有進行小規模試教實驗，只有私底下詢問部分學生是否聽過「負數」或知道「負數」是甚麼。沒有先行試教的原因如下：每班的授課內容相同，若先行實驗可能會導致其他學生得知上課內容影響實驗結果且該校正值校慶期間校務繁忙也不好去占用老師太多時間。
- PPT 的部分著重於數線的展示與操作，由於課程時間只有兩堂課因此無法給予學生自己操作數線的時間，只能由教師示範讓學生理解。因此有一個好的圖示能更好讓學生理解正負數加減時數線上的移動軌跡，對於負數之間的大小也能一目了然。學習單則是單純設計題目給學生練習，並抽點學生上台示範如何解題與解題的思路。

5. 蒐集知情同意書與進行前測

於 112 年 10 月底與各班老師溝通，請老師協助知情同意書的發放與收繳，並在進班教學兩個禮拜前完成前測。

6. 進班授課

於 11 月 20 號開始的三個禮拜進行進班授課，由於該校於該時間段舉辦校慶因此後兩個禮拜皆只有進行一個班級的實驗教學。每個班級的

兩堂課之間至少間隔了一天，給學生一些時間消化新的知識。每一堂課皆會發下課堂學習單讓學生進行練習，除了幫助學生加深印象，實際操作也能確認學生是否真正學會而非只有精神層面上的理解，更能幫助研究者了解每位學生的學習狀況。

7. 實施後測

在完成進班教學後間隔兩個禮拜的時間，實施後測。後測的成績並不會讓學生知曉，避免學生之間互相比較。

8. 數據的產出

將所有數據輸入 SPSS 並使用成對 t 檢定進行分析。後測的信度是由學生的平時表現與後測成績互相比較。

9. 質性訪談

在完成教學的一年後，該屆學生也升上國中並在國中學習負數單元，在第一次段考後邀請 12 位曾參與教學的學生進行訪談，了解實驗教學對學生的幫助。

10. 結論分析

透過 t 檢定的 p 值來判斷學生前後測成績是否有明顯差距，若有明顯差距且後測成績高於前測則得出「經教學後學生成績有大幅成長，即學生能學會相關知識」的結論。

為了讓讀者更加了解教案與課程的設計過程，研究者以流程圖的方式展現從資料蒐集到實施測驗的每個步驟，請見下圖 3-1-1。

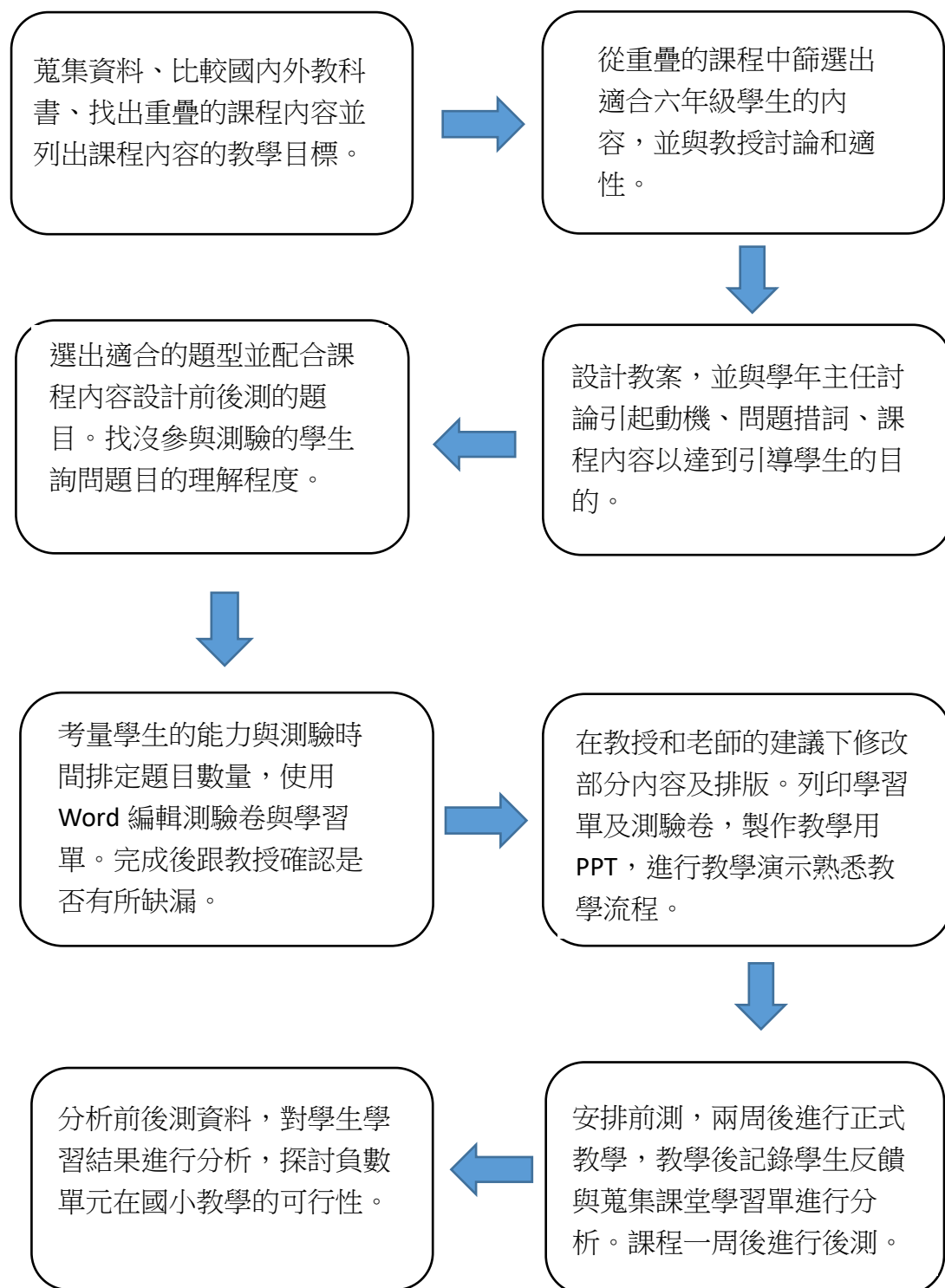


圖 3-1-1 實驗課程準備流程

第二節 研究對象

本研究正式施測選定台北市大同區某國立小學六年級四個班級的學生為研究對象，以班級為單位進行教學。該校為研究者半年實習的學校，和六年級的導師較為熟悉，考量到交通、教師學生聯絡及家長信任關係(曾在該校擔任代課教師，和部分參與者熟悉，對於課程中秩序的維持及指令的下達有所幫助)，因此選定該校學生作為研究對象。況且和研究對象在兩年前有過接觸，對於研究對象的數學程度有所了解。本研究四個班級之間的學生因採隨機分班所以無顯著落差，各班的教學目標、課程內容均相同，並以前後測準實驗設計與成對樣本 t 檢定進行研究，因此可以排除影響實驗研究內在效度之選樣不等的因素。在對測驗進行信度檢測時，研究者會將學生平時課堂中的表現與後測的結果進行比對，確保分數一致。

本研究因研究內容為簡單測驗因此沒有申請倫理審查，但研究者也會保護每位參與者的隱私及測驗數據，研究期間僅以紙本形式留存保留姓名之試卷，防止外流並於研究一年後銷毀測驗試卷。

第三節 研究工具

本研究的研究工具是研究者設計製作的課程、課程前測 A 卷及課程後測 B 卷，為探測經過教學後國小六年級學生對負數單元的學習成效。我們設計負數課程內容、課程學習單進行階段式檢驗和前後測評量做最後的總結，研究者依據蒐集的資料和訂定的教學目標來查核教學成效，內容如下。

1. 自編 PPT

自編 PPT 主要內容涵蓋小學六年級負數單元的教學設計，包括教學目標、內容框架、情境導入、概念講解、互動環節、練習設計和教學總結。通過冰箱溫度等生活化實例引導學生認識正負數的概念，結合數線圖示詳細講解負數的定義、位置和加減運算規則。在互動環節中，設計

開放性問題（如「負號和減號的區別」）激發學生思考，並通過選擇題、數線標記題和計算題幫助學生鞏固負數知識。PPT 還包含前測與後測的設計說明，用於評估學生的學習效果，最後通過總結與反思鼓勵學生將負數知識與實際生活聯繫，提升學習興趣和應用能力。

2. 前後測測驗卷

我們將測驗卷依評量目標類型分為五個大題，接下來我們會分別討論 A 測驗和 B 測驗整體及每個大題的成績經成對樣本 t 檢定後得出的資料。

我們接下來會介紹前後測的評分標準：

- 第一大題，數線繪製及數的位置，分為兩小題。

第 1 小題：請學生畫出完整的數線，並標示出題目要求的九個整數。

數線的三個要素：箭頭，原點，單位長(1 個 1 分)，九個整數(1 個 1 分)

第 2 小題：請學生在數線上標出題目要求的一個小數和一個分數(1 個 1 分)

- 第二大題，請學生比較整數的大小，共 5 題(1 題 1 分)。
- 第三大題，請學生計算簡單的正負數加減，共 5 題(1 題 1 分)。
- 第四大題，請學生依題幹寫出相對意義的量(1 題 1 分)。
- 第五大題，選擇題，請學生選出正確的選項(1 題 1 分)。

總分滿分為 26 分。

在信度方面，研究者將學生平時的數學表現按優劣排序後與後測成績拿來做比較，用來確認學習表現優秀的學生在後測中的表現也同樣優秀。

效度部分則是與指導教授，某國中老師和協助施測的國小老師討論後認為測驗內容能反映出負數單元的相關能力。

除此之外透過附錄一和附錄二的學習單內容，我們可以看到在學習單(一)中的練習一，我們先檢視學生是否能將整數分類成正數、負數和 0，關於整

數的分類我們在前後測中將其放入選擇題的選項中。而其他學習單中的題型如：「整數在數線上的位置」、「負數之間的大小」、「相對量」和「整數的加減」都能在前後測中找到對應的題目。接下來研究者會分析學生學習單題目的正確率。學習表現優秀的學生在後測的表現普遍優秀但表現有些許降低。研究者認為有大概率是因為剛學習到的知識還存在腦海中，而後測距離課程一個禮拜的時間，在沒有將知識同化的情況下，無法正確回答問題。

3. 質性訪談問卷

為了全面而深入地調研課程的實施效果，我們特意加入了這樣一個質性訪談環節。這一訪談旨在通過直接與學生交流，更細緻地探究他們對於負數概念的理解深度和學習過程中的具體體驗。量化研究雖然能夠提供巨集觀的數據統計，但在揭示學生個體學習差異、認知發展以及面對特定數學概念（如負數）時的心理變化等複雜學習現象方面，往往存在局限性。質性訪談則能夠彌補這一不足，它使我們能夠捕捉到學生個人的學習感受、遇到的困惑以及他們在學習負數過程中的具體挑戰。這些資訊對於準確評估課件的教學效果、針對性地優化教學策略以及進一步提升學生的數學學習能力至關重要。通過訪談，我們可以更好地理解學生的學習需求，從而為他們提供更加精準和有效的學習支援。訪談題目請參見附錄三。

訪談的方式為一對一，研究者會先詢問受訪者就讀的學校。並按照訪談表上問題一一詢問。若學生無法想起研究課程的內容，研究者會給予提示並請學生回想，並詢問國中老師的教學方式以及學生的理解程度。互相比較與研究者的教學方法有何區別，找出有效率的學習方式。最後詢問學生是否有因為實驗教學的原因讓國中的學習更加輕鬆。

第四節 教學方法

一、實驗教學

由於各班學習環境不同，會造成學生學習表現上的落差，所以每個班級都是由研究者本人進班教學，課程內容不會因班級而有差異。本人修習過小學教育學程並已取得教師證，有在小學幫忙代課的經驗。

教材為研究者自行編纂後再向大龍國小六年級張雅曠老師討論，經過數次修改才完成修訂。教學法採複合型式非單一教學法，在實驗教學開始時，研究者使用具體實例幫助學生發現並理解負數概念，在授課時獲得一定程度的回應。由此可見本國學生的生活經驗與負數課程有所關聯。而透過這些生活經驗我們幫助學生學習負數，並將所學應用在生活中的其它情境，促進學習遷移。發現學生在自然領域已經接觸過溫度計的情況下，我們設計由溫度出發的課程作為連結學生的舊經驗與新經驗的橋樑。

利用觀察法請學生觀察圖片中冰箱顯示的溫度，學生知道透過不同溫度冰箱可以保存不同的食材，我們引導學生一一回答和冷藏、製冰和冷凍三種不同功能所對應的溫度。通過學生的回答也可以觀察到學生的知識儲備量是否足夠將教師的引導與其生活經驗連結起來。教師會先引導學生正確讀出圖片中前兩個比較常見的數字(4 度 C，0 度 C)，之後詢問學生那最後一個數字(-18 度 C)該怎麼讀，是減十八嗎?還是有其他讀法呢?這時教師不能說出負十八，要用開放式的問題讓學生做出回應，有時候學生會說出令人意想不到的答案。

待學生回答出「負十八度」這個答案後，老師會往更深的層次延伸。研究者將實體的溫度計發下去，請學生觀察現在的溫度是攝氏幾度?又是華氏幾度?請學生從上至下讀出溫度計上的數字，確認學生知道每一個數字的讀法。並詢問學生究竟甚麼時候該讀作負?甚麼時候該讀作減呢?其用意是希望學生能透過老師先前舉出的例子和從生活經驗中在短時間內進行歸類分析，

老師會在這時給予學生回饋，再作出結論並告知學生運算符號和性質符號的定義。

數學教學中，聽、說、讀、寫同樣重要。聽包括聽老師講解和同學間的討論，後者更能引發共鳴。說則是將學到的知識以口語表達，同時闡述思考過程，有助於內化教學內容和訓練口語能力。在數學中，“讀”特指讀出算式，而閱讀不僅限於教材，還應廣泛涉獵課外讀物，如數學課外閱讀系列、數學報紙雜誌等。這些有助於瞭解生活中的數學，感受數學的價值。數學閱讀能力是建模能力的一種，能將數學文字與實際情境相互轉換，對解題和解決實際問題大有裨益。寫是聽讀的延伸，是表達能力的深化，好的課程應兼顧這四個方面，每個能力都需教學者悉心引導。

為了從個別數字的讀法類推至算式，教學者舉出數個算式作為範例如：

$$-2+5=3, -4-1=-5$$

詢問學生該怎麼讀，學生經過前面的引導，會有部分反應較快的學生能正確讀出算式，這時就能從回答看出學生的落差。

解釋性質符號時，研究者先從字面意思解釋專有名詞，並詢問學生性質之涵義。性質，物體具有之特性或本質。研究者舉出-1，-2.1，-2/3，-3.14等數字，請學生討論並找出其共通點。在討論過程中，四個班級的研究對象都回答出兩個答案。第一，層次較低，所有數字前面都帶有負號。雖然不能說回答錯誤但學生是單純透過眼睛觀察得到結論，並非研究者想要的答案。第二種回答是所有數字都是小於零的數，能回答出此答案的學生是已經明確了解負數定義為小於零的數，又或者是能將先前觀察冰箱冷凍溫度的印象與此連結。最後由教師給出結論，只要前面帶有「-」的數字都是小於0的。之後接著反問學生那前面帶「+」的數字呢？四個班級的學生都能舉一反三，回答研究者帶「+」的數字都大於0。

接著詢問學生何謂運算符號，四個班級皆能透過字面意思回答研究者，

運算符號就是用於計算的符號。那我們現在有學過哪些運算符號呢？

學生皆回答加號、減號，研究者接著詢問還有嗎？又有學生回答乘號和除號。由此可知小學六年級接觸到的運算符號其實不多就上述四個，運算符號一定處於兩數字之間。教學者在黑板上寫出算式，特別將數字與運算符號之間的距離拉長且用不同顏色的粉筆標出，讓學生一目了然能直觀的讀出算式。

二、 概念的認識

人類思維擁有兩種認知方式，直覺方式和反射方式。在直覺階段學生主要會使用視覺和聽覺去接收外界的資料，然後將其分類。接受資訊後透過中介的心智活動在傳遞到其他感官做出反應。但是只要對事物夠熟悉就能省略中介心智活動完成反饋，這就是反射方式，例如：開車遇到緊急狀況會不經思考踩下煞車，看到算式 $9 \div 2$ 能直接回答答案，沒有任何的反射過程。研究者詢問班上數學較好的學生 16×125 等於多少，該學生很快的回答 2000。研究者詢問為什麼你能快速的得出答案呢？學生回答：「因為把 16 拆成 2×8 變成 $2 \times (8 \times 125) = 2 \times 1000 = 2000$ 。」。研究者觀察到學生回答問題所用到的資訊並非來自外界，而是來自學生自我概念的內省，學生會把這種反應心智的能力視為理所當然。但我們接收外界的資訊多靠感覺器官，除此之外腦部的思考活動也很重要。

概念並非單獨存在，需要將個別概念要融入與其他概念形成的概念結構中才有用處。每一個高級概念都是由數個階層較低的概念所組成。像是「車子」這個概念就是由「交通工具」、「輪子」、「引擎」等概念組成。而且在兒童的不同發展階段，相同的概念會被歸類到不同的類別中。「車子」可以被歸類在「交通工具」、「社會階級」、「稅收」等概念中。在概念中我們可以將某一概念轉換成其他概念，「冷」的相反概念為「熱」，「富有」的相反概念為「貧窮」，概念可以彼此之間聯繫成概念網路。這些概念相互結合後會產

生非常大的變化，讓人們發現更多概念間的特性及功能。就像古人不知道把輪子、木板、發動機等物體組合起來可以變成在載人在空中飛行的飛機一樣。心理學上把這種心智結構稱為心靈影像，不單只數學領域中的複雜概念結構也包含了感官自然反應的低階概念。

Richard R. Skemp (1987) 提到皮亞傑曾經做過研究，這種遇到問題直接反應的能力在幼童期是不會存在的，需要經過培養讓孩童在某種程度上反映心靈的影像，透過心靈影像和環境或他人溝通。當然建立心靈影像時我們無法確認心靈影像是否有錯誤的地方，只能在後續的日子中靠孩童自身去慢慢修正。孩童認知到自己的錯誤時，會對自己的回答有所反映，發現其中錯誤的部分並加以修正，至於為何能直接修正我們並不清楚，只能留給後面的研究者進行更深入的研究。

研究者希望透過這次教學將學生直覺智慧變為反射智慧，前面有提到學生在觀察多個負數時，會發現學生最快發現那些數的共通點皆為前方有負號，而非那些數字皆小於 0。希望學生能不再著眼於感覺器官接觸的資訊，多一些腦內的心智活動，並且具有省略中介心智活動的能力。在見到負數時能不思考直接在腦中浮現負數的相關資訊。

第五節 資料分析的統計方法

本研究通過測驗量表和訪談問題兩種工具收集數據，測驗量表包括前測（A 卷）和後測（B 卷），內容涵蓋負數單元的核心知識點，如負數概念、數線位置、負數大小比較及加減運算，採用選擇題、填空題和計算題的形式評估學生的學習成效；訪談問題則圍繞學生對負數單元的學習體驗及理解困惑設計，還會與現在國中老師進行教學方法比較，請學生比較哪種方法更容易幫助負數的理解。測驗工具的內容效度通過小學數學教師和研究領域專家討論修訂，並經過小範圍試測驗證其結構效度，結果顯示測驗對核心知識點具有良好的區分能力。測驗卷資料以 SPSS19.0 電腦套裝軟體程式，進行資

料的統計與分析，並以 0.05 為顯著水平，茲將實驗研究假設與所使用之統計方法整理如表 3-5-1。

表 3-5-1 研究假設與變數

研究假設		經過教學後學生對同類型的教學前 A 測驗和教學後 B 測驗成績有顯著差異，這證明國小六年級學生有足夠能力學習負數單元。
資料分析	統計方法	成對樣本 t 檢定(Paired sample t test)
	依變數	學習成效測驗分數
	控制變數	教學時間，測驗時間

成對樣本 t 檢定假設，若要使用成對樣本 t 檢定，以檢定配對資料之間的差異，下列的假設必須成立：

1. 受測驗的學生必須各自獨立，學生之間的測量結果不會互相影響。
2. 各個配對的資料必須從相同學生身上取得，就這研究來說，同一組分數必須來自同一位學生。
3. 配對測量資料的差異分佈也必須為常態分佈。

我們先假設：

1. 每一位學生各自獨立，學生皆為獨自完成兩份測驗，沒有和同學討論。
2. 各個配對的研究資料都取得自相同學生，每位學生皆完成兩份測驗。
3. 成績差異的分布為常態分佈。

以確保樣本具有普遍性及獨立性。

使用適合的統計方式及前提假設才能幫助研究者得到準確的結果，本研究採用成對樣本 t 檢定的主要原因為要比較學生教學前後的成績是否具有顯著差異，作為判斷學生學習成效的依據。

第四章 研究結果與討論

本章主要在探討小學六年級學生在負數單元學習過程中的表現與變化，通過實驗教學設計前測與後測，分析學生在學習負數概念、數線應用、負數大小比較、負數加減運算等方面的表現。通過數據分析與訪談，揭示學生在學習過程中可能遇到的困難與障礙，並進一步探討這些困難背後的原因。根據實驗結果，結合數據分析與實際觀察，對學生在負數學習中的表現進行闡述，同時分析教學干預的效果以及可能的改進方向，以達到解決研究問題的目標。

第一節 研究指標與數據

本研究的主要目的為討論負數單元在國小教學的可行性，因此需要制定標準來判斷學生的學習成果。研究者自行設計前測測驗卷和後測測驗卷並在現場對四個班級進行自編教材的教學來協助研究的進行，兩組測驗卷內容包含繪圖題、填空題、計算題、應用題和選擇題。評量內容包含下列幾項：

1. 數線圖的繪製，能畫出數線構成的三要素，單位長、方向和原點。
2. 能比較兩整數之間的大小。
3. 能簡單的計算正負數的加減。
4. 能用正負數表示相對的量。
5. 能正確唸出包含負數的算式。
6. 能說出正負數的定義

研究者透過比較前後測成績來判斷學生的學習成效，若前後測成績以成對樣本 t 檢定檢測，若 p 值小於 0.05 則兩測驗結果有顯著差異，代表經過教學後學生對負數的認識有顯著成長。若 P 值大於 0.05 則兩測驗結果並無顯著差異，表示學生在經過課程後對負數的認識並沒有加深。本章根據教學前和教學後兩組成績來判斷學生對於課程的吸收程度，以作為判斷負數單元是否適

合在小學六年級進行教學。

第二節 前測數據分析結果

本研究的前測數據反映了小學六年級學生在接觸負數相關概念之前的基礎水準，測試內容涵蓋了負數概念、數線應用、負數大小比較及簡單的負數加減運算四個部分。數據顯示，學生的平均為 19.81 分(滿分 26 分)，標準差為 4.91，成績分佈較為分散，但 76 人中有 54 人落在 20 分至 25 分區間，其餘的學生以 0 至 2 人分布在 3 至 20 分，表明大部分學生在未接觸相關知識的情況下，能透過已有的經驗獲得一定的先備知識，但對於負數概念並沒有完全掌握(滿分者 0 人)。

接下來我們會從整體成績進行分析之後從第一大題至第五大題(含進階題共六大題)逐一報告研究結果，各大題的題目也會在後面呈現。

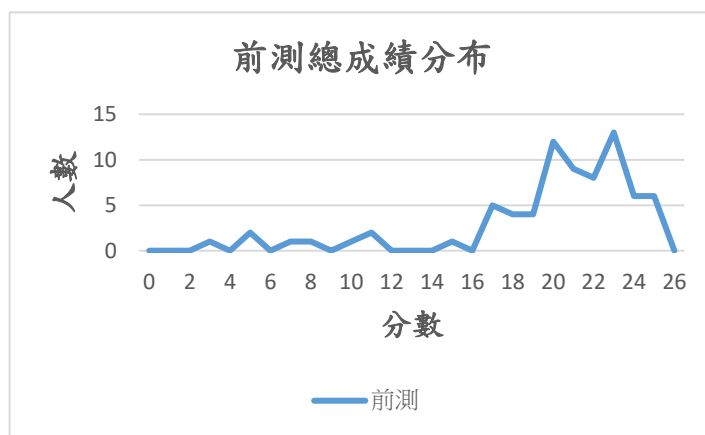


圖 4-2-1 前測總成績分布圖

在第一大題數線繪製及標記部分，學生平均得分為 10.43 分（總分 12 分），51%的學生獲得滿分，但也有 7%的學生未得分。表現出極高分和極低分人數集中的情況，形成一個兩邊較高中間平坦的「臉盆型」。

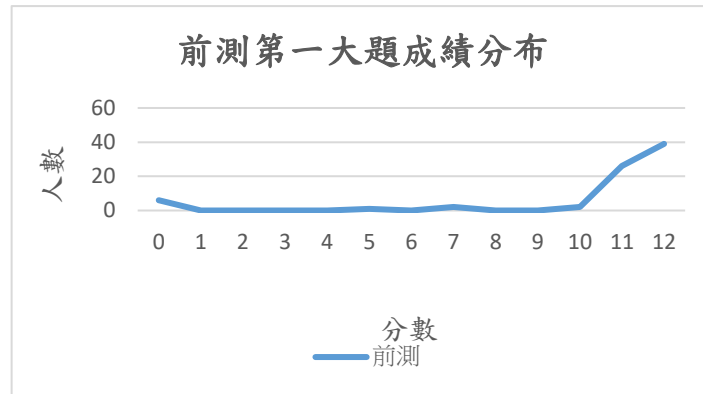


圖 4-2-2 前測第一大題成績分布圖

超過 90% 的學生能夠正確標出正負整數的位置，但在標記負分數和負小數時(進階題總分 2 分)表現較差，特別是負分數的標記錯誤率更高。部分學生無法準確判斷負分數在數線中的位置，常將其標記在錯誤的區間內。而在標記負小數時，正確率相對較高，可能是因為小數的切割單位統一，直觀性更強。整體來看，學生對負整數的理解較為紮實，但對負小數和負分數的理解存在困難，需要更長的時間去熟悉。

在負數大小比較部分（第二大題），學生平均得分為 4.31 分（總分 5 分），表現相對較好。第一、二小題（正數與負數的大小比較）正確率分別為 99% 和 97%，表明學生對正負數的基本大小關係有較清晰的認識。第三小題（兩負整數的大小比較）正確率為 88%，第四小題（兩負分數的大小比較）為 83%，而第五小題（綜合負分數和負小數的比較）則下降至 66%。部分學生在比較負分數大小時容易受到直覺影響，無法準確掌握負數的大小規則，特別是“負數越小絕對值越大”的規律。此外，學生對負小數的大小判斷相對更準確，可能是因為小數的分割邏輯較為直觀，而分數的理解需要更高層次的抽象思維。

在負數加減法計算部分（第三大題），學生的平均得分為 3.55 分（總分 5 分），整體表現低於前兩部分。第 1 小題「2-3」的正確率較高（87%），但學生在處理負數加減法時，邏輯推演能力不足，部分答案明顯來源於直覺或

錯誤的邏輯推理。例如，有學生將題目錯誤地改寫為「3-2」或「3+2」，並直接給出答案。第三小題（負數減正數）和第五小題（負數減正數）的正確率分別為 55%和 53%，遠低於其他小題，顯示出學生對負數減法的理解較為薄弱。他們在處理負數減法時，常常混淆負號的性質與運算符號的意義，導致解答出現偏差。

表 4-2-1 前測二、三大題正確率

	第 1 小題	第 2 小題	第 3 小題	第 4 小題	第 5 小題
第二大題	99%(75/76)	97%(74/76)	88%(67/76)	83%(63/76)	66%(50/76)
第三大題	87%(66/76)	86%(65/76)	55%(42/76)	82%(62/76)	53%(40/76)

表 4-2-2 前測四、五大題正確率

	第 4 大題	第 5 大題
正確率	71%(54/76)	26%(20/76)

表 4-2-3 前測各大題詳細資料

	平均值	樣本數量	標準差	標準誤平均值
前測第一大題	10.43	76	3.29	0.38
前測第二大題	4.32	76	1.09	0.12
前測第三大題	3.55	76	1.49	0.17
前測第四大題	0.71	76	0.46	0.52
前測第五大題	0.26	76	0.44	0.51

通過前測結果可以發現，學生對負數抽象概念的基礎理解較為薄弱，比如負數的定義，含負數算式的讀法。但部分學生依靠生活經驗和邏輯推理在一定程度上彌補了知識上的不足。在具體表現上，學生對正負整數的認識較為紮實(數線及加減法方面)，但在負分數和負小數的概念上表現出明顯困惑。在負數大小比較方面，大多數學生能夠正確判斷正負數的大小關係，但在比較負分數和負小數時，正確率有所下降。在負數加減法計算中，學生的

整體表現明顯受限於邏輯推演能力和負號運算規則的掌握不足。總體來看，前測數據充分反映了學生對負數知識的陌生和掌握的不系統性。

前測結果表明，在正式學習負數之前，大部分學生的表現受到已有知識儲備和邏輯推理能力的限制，對負數概念的理解具有較大的發展空間。因此，後續實驗教學需針對學生的具體困難設計教學內容，強化負數相關概念的理解與應用，幫助學生構建清晰的負數知識框架，提高其在數線應用、大小比較及加減運算方面的表現能力。

第三節 數據分析結果

一、班級數據分析

現在學校採隨機分班，因此我們可以將一個班級視為年級的縮影。而本次研究中唯有 6 年 5 班全員參加，因此我們將 6 年 5 班拿出來討論。下面我們看到 6 年 5 班的學生在學習單上的表現，為保障學生隱私編號和座號並無關聯，為隨機分配。我們將兩次學習單成績加總後，按照總分將學生進行分級，而非單次學習單，因為兩堂課才是一次完整的課程。

表 4-3-1 六年五班課堂學習單表現

編號	學習單成績/等第	編號	學習單成績/等第	編號	學習單成績/等第
1	11/13 低	10	12/16 高	19	9/17 中下
2	10/16 中下	11	12/17 高	20	12/14 中下
3	10/17 中上	12	11/16 中上	21	12/17 高
4	12/17 高	13	12/15 中下	22	11/17 中上
5	12/17 高	14	12/16 中上	23	12/17 高
6	12/16 中上	15	12/12 低	24	9/12 低
7	11/16 中上	16	12/16 中上	25	10/17 中上
8	10/17 中上	17	10/15 低	26	12/16 高
9	10/12 低	18	12/16 中上		

表 4-3-2 六年五班後測成績表現

編號	後測成績/等第	編號	後測成績/等第	編號	後測成績/等第
1	20 低	10	24 高	19	23 中上
2	24 高	11	25 高	20	16 低
3	23 中上	12	25 高	21	21 中下
4	24 高	13	23 中上	22	21 中下
5	23 中上	14	23 中上	23	21 中下
6	23 中上	15	18 低	24	18 低
7	23 中上	16	22 中下	25	22 中下
8	24 高	17	20 中下	26	24 高
9	22 中下	18	24 高		

從表格中的等第，我們可以發現學生的表現並非只有提升，也會下降。但是提升和下降的程度不會太大，最多只會差兩個等級。因學生等第是按學生總成績評斷，因此若兩學生成績相近但分數門檻介於兩者之間則兩者等第會有不同，所以直接從等第判斷只能知道學生之間有落差卻無法得知落差大小，需考慮學生成績的集中程度。從上面的分數來看，學生的成績差異並不大，多數學生的成績集中在某一分段上，只有少數成績非常極端。我們觀察表 4-3-1 中等第為低的 5 位學生，他們在課堂中的表現與其他同學相比較為不佳，或許是因為沒有找到正確的學習方法導致短時間內無法消化課堂中的知識，在沒有外力的介入下，他們兩周後的後測表現在班上也是差強人意，雖然其中兩位學生的成績有些許提升，其餘的則維持在低等第。我們可以認為他們雖然資質不是很好，但是透過後天的教育，這些學生能學會負數的相關知識，只是需要耗費更多的時間，且成效不高。也反映出這份測驗能精準的篩選出班級中不擅學習的學生，在課堂中表現較差的學生在後測中表現也不盡人意。

接著我們看到等級中下的學生(4 人)，這個等級的學生比低等第的學生表現略好，程度屬於班級中間偏下，在觀察這些學生的課堂學習單與後測，可以發現這個層級的學生對於基本的觀念問題及運算會按照研究者在課堂中

的指示按部就班的進行，雖然不能全部還原研究者的步驟但思路至少類似，或許過程會出現一些錯誤導致正確率較班上平均水準略低，但只要給這些學生足夠的時間去釐清其中的關鍵，我想作答的正確率一定會有所提升。

在課堂中表現為中下的學生，除了一位學生外，他們在兩周後的後測中其餘的皆從中下提升至中上。撇除那位學生，另外討論其學習表現下降的原因，其他學生在後測中的表現我們可以視為接受完整的教學後，需要一段時間去消化課堂中的知識，吸收課程後的知識後他們能確實在腦海中構建負數概念的脈絡，並熟練地運用這些知識。

中上等第，班上的學生多集中於此(10 人)，他們基本上將課堂中的知識全部吸收，這些學生是能在短時間內在研究者的協助下釐清負數相關的各種知識，但是在比較後測及課堂中的表現後，我們會發現比起課堂中的表現，他們在一段時間後的表現略微下降，有部分學生的等第下降至中下。這代表學生沒有將知識進行內化而是靠著短期記憶將知識強行記在腦中，時間一長就會忘記許多細節。畢竟一個單元的課程不可能只靠兩堂課就讓學生完全記住，也需要老師事後反覆複習才能讓學生將這些知識內化成屬於自己的東西。我們這個研究的目的主要是研究學生是否能學會這些知識，如何讓學生將學到的知識保存在腦中是另外要去克服的問題。

在課堂中表現優秀被歸類在高等第的學生(7 人)，他們在後測的表現中有超過半數維持高等第，剩餘的學生有兩人落在中下，兩人落在中上。當然也有兩位學生從中上等第變成高等第。綜合上述的結果我們發現大部分的學生在課堂中的表現和在後測中的表現接近，但有少部分的學生表現有小幅度的變動，和相同等第的學生相比會有 3 題以內的落差。雖然三題的落差就會讓學生之間的等第有所變動，但這並非單純的資質或實力影響，細心程度、耐心、記憶力都是影響正確率的因素。學生用甚麼心態去作答，是敷衍了事還是認真完成其實研究者都能感受得出來，12 歲的小孩子在遇到問題時最有

可能會有兩種情況，直接放棄作答和想不出來也會努力完成，在批改是試卷時我們可以透過學生的作答來獲得反饋。

就在數線上找出負分數和負小數這個問題來說，一個班級有近 10 位學生直接放棄作答，雖然在設計題目時有考慮過問題對學生來說太困難的問題，但作為加深加廣的題目卻很合適。放棄作答的學生我們只能判斷出無法按照課堂中的步驟進行作答，但到底哪一個環節成為他們無法作答的關鍵卻無從查起。雖然許多學生在後測中嘗試作答卻回答錯誤，但他們卻已經非常接近正確的答案，就數據結果來說這些學生的成績與直接放棄作答並無差別，但研究者知道他們具有成功學習的潛力。題目要求學生找出 $(-1\frac{2}{3})$ ，我們看到 A 學生的回答。A 學生能判斷出 $-1\frac{2}{3}$ 介於-1 和-2 之間並將中間的線段分成三等份，這也代表學生清楚 $-1\frac{2}{3}$ 中 3 的涵義，最後學生按照過往的經驗由左至右移動兩等分。雖然最後的步驟做錯，但我們也清楚知道學生的問題出在哪裡，只要花些許時間講不懂的部分釐清那 A 學生就有很大的可能在短時間內完全地學會負數的相關知識。所以鄰近等第間的學生變動具備合理性，只要不要發生兩個等第以上的變動，我們會將這些改變視為可容許的，不會對測驗的信度產生影響。因此就 6 年 5 班全班的兩次實驗數據來看，學生在課程中的表現與後測中的相差不大，說明後測的信度並無問題。

二、信度分析

為了探究信度，我們將學生的前測成績和後測成績用 SPSS 進行分析，分析的方法如下，先採用學生平時的數學成績將學生按成績優劣進行排序，之後將 76 位學生交叉分配，成為兩組成績相近的小組。舉例來說，平時成績第一三五名的學生分在 A 組，二四六名的學生分在 B 組，學生兩兩一組。一二名的學生一組，因成績相近這裡視為同一人，此舉是為了避免小組間的成績因學生的實力產生極大的落差。之後照順序對兩組學生的前測成績

和後測成績進行信度分析。我們得到兩組數字 0.765 和 0.928 分別為 A、B 兩組的前測成績相關性和後測成績相關性，平時成績越好的學生在前測中成績也會越好，相關性有 0.765。平時成績越好的學生在後測中成績也會越好，相關性有 0.928，可見前後測是具有高可信度的。

三、前後測總成績分析

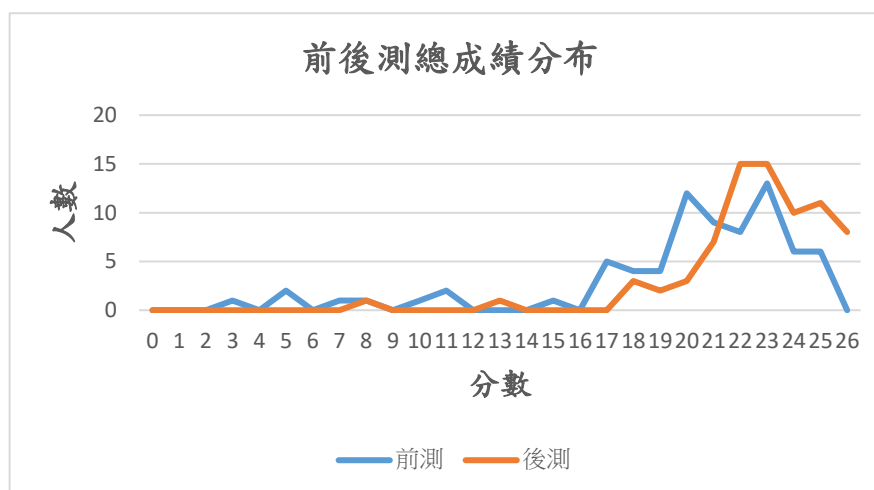


圖 4-3-1 前後測總成績分布

我們看到下方的成對樣本統計量

表 4-3-3 前後測總成績樣本統計量

	平均值	樣本數量	標準差	標準誤平均值
前測總分	19.82	76	4.91	0.56
後測總分	22.61	76	2.87	0.33

表 4-3-4 前後測總成績成對樣本相關性

	樣本數量	相關性	單尾檢定 p	雙尾檢定 p
前測&後測總分	76	0.52	<0.001	<0.001

表 4-3-5 前後測成對樣本檢定-成對差異

	平均值	標準差	標準誤平均值	95%信賴區間上/下限
後測-前測總分	2.79	4.19	0.48	3.75/1.83
	t 值	Df	單尾 p 顯著性	雙尾 p 顯著性
前測&後測總分	5.8	75	<0.001	<0.001

我們看到前測總分的標準差為 4.91，後測的標準差為 2.87。相比於前測，後測的成績分布較為集中，落差大的分數較少。從個別學生的成績來看雖然有少許學生的後測成績較前測低，但大部分仍是後測的成績高於前測。由於前測高分的學生在後測時仍取得不錯的分數，所以我們可以知道會造成分數較為集中的原因：

在前測中獲得低分和高分的學生在後測中成績跟全體學生的平均值落差很小。

那我們看到後測的平均分數為 22.6 較前測的 19.8 高出了近 3 分，所以後測的成績分布會較前測偏右且曲線峰頂較窄。學生的後測成績會集中在 22.6 附近，可見多數的學生經過教學後成績有所提升，尤其是分數較低的學生提升幅度大於其他人。

就整體負數單元來說，在前測中取得較低成績的學生，並非無法學會負數的概念。他們只是尚未接觸到負數概念，甚至他們其實已經接觸過，卻沒有系統化的整理這些資訊，只是需要一個人去悉心引導便能一點就通。

四、前後測第一大題分析

在第一大題中我們要確認的是學生是否能掌握整數在數線上的位置，我們要求學生在數線上標出九個整數(一個一分)和畫出數線的三要素(一個一分)，前測中大部分的學生都能將數線往左拓展並逐一標上負數，但還是有少部分學生只能完成正數的部分。而會將數線的三要素納入評分是因為學生在四年級早已接觸到數線，但老師好像都沒有進行數線的特性介紹，只用來讓學生認識數的位置及大小或者輔助計算。習以為常的事情如：數線上每一格距離相等學生是知曉的。但是若要請學生畫出一條數線，學生卻無法自行表述，因此判斷學生欠缺繪製數線相關的知識，但也認為只要有人能點出其中的要領，六年級學生是有能力繪製出正確的數線的，第一大題題目如下。

(1)。

請畫出一條數線並在上面標示出-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 這九個點。

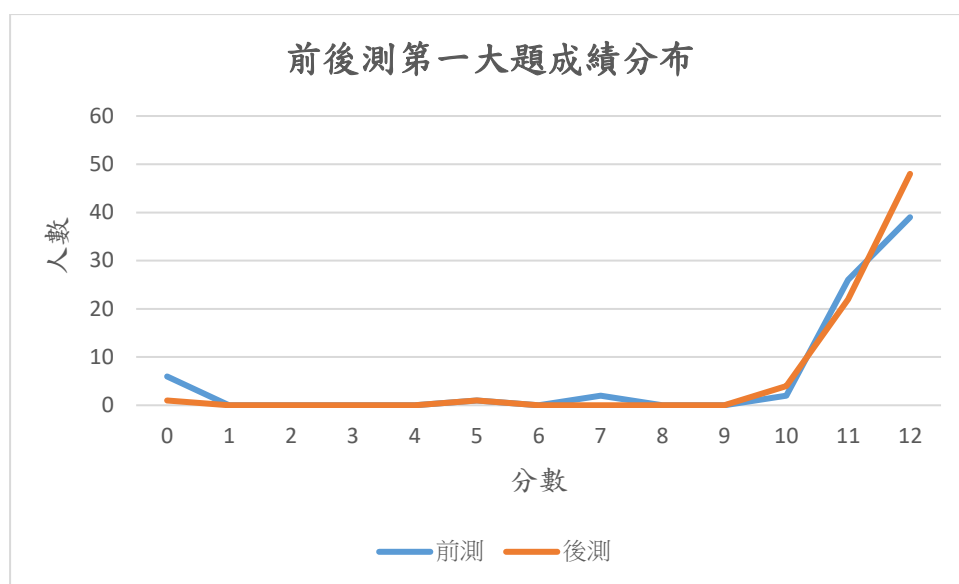


圖 4-3-2 前後測第一大題成績分布

我們看到兩次的成績分布，在前測中學生主要分布在 0，11 和 12 分，像是一邊比較低的臉盆。而後測則變成了在右邊明顯遞增的曲線，分數越高人數越多。前測 0 分的學生成績有顯著的成長，10 分(2 人)和 11 分(26 人)的學生有部分在後測取得滿分的成績。根據 t 檢定單尾 p 的顯著性為 0.007，雙尾 p 的顯著性為 0.015，兩者皆小於 0.05 因此我們可以說第一大題前後測成績有顯著差異。

表 4-3-6 前後測第一大題樣本統計量

	平均值	樣本數量	標準差	標準誤平均值
第一大題前測分數	10.43	76	3.29	0.38
第一大題後測分數	11.36	76	1.63	0.19

表 4-3-7 第一大題成對樣本相關性

	樣本數量	相關性	單尾檢定 p	雙尾檢定 p
第一大題前測&後測	76	0.29	0.005	0.011

表 4-3-8 第一大題成對樣本檢定-成對差異

	平均值	標準差	標準誤平均值	95%信賴區間上/下限
第一大題後測-前測	0.92	3.22	0.37	1.66/0.19
	t 值	df	單尾 p 顯著性	雙尾 p 顯著性
第一大題後測-前測	2.5	75	0.007	0.015

在前測的第一大題，有 51%的學生取得滿分的好成績，卻有 7%的學生沒拿到任何分數。數線這個概念在國小三年級時就有學到整數的數線，當時並沒有提到數線方向這個概念，都是假設右邊為正方向，越往右邊數字越大，學生也被告知數線上每個點之間的距離是相等的。或許是因為中年級遇到的題目都是在空格中填入數字，沒有讓學生親自動手將數線畫出來，而是使用印刷好的數線，學生就沒辦法將學到的東西徹底展現出來。學生雖然知曉數線越右邊數字越大，但他們無法用數學的方式去表達。在剩餘的 42%學生中幾乎所有學生(3%學生除外)都無法正確畫出數線應該有的三要素，但他們卻能將整數的位置確實標示在數線上。在沒有學習過負數的情況下有 90%的學生能在數線上標示出正整數和負整數的位置，可見他們在生活中已經有見過包含負數的數線。而先前提到 3%的學生則是能正確標示出正整數的位置，但是負整數的位置卻以相反的情況被標示在數線上，可見他們沒親眼見過，只能透過對正整數數線既有的認知進行推論。

學生沒有見過包含負數數線的原因有很多，家庭背景、生活習慣都是原因之。在研究動機有提到，歐美國家和亞洲國家的生活習慣不同，會影響學生的知識儲備量，進而影響到課程安排的合適性。但是施測對象中有 90%的學生已經接觸過包含負數的數線，所以在國小六年級進行負數單元課程的先決條件已經成立。

值得注意的是在前測進階題中獲得 0 分的學生有 61%(47 人)，其中 50%(38 人)的學生是能正確標示出正負整數數線位置的學生。以前在學習小數和分數時，我們不會將兩者同時擺放在數線上，雖然已經特意選擇不同整

數之間的分數和小數，但是學生還是無法在將單位長等分後找出分數和小數，並且又要思考正負數的問題，無疑讓難度上升好幾個等級。剩餘的 29 人中有 15 人能標示出負小數，但無法標示出負分數。有 3 人能標示出負分數，但無法標示出負小數。11 人能正確找出兩者在數線上的正確位置。

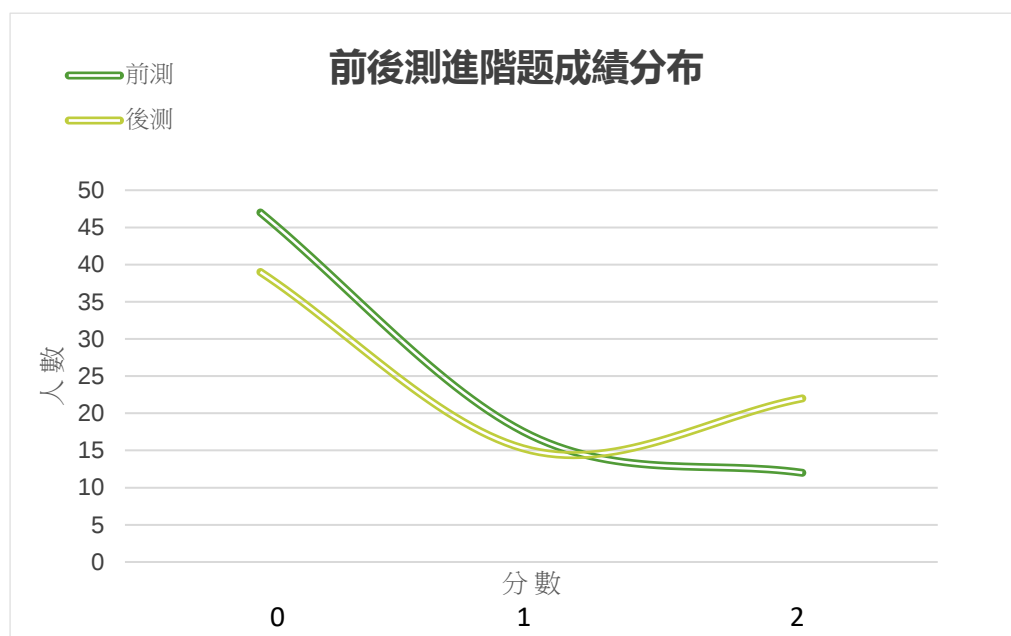


圖 4-3-3 前後測進階題成績分布

從上面兩張圖片我們可以發現兩個曲線形狀幾乎一模一樣，但是仔細看就會發現後測的 0 分人數較少，1 分人數相近，2 分的人數變多，人數有往右偏移的趨勢。這代表雖然負整數和負小數對六年級生來說很困難，但還是有少部分的學生能在這個年紀透過老師教學學會本來國中的課程或有初步的了解。

觀察那 15 人的試卷，不難發現學生無法判斷 $(-\frac{3}{4})$ 介於哪兩個整數之間，有些學生認為是-3 和-4，有些認為是 0 和-1，甚者會出現-4 和-5。會出現這三種情況的原因，一個是從視覺上學生判斷 $(-\frac{3}{4})$ 和-3、-4 有所關聯，如圖 4-3-4。但只要仔細想想 $(-\frac{3}{4})$ 是介於 0 和 1 之間，那不難判斷出 $(-\frac{3}{4})$ 和-3、-4 並無關聯，但是即使學生知曉 $(-\frac{3}{4})$ 介於 0 和-1 卻還是無法正確標示出來，因

為學生會將分數與小數混淆(將單位長等分為十等分)用小數的方式去尋找坐標如圖 4-3-5。學生在接觸到陌生的事物時，會下意識地去相信直覺或直接的聯想。另一個是利用舊有的經驗(將 0 和 1 之間 4 等分後由左向右數 3 格便會找到 $\frac{3}{4}$)以此類推，但是負數在數線上和正數是對稱的，因此過往的經驗反而會造成反效果，學生會在 $(-\frac{1}{4})$ 的位置標上 $(-\frac{3}{4})$ ，如圖 4-3-6。至於將 $(-\frac{3}{4})$ 畫在-4 和-5 之間是因為犯了兩個錯誤造成，首先學生認為 $(-\frac{3}{4})$ 和-4 有關，所以會先找出-4 的位置之後學生會往數線的左方移動(學生知道不再是左到右，而是右到左)尋找 $(-\frac{3}{4})$ ，如圖 4-3-7。

- (1) 請畫出一條數線並在上面標示出-5，-4，-3，-2，-1，0，1，2，3 這九個點。

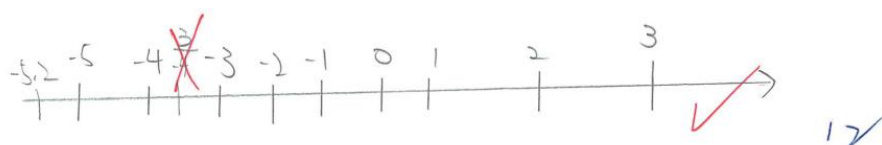


圖 4-3-4 錯誤類型 1

- (1) 請畫出一條數線並在上面標示出-5，-4，-3，-2，-1，0，1，2，3 這九個點。



圖 4-3-5 錯誤類型 2

- (1) 請畫出一條數線並在上面標示出-5，-4，-3，-2，-1，0，1，2，3 這九個點。

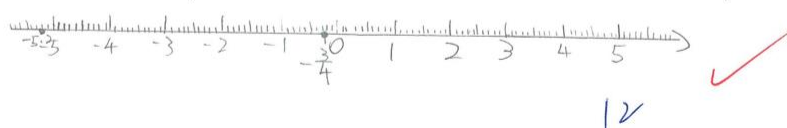


圖 4-3-6 錯誤類型 3

(1)

請畫出一條數線並在上面標示出-5，-4，-3，-2，-1，0，1，2，3這九個點。

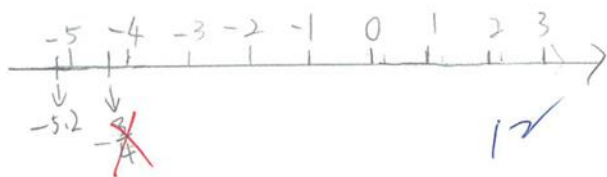


圖 4-3-7 錯誤類型 4

相比於負分數，學生對於負小數的認知較為明確，或許是因為小數不像分數因為分母的多寡而改變等分的數量。小數以十、百、千……為單位做切割。但是若學生能標示出負小數的位置，那麼他對於負數從小到大的排列應該要由數線的左方到右方有清楚的認知。也就是說學生知曉等分線段後該由右邊開始往左數，因為負號後面數字越大，該負數其值越小。那麼對於負分數標示錯誤的原因就不可能是將位置標示顛倒，而是無法判斷負分數介於哪兩個整數之間。

解釋前後測第一大題的相關性，前後測第一大題分數的相關性只有 0.29，這說明兩次成績差距非常之大。第一大題在設計時是為了在既有的觀念上做出延伸，將負數的觀念融入數之中。考驗的是學生是否能在原本只有右半部正數部分的數線上補齊左半部負數的部分，只需要學生能回想起課堂中研究者提過：「包含負數的數線，經常出現在我們的生活中，最常見的就是溫度計上的刻度。」並按照對溫度的認知「比 0 低 1 度是-1 度 C，比 0 低 2 度是-2 度 C」依序在數線上標上負整數。由於這一部分難度在實驗教學中算是較為簡單的，幾乎所有學生在上過課後都能正確畫出數線，雖然數線的三要素(原點，等距，方向)部分可能會出現紕漏，但所有學生對數線與負數的認識達到一定的水準。因此無論前測的成績表現如何，學生在後測第一大題的表現都能維持在 10 分以上，這也是前後測第一大題分數相關性只有 0.292 的主要原因。至於第 2 小題負分數和負小數的部分研究者判斷大部分學生在學習上遇到障礙，所以判斷若未來要進行國小高年級課綱改革負分數及負小數將不納入考慮。

五、前後測第二大題分析

在前測的第二大題中，分為五個小題。第一、二小題為一正整數和一負整數的大小比較，這兩題和其餘三題相比正確率都有明顯的差異，分別為 98%(僅一人答錯)和 96%(三人答錯)。而第三小題為兩負整數比較大小，正確率稍低為 88%。第四小題為兩負分數比較大小，其正確率又略為降低(82%)。而第五小題為五題之中正確率最低者，正確率為 65%。五個小題正確率逐步降低，雖然當初在題目的設計上就是越往後層次越高，但是看到實驗結果著實令研究者感到震驚。

(3)

請在 $\square$ 中填入 $>$ 或 $<$

1. $-1 \square 2$

2. $-2 \square 1$

3. $-2 \square -3$

4. $-1.2 \square -1.5$

5. $-\frac{3}{2} \square -\frac{5}{2}$

圖 4-3-8 前測第二大題題目

無論是第一大題還是第二大題都同時涵蓋了負分數和負小數，從學習歷程上來看，小數較分數晚學習。但是在前測中和負分數有關的問題其正確率和負小數有關的問題相比要低很多。

分數在國小是基礎數學和高等數學的分水嶺，其概念包含了許多的類型，部分/全部、集合/子集合、分數是數線上的一個點……等。許多學生不了解分數，受整數基模的影響，將分數 $\frac{a}{b}$ 視為兩個獨立的個體(洪素敏，楊德

清，2002)。這是先前提到的學生認為 $(-\frac{3}{4})$ 介於(-3)和(-4)的原因，學生對符號表徵的迷思概念與整數有關。無法正確回答問題的學生尚未真正將分數的概念釐清，依賴於部分/整體模式且受到整數基模思考的影響。

分數與小數之間有著一定程度的連結，教師可以利用分數的概念去介紹可利用簡易小數表徵的有理數，如： $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{100}$ 、 $\frac{1}{1000}$ ……等，也可以用以 10 為基底的小數系統去延伸小於 1 的數。教師若無法在更早的課程中將分數與小數進行雙向連結，讓學生了解兩個不同表徵所呈現相同的概念，就會出現前測中的這種狀況，知曉如何比較負小數大小卻無法順利比較負分數。

下圖為第二大題-比較數的大小之成績分布。

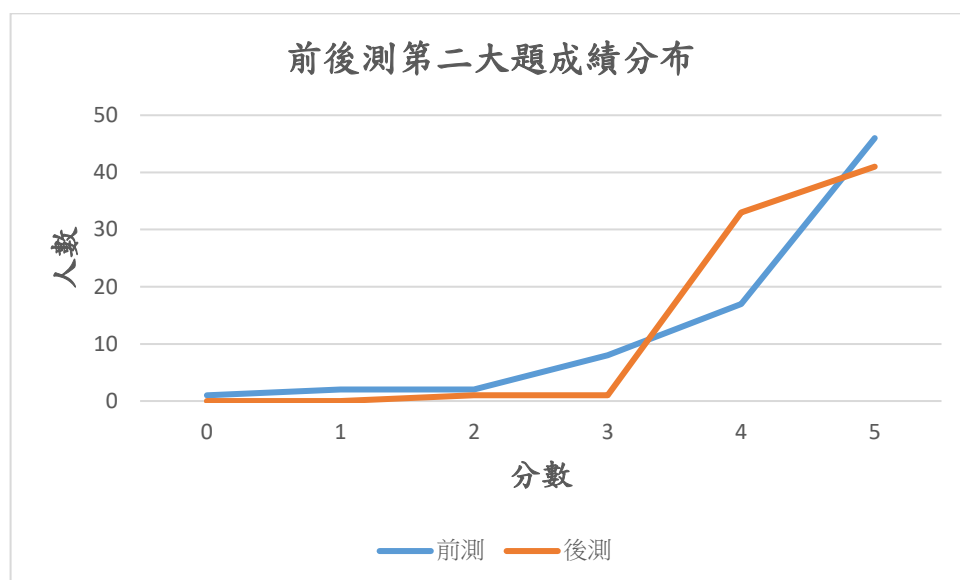


圖 4-3-9 前後測第二大題成績分布

這兩張圖的高低分段的人數相差不大，主要的差別是原本前測表現在 2 分和 3 分的學生幾乎消失了，而 4 分的學生大幅增加，增加了近一倍左右。可見對負數一無所知的學生原本依靠自洽的邏輯取得的成績在經過教學後有所提升，但並非完全釐清而是與新經驗有所衝突。所以才會造成現在這種滿分人數沒有增加的情況。

以下是第二大題的成對樣本統計量

表 4-3-9 前後測第二大題樣本統計量

	平均值	樣本數量	標準差	標準誤平均值
前測第二大題	4.32	76	1.09	0.12
後測第二大題	4.50	76	0.60	0.07

表 4-3-10 前後測第二大題成對樣本相關性

	樣本數量	相關性	單尾檢定 p	雙尾檢定 p
第二大題前測&後測	76	0	0.5	1

表 4-3-11 前後測第二大題成對樣本檢定-成對差異

	平均值	標準差	標準誤平均值	95%信賴區間上/下限
第二大題後測-前測	0.18	1.24	0.14	0.47/-0.10
	t 值	Df	單尾 p 顯著性	雙尾 p 顯著性
第二大題後測-前測	1.30	75	0.100	0.199

第二大題的單尾顯著性為 $0.1 > 0.05$ ，雙尾顯著性為 $0.199 > 0.05$ 因此無法看出前後測第二大題有顯著差異。造成這樣的原因可能是學生在生活中已經見過負數或是相關的概念對於數之間的大小有一定的了解，所以在前測中的表現相當優異，在經過教學後只是將觀念釐清並無太大進步。

第二大題第一、二小題是比較一正整數和負整數大小，正確率皆為 90% 以上，可見學生具有判斷正數和負數大小的能力。先不論學生是如何判斷正負數大小。或許是因為「負號」和「減號」外形相同，而減號給人小和少的印象，所以學生能回答出正整數和負整數之間的大小關係。而第二大題第三小題是比較兩負整數的大小，在設計時考慮到為釐清學生是否清楚「負號」有「欠」的涵義在。若能理清其中的道理就能做出以下推論，(-3)元是欠別人三塊錢的意思，(-2)元是欠別人兩塊錢，那這兩種情況下哪個持有的錢多？當然是負債少的錢多，所以(-2)大於(-3)。但是有些學生會有「欠三元比起欠兩元，欠三元欠比較多錢啊，為什麼欠三元比較小呢？」的想法，我們這時要糾正是「總資產」的多寡而非「債務」的多寡，這兩者明顯不同。若是考慮「債務」的多寡，我們應該只看(3)和(2)把負號去掉，負號代表欠錢，而

後面的數字是負債的金額。因此負號後面的數字越大，欠的錢越多。程度較好的學生可以更進一步的延伸到小數和分數，進而獲得正確比較負數之間的大小的能力(不局限於負整數)。

第二大題的共變異數為負，這代表學生的分數呈負相關，我們先將學生的成績分為三類：一，前測表現差強人意，但後測表現有明顯進步。二，前測表現優異，後測成績略有下降。三，前測表現優異，後測表現也很優異。而對數據影響最大的是狀況二的學生。我們向國中教師請教狀況二發生的原因，照理來說經過教學後成績應該有所提升，怎麼反而下降呢?這是因為優秀的學生靠著背景知識及邏輯推理完成前測取得好成績，但是在接受新知識的灌注後，知識間的連結不夠強大，且欠缺大量的練習(實驗教學的練習只有在課堂中，並無課後作業)，造成落差，所以表現為略有下降。

	第1小題	第2小題	第3小題	第4小題	第5小題
第二大題前測	99%(75/76)	97%(74/76)	88%(67/76)	83%(63/76)	66%(50/76)
第二大題後測	100%	100%	97%(74/76)	96%(73/76)	57%(43/76)

表 4-3-12 前後測第二大題正確率比較

研究者發現經過教學後學生對於負數和正數之間比較大小、負整數之間比較大小和負小數之間比較大小的題目正確率有所上升。然而負分數之間的比較卻下降許多，這個現象值得深入研究，並顯示負分數可能不宜納入國小階段的課程。

六、前後測第三大題分析

第三大題為簡單的正負數加減，題目如圖 4-3-10。

(4)

算一算

1. $2-3=$

2. $-1+5=$

3. $-2-4=$

4. $-3+1=$

5. $-2-2=$

圖 4-3-10 前測第三大題題目

第 1 小題為「 $2-3$ 」，一較小的數減去較大的數，在之前的課程中學生被教導只有大的數字能減去小的數字。負數不像正數可以透過實體理解其意義，對於沒接觸過負數的學生會認為此題目並不合理，無法作答，更有甚者會直接答 1。或許學生知曉答案並不是 1，而是不夠 1。我們用以往的方法來看，有 2 顆蘋果，拿走 3 顆會不夠 1 顆，不夠 1 顆該如何用數學表示，學生並不知道。第 1 小題正確率達 86%，對於沒學習過負數的學生而言算是相當不錯，可見學生對於這個問題，有一定的處理方式。先不論方式的正確與否，我們要去思考學生這麼做的原因，測驗後詢問數名學生，A 學生說：「我的答案是 5，把 3 移到前面，減號變加號， $3+2=5$ 。」，B 學生說：「我的答案是 1，把 3 移到前面去， $3-2=1$ 。」。從這些個案中，我們可以發現學生進行一些看似有邏輯，但事實上並沒有意義的舉動，詢問學生為何這麼做，學生也回答不出來，就是覺得該這麼做。

第二大題各小題正確率及題型：

第 1 小題：86%(66 人)，正數減正數，結果為負。

第 2 小題：85%(65 人)，負數加正數，結果為正。

第 3 小題：55%(42 人)，負數減正數。

第 4 小題：81%(62 人)，負數加正數，結果為負。

第 5 小題：52%(40 人)，負數減正數。

第 3 小題和第 5 小題正確率明顯低於其餘三者，這兩題的共通點是皆為負數減正數的題目。並不是所有和負數有關的題目正確率都如此之低，負數加上一個正數的題目學生明顯比較擅長。先前提到正數是可以利用實體做引導，因此學生對於將純數學問題情境化較容易，也比較可以得出正確的結果。當然有的學生只是將加數和被加數位置調換，

第 1 小題的正確率如此之高，有部分原因是學生在進行測驗時已經了解測驗和負數有關，所以對於未知的問題都會往負數的方向思考，小的數字減大的數字不夠減怎麼辦，加上負號就對了。許多學生抱著就算不知道答案是多少也要填一個數字上去的想法。2-3 明顯和 1 有關，但應該不是 1，所以加上負號好了。因此正確率有虛高的風險，我們無法知曉回答正確的學生是否清楚如何計算。考量到題目設計給初學者，比其複雜的計算題，容易被蒙對也是本實驗無法避免的問題。

第 2 小題 $(-1)+5$ ，學生會將題目轉成他們熟悉的樣子，在他們眼中會轉變成 $5-1$ 雖然就結果來看，答案都是 4 沒錯，但是 $(-1)+5$ 的-是性質符號，而 $5-1$ 的-是運算符號，其代表的涵義大相逕庭。答案雖然正確，但純粹是瞎貓碰到死耗子。

第 3 小題 $(-2)-4$ ，被減數為負數並減去一個正數。從以前學生被告知算式 $A-B=C$ 的意義是 A 比 B 多 C。現在學生要理解一個已經不夠的數比一個正數多多少可能有點複雜。之前遇到的問題諸如：「五顆蘋果比兩顆蘋果多幾顆呢?」。實物的操作是在桌上擺上兩堆蘋果，一堆 5 顆，一堆 3 顆，同時從兩堆蘋果拿走一顆蘋果，重複此動作直到一堆蘋果沒有為

止，而剩下的蘋果就是多出來的，學生能明確感受到多出的量。但是負數的減法卻只能在腦海中進行邏輯推演。首先，將數學式 $(-2)-4$ 轉換成 (-2) 比 4 大多少？這個文字問題，這時學生會面臨一個矛盾的點， (-2) 這個數字明明比 4 小，怎麼會問 (-2) 比 4 大多少呢？這個問題有邏輯上的問題，但是如果我們不去思考這點還是能給出一個看似合理的解答。 (-2) 比 4 小 6，小的相反意義是大，所以我們可以把比 (-2) 比 4 小 6 看成 (-2) 比 4 大 (-6) 。雖然在文字上學生會困惑大就是大，小就是小，如果有一天老師問學生：「請問哥哥的年齡比你大幾歲？」學生回答：「是小 (-6) 歲喔。」很明顯的，我們不可能接受學生的這種回答，那有沒有其他解釋能更合理的詮釋算式的意義呢？

第 4 小題 $(-3)+1$ ，和第 2 小題為同類型的題目，一負數加上正數，但結果卻不相同。若說第 2 小題是原先負債但在還清債務後還有剩餘的錢財，第四小題則是在償還債務時卻無法一次還清，還留有欠款。學生要模擬情境，我們原先欠了 3 塊錢在償還 1 元後財產會變成？六年級的大部分學生能回答出這個問題。研究者就讀小學時學校設有福利社，學生經常會去購買小零食或文具，也因如此學生對於金錢較為敏感。有時同學間也會有金錢的借貸關係，所以學生對於欠錢還錢有一定的認識。將生活經驗用於數學之中。

第 5 小題 $(-2)-2$ ，在這個問題中我們看到的答案只有三種 (-4) 、0 和 4。其中有 29 人認為答案是 0，我們知道一個數字減去數字本身結果會等於 0。很明顯學生把 (-2) 和後方的減 2 搞混了，所以產生這樣的結果。至於 4 這個答案是如何產生的，學生認為有兩個負號就會變成正號，所以將 2 加上 2 就得到 4 了。

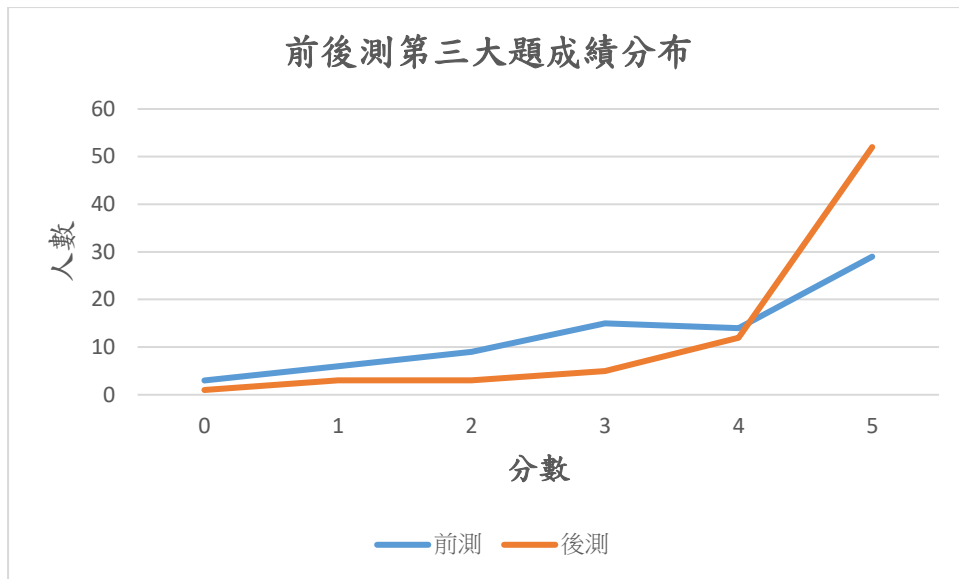


圖 4-3-11 前後測第三大題成績分布

我們看到上面的成績分布圖，後測低分的學生明顯較前測變少了，而滿分的人數也增加 20 人，我們可以很確定的說經過教學後大部分學生確實學會了正負數的加減。

以下是第三大題的成對樣本統計量

表 4-3-13 前後測第三大題樣本統計量

	平均值	樣本數量	標準差	標準誤平均值
前測第三大題	3.55	76	1.49	0.17
後測第三大題	4.37	76	1.16	0.13

表 4-3-14 前後測第三大題成對樣本相關性

	樣本數量	相關性	單尾檢定 p	雙尾檢定 p
第三大題前測&後測	76	0.55	<0.001	<0.001

表 4-3-15 前後測第三大題成對樣本檢定-成對差異

	平均值	標準差	標準誤平均值	95%信賴區間上/下限
第三大題後測-前測	0.82	1.29	0.15	5.5/0.52
	t 值	df	單尾 p 顯著性	雙尾 p 顯著性
第三大題後測-前測	5.5	75	<0.001	<0.001

第三大題前後測分數的相關性為 0.549，雖然說比起整份測驗的相關性 0.549 顯得不是很高，但是我們進行成對 t 檢定的目的是為了調查學生的成績在教學後是否會有所成長，也就是呈正相關。檢測出來學生確實在教學後

有顯著的成長，普遍學生前測的表現並沒有像第二大題一樣傑出。計算題比起比大小更需要去釐清符號間的變化與涵義，單純靠著邏輯推理已經無法完成負數的計算。但是通過教學會發現普遍學生都會有所成長，透過在數線上展示數的移動軌跡並找出最後的落點，與計算題做結合，讓學生有更具體的操作增加其印象。結合測驗結果與課堂表現實驗者認定小學高年級學生已經具備學習包含正負整數計算的能力。前後測分數經 t 檢定測試，單尾 p 顯著性 <0.001 ，雙尾 p 顯著性 <0.001 ，因此我們可以說前後測成績有顯著差異。

七、前後測第四大題分析

第四大題為相對量的題目，學生只要有正負相對的概念就能輕易作答。
題目如圖 4-3-12。

(5)

如果南方與北方是相對的，向北走

10 km 可以記作 + 10 km，請問向南走 7

km 該記作？

圖 4-3-12 前測第四大題題目

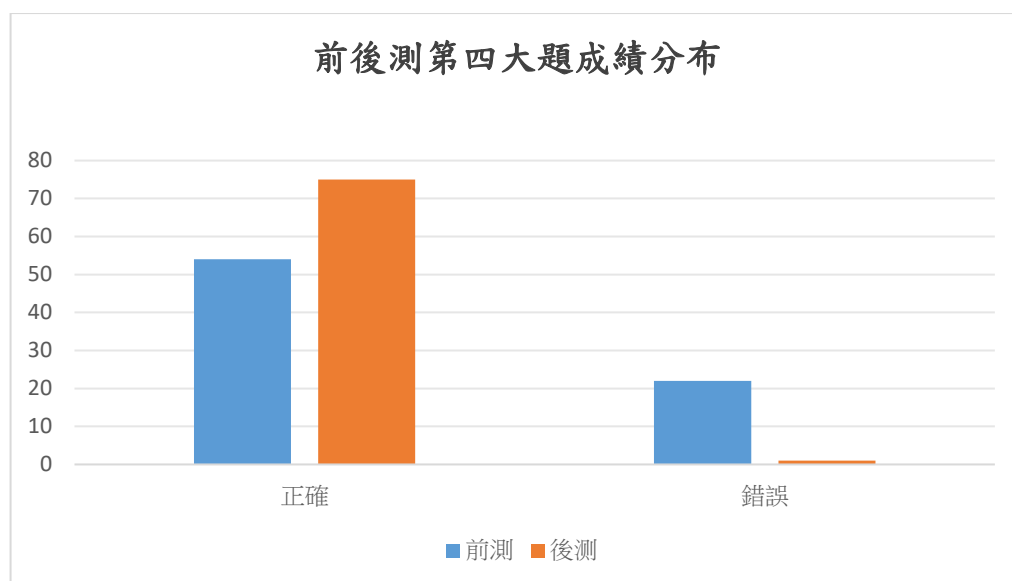


圖 4-3-13 前後測第四大題成績分布

第四大題的結果非常顯著，在沒有上過課前部分學生不清楚題目想要詢問的相對量是甚麼？還會困惑說為什麼方向可以用正負號來表示。而聰明的學生就能馬上反應過來。相對量的理解不是一個過程，而是會給人一種豁然開朗的感覺，只要能找到關鍵的點就能馬上理解。最明顯的就是學生在上完課後會說：「原來如此，我懂了。」這樣的話。從後測的結果看來國小六年級學生對於相對量的理解也沒有任何問題。

以下是第四大題的成對樣本統計量

表 4-3-16 前後測第四大題樣本統計量

	平均值	樣本數量	標準差	標準誤平均值
前測第四大題	0.7105	76	0.45653	0.5237
後測第四大題	1	76	0	0

表 4-3-17 前後測第四大題成對樣本相關性

	樣本數量	相關性	單尾檢定 p	雙尾檢定 p
第四大題前測&後測	76	---	---	---

表 4-3-18 前後測第四大題成對樣本檢定-成對差異

	平均值	標準差	標準誤平均值	95%信賴區間上/下限
第四大題後測-前測	0.29	0.46	0.05	0.39/0.19
	t 值	df	單尾 p 顯著性	雙尾 p 顯著性
第四大題後測-前測	5.528	75	<0.001	<0.001

第四大題是跨領域結合的標準範例，學生須透過閱讀題幹將文字轉換成數學符號並表示出來。在這裡就凸顯出閱讀理解的重要性，學生如何從題目中挑選出對自己有用的資訊。在升上高年級之前，學生其實已經遇到過許多需要從文字中進行推敲、整理資訊的題目，因此這大題考驗的是學生是否能將特定詞彙與數學符號做連結。題目中會提到許多相對的概念，如：東方/西方，增加/減少，收入/支出...等。並且我們會將其中一個概念冠上正號或者負號，支出 500 元可以用 -500 元來表示。那我們就知道與支出相對的收入就該用 + 來表示，收入 300 元應該用 +300 來表示。所以第四大題是在考驗學生的閱讀能力，學生需要從題幹中過濾出對自己有用的資訊，並將這些資訊分類後將他們與相對性質的符號互相掛勾。此大題更是在考驗學生獨立思考與判斷的能力。在未來的考試中或是大型測驗中，題幹只會越來越冗長，應試時間只會更長，學生需要有一定程度的專注力靜下心去完成題目。而閱讀是培養專注力的最好方式，所以便設計了一道需要閱讀題幹並簡單推理的題目。前後測分數經 t 檢定測試，單尾 p 顯著性 <0.001 ，雙尾 p 顯著性 <0.001 ，因此我們可以說前後測成績有顯著差異。

八、前後測第五大題分析

第五大題為選擇題，四個選項的內容包含了正負數的定義，「+」「-」的讀法、簡單計算和數的分類。(A)選項「+2 讀作正二」是要考驗學生能否正確了解「+」在不同情況下的讀法。(B)選項「 $-1-4=-5$ 」是考驗學生的計算能力。(C)選項「0 和 4 是正數，-1 和 -3 是負數」和(D)選項「負數是指比 0 小的數」是在檢測學生是否知道數分為正數、負數和 0。

(6)

請問下列敘述何者錯誤？

(A) +2 讀作正二

(B) $-1-4=-5$

(C) 0 和 4 是正數，-1 和 -3 是負數

(D) 負數是指比 0 小的數

圖 4-3-14 前測第五大題題目

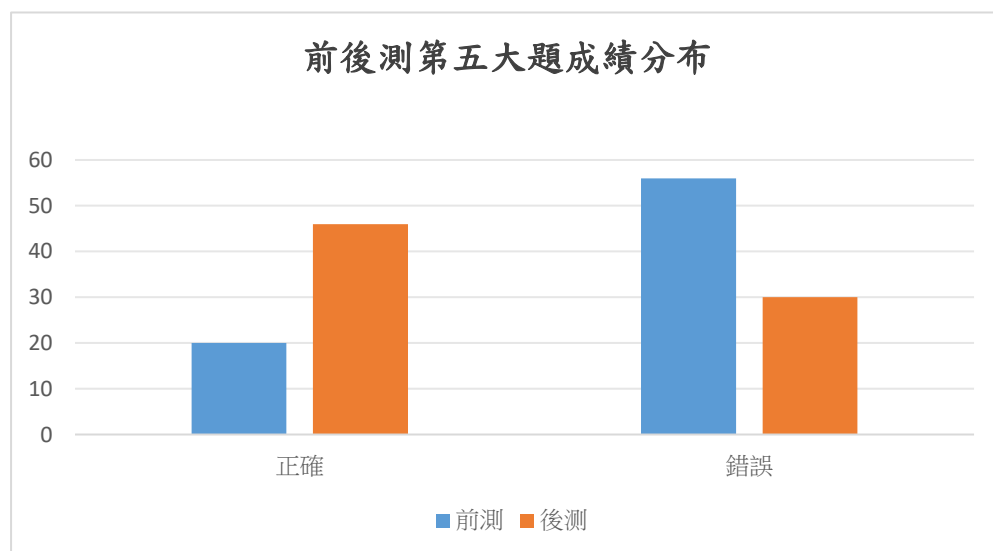


圖 4-3-15 前後測第五大題成績分布

第五大題因為題目設計的緣故，檢測的要數過多因此很難從圖表或數據分析出學生的詳細學習狀況，只能獲得一個大概。

以下是第五大題的成對樣本統計量

表 4-3-19 前後測第五大題樣本統計量

	平均值	樣本數量	標準差	標準誤平均值
前測第五大題	0.2632	76	0.44327	0.5085
後測第五大題	0.6053	76	0.49204	0.5644

表 4-3-20 前後測第五大題成對樣本相關性

	樣本數量	相關性	單尾檢定 p	雙尾檢定 p
第五大題前測&後測	76	0.055	0.319	0.639

表 4-3-21 前後測第五大題成對樣本檢定-成對差異

	平均值	標準差	標準誤平均值	95%信賴區間上/下限
第五大題後測-前測	0.34211	0.64400	0.07387	0.48927/0.19494
	t 值	df	單尾 p 顯著性	雙尾 p 顯著性
第五大題後測-前測	4.631	75	<0.001	<0.001

第五大題為一選擇題，共四個選項，需要從四個選項中選出正確的選項。雖然看似一道題目，實際上是四題。每個選項都是一句陳述句，學生需要一句一句去辨別其真偽。題目的內容涵蓋了，正負數的定義、負數的讀法及簡單的計算。這一大題的重點放在 0 究竟是正數還是負數？因為 0 和正整數是學生已經學習過的概念，但要注意的是 0 和正整數並非同時習得的，而是先接觸正整數後才會學到 0，因為 0 是抽象的概念代表無，對於學生而言可能比較難接受。但是學生會下意識地將 0 歸類於正數的部分，因為他們腦中並沒有對數有一個明確的劃分。而在這次的教學中研究者帶入了負數的觀念，學生會自然而然地將新學習到的負數與之前接觸的正數與 0 做區分，殊不知數的劃分其實是三類而不是兩類。研究者在教學時有反覆強調，數分成大於、小於及等於 0，所以 0 是特別的，不屬於正數或負數，單獨一類。若要正確答題，學生需要對數的劃分有明確認知。

前測中回答 A 選項者有 29 人，B 選項 19 人，C 選項 20 人，D 選項 5 人，沒有作答者 3 人。A 選項(+2 讀作正二)是一個非常具有迷惑性的選項，對於尚未接觸到正負的學生，「+」這個符號以往都念作加，用來判斷學生是

否知曉性質符號。B 選項是簡單的負數加減，選擇的人數較 A 少，可能的原因是學生先跳過了這個選項，優先閱讀後面的選項。因為其他三個選項都是文字描述只有 B 選項是算式，若判斷後面的選項有正確答案就會跳過 B 選項。C 選項是判斷哪些數字屬於負數，那些是正數。這種問題最主要的就是判斷 0 屬於何者，因為沒有負號的關係容易被學生當成正數。有趣的是這題是要選擇錯誤的選項，而有 20 名學生認為 0 不屬於正數，不知道該說他們聰明還是想法與眾不同。D 選項是以定義的方式去描述負數，這就比較容易了，學生普遍認為比 0 小的數就是負數，雖然不清楚他們是否把 0 歸於正數之中。上述是我們從選項分析未經過教學學生選擇的理由，接下來我們來看看教學後學生的選擇是否會產生變化。

後測是要從四個選項中選出正確的選項，A 選項依舊是檢測學生的整數讀法， (-3) 讀作減三嗎？接觸負數後學生已經能判斷性質符號和運算符號的區別，根據是在後測中選擇 A 選項的人數只有 1 人，這明顯與前測的選擇相差甚遠。B 選項是 $(-2)-4=2$ 選擇的人數為 0 人，這個選項甚至不用計算只要思考 (-2) 在數線上往左位移有可能移動到 2 的位置嗎，這明顯是不可能的。從結果來說我們可以說學生對數線及位移有一定了解，但更深入的計算猶未可知，或許有學生是計算出正確答案後作出判斷，但我們並不清楚。C 選項這次移除了 0 加入了 0.1 和 (-0.1) 的選項，兩個數字都很接近 0，沒有任何陷阱存在所以學生應該能直接選出答案。有 45 位學生選擇了 C 選項，這代表這些學生能清楚分辨正數和負數，而 0 的部份我們放到 D 選項去檢測。D 選項是選擇人數第二多的選項有 30 人選擇了 D 選項，敘述是「正數是大於等於 0 的數」這很明顯是錯誤的，研究者有反覆強調 0 不是正數也不是負數但仍有許多學生當作正數。或許是兩個小時的課程太短，需要長時間給學生灌輸概念，每一堂課請一位學生回答 0 是正數還是負數，幫助他們反覆複習。我們無法確定學生究竟是因為能力問題還是因為接觸時間不夠長的原因才會

一直將 0 當作正數，但是從有過半數學生回答正確的情況下我想後者機率較大。只要以正常的課綱去安排課程讓學生長時間接觸正負數，我想他們很快就會學會了吧。

第四節 數據討論

雖然研究主題為負數教學的可行性，但是我們可以從平時成績與前後測成績相關性發現 0.765 和 0.928 有些落差，因時間與人力限制我們只能做出一些合理的猜測。造成兩組數字的差距的可能原因，先前提到我們是按照學生平時數學測驗的成績去將學生排序，而非照學生的資質排序。其中牽涉到後天的努力及回報，而這些是無法進行量化的。前測是在學生尚未正式接觸教學內容前的一次評量，學生的表現會受到生活、課外閱讀、個人資質……等因素影響，教學的成效無法在其中呈現出來。舉其中一個學生作為例子，該生在班上的成績一直名列前茅，但是他沒有接觸過負數相關的知識，他在前測的表現中不是很理想只取得 18 分的成績，但在後測中取得了 25 分的好成績。該生的理解力很好，在課堂中的表現優異，只是因為課綱安排的關係沒有接觸到相關課程。從結果來看這名學生學會了除負分數、負小數以外的相關知識，由此可見部分學生是能在 6 年級學會負數相關的知識。有學生學習表現良好、吸收知識快，但他在生活中沒有接觸過負數，那麼他的前測成績和平時成績的相關性明顯會比較低。而後測是在教學後，因此個人的學習成效會影響學生的表現，因此後測成績和學生平時成績相關性較大有 0.928 呈高度相關。

第五章 結論與建議

第一節 結論

本研究者依照第四章研究結果，進而撰寫成本章結論與建議學生實驗結果評估。研究者將從量化與質性兩部分進行說明。

當初在設計課程時研究者就認為既然西方國家將負數單元安排在國小課綱中就有其道理，西方的小學生確實也具備學習負數的條件與能力。那東方的小學生的條件與過往學習的課程與西方的並無太大差異，照理來說也能學會相關的知識，但深怕有遺漏的地方所以決定以更客觀的數據去說服設計課綱的專家們，以做為未來調整課綱的依據。

一、學生的反饋

就實驗結果來說，研究者認為高年級學生是可以學會基本的負數知識，但課程的安排須循序漸進，有些內容不適合出現在課程中。負分數及負小數對於學生來說太複雜，需要將單位長度進行切割按大小方向排序，這複雜的操作較適合放在國中的課程中。

從測驗的繪製數線就能看出學生對於數線的不熟悉，他們的能力只夠在有刻度的數線上標出特定數字。經過兩堂課的時間，學生對負數也有初步的認識，能繪製簡單的數線、比較數的大小、完成簡單的加減計算、認識相對量、知曉負數的定義與數的劃分。

能繪製包含負數的數線尤為重要，因為後面的教學是建立在學生對包含負數的數線相當熟悉的情況下。研究者和學生會利用數線的特性在數線上進行操作，許多學生視為理所當然的現象研究者也會一一解釋，當我們在數線上標上 1 並詢問學生 2 應該要標在哪裡時，我相信每一個學生都會回答 1 的右邊，接著詢問為什麼是右邊呢？學生回道因為越右邊數字越大？研究者反問為什麼越右邊數字越大呢，不能越左邊數字越大嗎？

從學生的回答我們能得知數的相對位置是難不倒他們的，且學生的思考邏輯遵守依定的準則，但是卻無法講出明確的規則(只知道越右邊的數字越大)。

我們在教學時有時不會向學生解釋緣由，而是直接請他們先記下來，這是因為解釋起來會牽扯到更深奧的學問或浪費課堂的時間還會讓學生產生更多的困惑。學生會統整他們之前遇到的情況，因為我們平常默認右邊為正方向，雖然只要特別標註方向越左邊越大的情況也是會出現的。像是算式中若被加數、被減數為負數，那麼該數可以不用加上括號這種約定成俗的例子在數學中不佔少數。我們要把其中的關鍵告訴學生，數線上的箭頭方向代表著正方向，越往該方向延伸數字越大，因此箭頭的方向將影響數線刻度的標示。

從後測的數據中我們發現近全部學生都能畫出包含負數的數線並標出數字，雖然並不是畫的很精確，單位長和箭頭有時會遺漏掉但是數字方面卻不會出錯，可見得學生已經能清楚知道整數的排列順序。因此我們可以說學生確實學會了如何繪製包含負數的數線。

知曉了整數的排列順序後，學生就能比較各數之間的大小，越往正方向的數字會越大，從答題正確率來看學生已經具備比較整數大小的能力，但是若將負分數及負小數納入其中，學生會力有未逮。從第二大題前三小題(比較整數之間的大小)的正確率來看超過八成的學生能正確回答，因此我們判斷學生具備判斷整數大小的能力。至於比較負分數及負小數的部分能正確回答者僅三成左右，可以做為挑戰題安排進課綱中，讓學習能力較強的學生作延伸學習之用。

經實驗結果推論，學生也具備簡單計算負數加減的能力。計算負數加減的能力是從數線及方向性延伸而來，所以學生須具備對完整數線認識之基礎，增加即往正方向移動，減少即往負方向移動。若增加的單位為

正數要維持同方向，負數的話要將方向再反轉。其中的過程需要繞好幾個彎，一些程度較差的學生可能會陷入自己的思維邏輯而不自知，最後暈頭轉向。但是較基本的負數減正數、負數加正數、較小的正數減去較大的數，這種只要找出一個數字然後往左或往右移動的簡單操作學生能輕易地找出上述類型題目的答案。

除了前後測的分析外，我們從學生課堂中的學習單中(參見附錄一、附錄二)也能發現學生的表現優於兩個禮拜後的後測，就第一大題來說數線的三要素在課堂中能完成的人數就多於後測。這代表學生是能自行操作並完成正確的數線，只是因為缺乏練習及未完全吸收知識，所以導致一段時間之後就遺忘重要的細節，這種需要記憶的知識比起靠理解就能解決的問題更能顯現出練習和經驗的重要性。其他觀念的問題如：比大小，數的分類、相對量等，課堂表現與後測相差不大。可見六年級學生具備學習負數單元的潛力，但需要大量練習去完全習得。

透過這次的教學我們也要反思，學生究竟從我們這邊獲得了些甚麼。在課程結束時研究者會給出總結並請學生講出今天他們學到了甚麼。畢竟學生能自己敘述出的知識才是真正屬於他們的。

二、上課表現

研究者在教學後有記錄下學生的回答及課程表現作為分析的依據。在過程中學生面對研究者的問題無法直接找到問題的核心，需要研究者將一個問題或發現拆成好幾個小問題去誘導學生的回答。我們希望學生能發現生活中的負數並思考負數與0的大小關係，也因為生活中充斥著負數，所以學生很容易就掌握負整數之間的大小關係，但也僅僅只有負整數，若將單位分割局限在一單位內(分數及小數)，學生容易產生困惑。研究者當初有想過以數線的對稱性作為切入點，因為六年級生具備比較正分數及正小數的能力，再利用對稱的方式找出負數的位置，有了位置之

後就能容易的比較出大小。但是對稱性後面要帶出的課程是相反數更之後是絕對值，然而這些內容不在這次的課堂中，較適合放在國中的課程。雖然在國外的參考書籍和本次研究負分數和負小數本來就不在考慮範圍中，但事後想來或許先讓學生知曉數線的對稱性能讓學習更為輕鬆。

除了比較大小外，我們也以海拔高度和海平面為例讓學生知道 $(-n)$ 是比基準點 0 小 n 的數。希望學生能擺脫數線的輔助只在腦內進行運思，判斷負數之間的大小。數線對於學生的幫助是相當明顯的，通過數線輔助學生們確實展現了我們所期望的能力。但是不再依賴數線進行加減和比較大小是我們課程的最終目標，這是一個漫長的過程，學生會不再利用實體的數線而是在腦中構建自己的數線，到最後只要看到數字就能立刻反應過來。

從學習單中我們可以發現學生其實不必使用數線也能回答問題，只需要他們能理解「負」有「欠」的意思，欠一塊錢與欠兩塊錢明顯是前者資產較多。我們利用不同的方法去幫助學生理解負數的大小關係，當然結果也是令人歡喜的，不論哪種方法都有幫助到學生對觀念的釐清。

第一次課堂學習單中學生對於數的區分與定義仍然不是很清楚，還是很依賴視覺獲得的情報，認為帶有負號的數皆為負數，其餘的都是正數。這明顯是錯誤的，雖然正數的前方不會加上正號，但是 0 也是如此，而 0 並非正數或負數，所以學生常將 0 當成正數。

文獻探討中陳玉芬博士將學生對於負數概念的理解分為五個層次，本研究並不要求所有學生都能達到「識能理解」的層次，本研究探討的是學生是否具備學習負數的潛力，無論學生教學前是甚麼層次「錯誤理解」甚至「無法表達」都沒關係，只要教學後能達到「識能理解」及

「一般理解」即可。這代表著無論是怎樣的學生都能透過教育的方式去習得負數的概念，就結果來看本實驗成功的證明這點。

三、研究結論

將實驗內容整理過後，逐一回答研究問題。

1. 六年級學生是否具備學習負數單元的能力?是否能達到國外同齡學生的水平?

是，台灣六年級學生是能學會負數相關知識，但其中不包括負分數及負小數。多數學生能達成外國課綱之要求，與美國、英國同齡學生水平相當。但是芬蘭的學生在三、四年級便接觸到負數，並能比較負整數大小，至於台灣學生尚未可知，需要未來的研究者繼續探究。

2. 通過質性訪談調查國中上課內容、方式與實驗教學兩者何者對學生學習幫助較大?何種授課方式有助於學生認識負數?

通過訪談得知本國國中普遍使用數線或邏輯推理(比較負數大小部分)來進行負數單元的教學。說明使用數線對於負數的學習有所幫助，文獻表示使用電荷模型對於部分負數題型也有所幫助，但本國卻鮮少有人使用，研究者認為或許將兩種教學模型都納入課程才是正解。部分國中使用「負號後數字越大，該值越小」來做為比較負數大小的依據，但若將負數課程安排在國小階段，研究者認為使用數線教學或設計如：雙色雪花片這種具體的教學活動更能幫助學生學習負數概念，多篇文獻也驗證此說法。

除了在數學課中進行負數的教學外，本國學生在三、四年級的資訊課Scratch 程式中(物件坐標部分)也有接觸到負數，有些學校的無人機課程中(無人機移動方向)也會使用負數，跨領域的結合更能幫助學生了解負

數在生活中的應用，也幫助學生在正式學習負數前對負數概念有一個簡單的認識。

在芬蘭因為該國國小沒有資訊課程而是將資訊議題融入其他課程之中，因此在其他課程中或多或少都能接觸到負數相關知識，該國甚至將負數單元拆分為數線、比較大小(四年級)和負數加減部分(六年級)。那麼台灣是否能效法芬蘭將負數單元分為多個部分，讓學生逐步接觸負數概念並與其他學科做結合？與芬蘭相比將整個單元安排在六年級好像又稍嫌太晚，負數課程如何安排較合適也是後續的研究者要去討論的。

3. 學生在學習負數時遇到的困難是否具普遍性？該如何解決？

在本研究中發現六年級學生在學習負數時在數線繪製及負分數、負小數部分較不易理解，容易出現錯誤。過半學生無法在數線上找出特定負分數及負小數，且無法正確畫出數線三要素，造成這兩者的原因可能有二。首先，本國國小課程沒有針對數線進行說明，學生是靠其餘數學單元逐步加深對數線的認識。其次，和教授討論過後發現「學生有很大的機率在標出正分數及正小數時就出現困難」，非只在負數部分出現瓶頸，這點需其他研究者進行更深入的探討。而解決這個問題的辦法就是額外設計一套內容和數線相關的課程來加強學生的對數線的認識。

第二節 實驗教學的過程與後續

在國中課綱中，負數的教學是透過計算的方式引入。在國小時學生會認為只有大數能減小數，但是其實較小的數字也能減去較大的數字，會得到一個負數。這種探究問題的方式可以應用在特定的情境之中，給出負數的直觀理解。在以下生活情境題中可以直觀感覺出負數所代表的意義，「今天的氣溫比昨天低 10 度 C，昨天的溫度是 5 度 C，請問今天的氣溫是幾度？」。負數在這個情境中給人冷，低，少的印象。生活中有許多相對的量，我們最初只會用符號或數字去表達某一面向，並沒有想到用一個專門的數學符號去表達其反面意義。在負數單元中有一小節是「相對的量」，該如何用符號及數字去表示如：賺錢和賠錢，高於和低於，東方和西方，增加和減少。我們會用「+」和「-」來表示這些代表相反或相對的量。以海拔高度為例，將海平面高度定為海拔 0 公尺，玉山海拔高度為 3952 公尺，我們可以記作+3952 公尺，而台灣海峽最深處有 1773 公尺那我們可以記作-1773 公尺。

在課程中研究者會詢問學生「你們在哪些地方見過負數呢？」，學生會回答：「氣象台，悠遊卡的餘額，美勞老師的記分板，冰箱.....等。」。這些生活中的小細節裡都隱藏著負數，透過學生的生活經驗和同儕分享，學生可能平時沒注意到的細節會在這時被想起，給人一種茅塞頓開的感覺。

現在的課本和研究者就讀小學時已經有很大的不同，以前在各個單元的封面就只會印上單元名稱及小節內容。現在的課本除了精美的插圖外還會附上小漫畫，藉此來吸引學生，漫畫中的內容也和教學課程息息相關。漫畫以素養導向的方式將真實問題與生活情境作連結，讓學生更能了解數學與生活的連結及其實用性，也能提升學生對學習的興趣。在參考英國、美國、澳洲的教科書後，發現每一本教科書都有一個共通點那

就是以溫度計和氣溫為切入點，與自然領域作結合。教科書上寫道「水在攝氏 0 度 C 時會凝固成冰，雪花這時會像扁平。在零下 4 度時，雪花會看起來像針狀，而在 1 度時雪花會開始融化。我們可以在數線上清楚的將那些數字表示出來」。

不論國內外的課程，其安排都是直接跳過唸法直接進入到觀念，教課書上有些會明明白白的在課程單元的部分標上諸如「負數與數線」、「認識負數」……等一眼就能看出帶有「-」數字的正確稱呼。但是也有些教科書卻用模糊的名稱當作小節像是「整數與數線」雖然並無錯誤但是卻有更適合的名稱，因為整個單元的重點均圍繞著負數。

一、後續訪談

研究者在研究對象升上國中並正式學習負數單元後，尋找了 11 位學生做為訪談的對象，希望能了解國中負數教學現場及本次課程對學生升入國中後是否有所幫助，訪談問題參見附錄三。受訪的學生已經分散在桃園及台北的 7 所國中，學生們在小學時的數學成績有高有低，從訪談中看出不同程度的學生其對負數的認識與不同國中的負數教學方法。

其中一位學生就讀於北市某私立國中，該生在國小的數學表現優異，在升入國中的暑假學校有安排暑期課程。在訪談時無法說出「負數是小於 0 的數」，而是以「負數是前方帶有負號的數」回答；分辨負號與減號也是以是否有括號來分辨，對負數和負號的表達仍以最直觀的方式進行，即感官發現的共通點表達。雖然不能說錯，但是以他的程度不應該只有這樣的回答，詢問後得知該校學生實力堅強因此老師上課不會從頭教起，而是在學生都已經學會基礎的前提下進行授課。比較負數大小和進行加減時皆以概念的方式進行，若比較的兩數為一正一負，正者大；若兩者皆負：將負號移除後觀察，數字大者加上負號後越小，反之則越大。而負數的加減，教師則是要求學生背誦口訣並利用口訣解決計算問

題。教師鮮少利用數線進行操作，而相對量的部分老師也是草草帶過(詢問學生是否記得相對量時，學生無法將相對量這個名稱與其概念作連結)，將重點放在絕對值的部分講解。該生表示在小學提前接觸負數單元對於基本的負數知識很有幫助，學習起來有比較輕鬆，但越後面幫助會越來越小。

接下來的兩位學生來自同一所國中，雖然兩者不同班但數學老師為同一人。對於小學接觸的負數課程部分沒有印象，負數的定義、含負數的數線能講出當時的授課方式，但是比大小和加減具體的上課方式已經被遺忘，只記得有教過，而目前他們使用的方式皆國中老師所教。該老師也會使用數線來比較大小及做加減，但是只有在學生學習表現極差的時候才會使用。可見現場教師認為，使用數線進行負數教學對於底子薄弱的學生幫助很大，而普通學生是具備在腦中概念推演的能力，所以不需要每次都大費周章的畫出數線並在上面操作。該數學老師進行加減法的教學時會依不同的情況進行分析。

情況一：負數減正數， $(-3)-5$ ，你已經欠了 3 塊錢又欠了 5 塊錢，現在你有多少錢？

情況二：負數加正數， $(-3)+5$ ，你已經欠了 3 塊錢但賺了 5 塊錢，現在你有多少錢？

情況三：正數減負數，負負得正，變成正數加正數， $5-(-3)$ 變成 $5+3$ 這樣就容易許多。

情況四：負數減負數，負負得正，變成負數加正數， $(-5)-(-3)$ 變成 $(-5)+3$ 為情況二，這樣就容易許多。

情況五：負數加負數， $(-2)+(-3)$ ，你原本欠了兩塊錢，現在又多了一筆 3 塊錢的債務，請問你現在有多少錢？

情況六：正數加負數， $5+(-3)$ ，你有 5 塊錢，但欠別人 3 塊錢，請問還款後你有多少錢？

數學老師用簡單的數字及情境將負數加減的問題教給學生，用此方法可以類推相同的題型，但是加減問題只局限於整數，負分數和負小數的相關課程只有比較大小及數線上的位置。兩位學生皆認為國小接觸負數單元對於升上國中後的課程很有幫助，一位學生說因為研究者授課的方式採數線具體操作比起抽象的思考更適合初學者，另一位學生則表示因為提前接觸的關係後面有比較長的時間去練習，所以有足夠充分的時間去學習。

就讀桃園某國中的學生，對於國小時的課程內容有模糊的印象，但具體的上課過程不太記得，但詢問關於負數的問題都能正確回答，已經具備相關的知識及技能。該生和其餘訪談的學生一樣對於「相對量」這個詞彙感到陌生，但是當研究者講出相對量的例子時學生卻能立刻反應過來，學生指出學校老師只是將這個部份快速帶過。該數學老師的主要上課方式有數線、口訣和觀念是所有受訪學生的老師中最具多樣性的，對於能力不同的學生適合他們的學習方式也不盡相同。該學生稱國小的課程對於國中的負數概念部分，該開始時對於抽象的概念幫助比較大。

另一位在桃園讀書的學生也無法清楚說出國小時研究者上課的細節，但是負數知識相關問題卻都能回答上。當詢問負數的定義時，學生的回答相當有趣「負數是指分出去時會不夠數」和傳統且標準的「比 0 小的數」非常不同，且這個回答也具有一定說法，小學時學習整數、除法等單元時我們也會用實體的物品去進行分法與數數，或許國中教師使用這個說法學生會更了解，但是「負數是指分出去時會不夠數」這個說法不太精確，畢竟 5 個蘋果分給 6 個人也會不夠數，有可能會對概念還很模糊的學生產生誤解。負分數和負小數的部分也只有比較大小和標示數

線，沒有進行加減。老師在進行相對量的教學時也會使用數線進行教學，如「南」「北」是相對的，那麼老師會在數線的兩端標上南和北，學生就能明顯看出正負數和往南走往北走的關聯。該教師還有一個特色，在上課解題的過程中會和學生一起完成計算的算式，學生最後只要計算答案即可，大幅減少學生的上課壓力。

就讀北市某國中體育班的學生，在問及如何判斷 (-3) 和 (-5) 之間的大小時，是這麼回答的「負數越靠近 0 的話值會越大」。負數加減的部分若是負數減正數如： $(-3)-2$ 會把負號提出去變 $-(3+2)$ ，負數加正數 $(-2)+5$ 可以交換位置變成 $5-2$ ，雖然不確定學生是否知道 $5+(-2)$ 才是正確的寫法，因為 (-2) 的「-」是性質符號，而 $5-2$ 的「-」是運算符號，兩數交換位置不會改變「-」的意義，可以寫成 $5-2$ 是因為 $5+(-2)$ 繼續畫減下去得出的結果。複雜的概念運算過程，學生若未能了解可以交換位置的原因就稱不上完全學會負數的計算，只是依樣畫葫蘆而已。該生的數學老師因為各種不可抗力因素在負數單元期間更換了三次，所以接觸了不同的教學方式，比大小和加減計算都有利用數線進行教學，但是唯獨沒有口訣，他認為使用數線會比較容易聽懂上課的內容，並表示國小接觸負數對於國中的課程很有幫助，這次段考平均不及格他卻拿到 84 分的成績。

其餘的幾位學生回答都大同小異，學校都沒有進行負分數負小數的計算，表示提前學習負數單元或多或少對於國中課程有所幫助，但都僅限於基礎的負數課程。透過訪談我們從學生的身上可以清楚的了解到這次研究對於他們的幫助，並期待能利用這個結果對未來的其他研究者做出貢獻。

第三節 建議

歐美國家不使用括號，但他們會將負號用較小的方式寫在數字的左下方，例如： $5+4+8+10+7$ 。對於剛接觸到負數的學生而言後者較為容易上手，在本次實驗教學中，學生對於溫度問題進行列式時，所有的學生在教師沒有提醒的情況下，都沒有使用括號去區分運算符號和性質符號。負數外的括號究竟是不是可有可無這件事，以及括號的使用時機目前眾說紛紜。在台灣就有兩種情況：

- 1.只要有負號就必須用括號將負數括起來。
- 2.若負數放在算式的最前方則不用將它括起來。

討論造成這種情況的原因我們要先回到使用括號的初衷，括號被使用時是為了區分運算符號和性質符號，但是運算符號會出現在數字與數字之間，而非算式的最前方。由此可知若一個算式前方有「-」那麼它就是以性質符號的形式出現，所以我們並不會將其和「-(減號)」混淆，故有些人不會將位於算式前方的第一個負數加上括號。研究者在面對初學者時，對於沒有加上括號的算式應放寬標準予以接受。

在實驗課程中，研究者除了負號的使用時機外，我們也和學生討論正號的使用條件。對於正號的使用，有些書籍一開始便會說明正號可省略，之後就不再深究，而有些書籍卻循序漸進，一開始向學生強調和負號相反意義的符號，之後再慢慢省略。研究者因時間不足的原因，在這次實驗教學中並未過多著眼於正號的重要性，只有稍稍提及

在研究完成後，研究者有向任職於國中的數學老師請教該如何去提升學生的學習效果，教師給出的建議是讓學生有實際操作的機會。該教師建議可以以黑白棋的方式，白棋代表正1，黑棋代表負1。並且每有一組黑棋及白棋就要將其拿出，因為 $1+(-1)=0$ 會互相抵銷。我們想要得知

$(-6)+4$ 等於多少，那麼學生就拿出六個黑棋及四個白棋，發現可以湊成四組黑白棋，將四組棋子拿開之後會剩下兩個黑棋。因此可以得知

$$(-6)+4=(-2)。$$

學生在教學前不會的知識，在教學後就能成功學會，並且在腦中保留約一個月的時間。那我們究竟要使用那些學習技巧才能讓學生留下深刻的印象呢？在研究者的教材中對於印象強化的部分多為拋出幾的生活中的例子去作解釋，再提供案例並讓學生去思考其中緣由。課程中也會講述一些小故事吸引學生的注意力，但是教師認為有更好的辦法能節省學生想像的時間，因為上述的方法都是需要學生自己去想像，且沒有標準的模板有些學生可能會產生誤解，若是採用撥放動畫的方式可以先讓學生馬上進入狀況，有利於之後的講解。

該教師認為學生若只有被動接受資訊，會無法彰顯學習成效，需要給學生消化吸收的時間。雖然研究者在設計課程時已經有安排學生的實務操作及演練，但是對於二十多人的班級來說只讓一兩位學生上台並作講解有點不太夠。雖然上台的人數少有利於研究者維持班級秩序及時間的把控，但若能以五人一組的方式上台同時解題會讓全班都有演練到，研究者能更了解學生的學習狀況。然而這也是有缺點的，五人一組起操作一定會有學生較早完成，有的則較慢，我們就要花費時間在等待上。因為實驗教學的原因也不方便向學校借用太多的上課時間，因此這個策略必然會壓縮到上正課的時間。

和教師討論發現前後測選擇題的部分也有改善的空間，至於如何改善我們稍後再談。我們先思考一份優秀且合適的評量要具備何種特質，評量對於我們想要衡量的內容具備一定程度的敏感度與偵測力，且難度水平適中，這樣才能反映受測學生的能力強弱。

良好的測驗需要具備以下五點。

(一) 良好的效度

對一份測驗而言，測驗的效度越高，則越能夠測量到想要測量到的特質。藉由測驗的信度也可以找出研究者的研究目的。

(二) 良好的信度

信度是效度的必要條件，也是表示測驗一至性及穩定性的一種指標。

(三) 具有客觀性

良好測驗的實施方式不會受到個人主觀因素的影響。

(四) 容易實施且計分方便

測驗時間不宜過長，題數不宜過多。由於學生能集中精神的時間有限，過長的測驗會沒辦法有效的反應出學生的能力。

(五) 具備常模

常模是用來解釋測驗分數的依據，可以將原始分數轉換成各種常模分數，然後再加以檢視，如此可以判斷測驗分數的代表性意義。

這五點中最為重要的是信度和效度，因為這是說服大眾該測驗是能檢測出設計目標且測驗結果是具有可性度的指標。就整體來說這份測驗的信度和效度都是不錯的，前面也有數據佐證。題目的設計必須要有其目的，想要得知或衡量學生的何種能力，要把目標訂出來。但是本測驗的選擇題為了壓縮題數將不同指標的問題(正負數的定義、整數加減、正負數的讀法)以不同選項的方式放入同一題目中。雖然這個方式並不少見，可以在不影響題數多寡的情況下增加考試的範圍，但是就無法更詳細的去診斷學生的問題所在，只能知曉學生是否具備正確回答問題的能力能力。

有時候測驗的目的並非考倒學生，判斷學生優劣，而是找出學生學習薄弱的地方對症下藥，作為之後教學的方針，畢竟教育的初衷是培養學

生成才。如果選擇題的四個選項都是相同觀念的敘述，且故意設置具有誘答力的選項，用來吸引知識不夠完整或僅具備部分知識的學生去選擇，增加試題的鑑別功能。如果想要更進一步去了解學生的選擇還可以將學生依成績分成高低兩組，然後依據高、低組學生在每個選項上選擇做答的次數分配，加以分析判斷。若高、低分組回答錯誤的學生各自傾向選擇某一個選項，則那些選項就是良好的選項，被設計用來引誘學生作出錯誤的選擇，甚至能區分出高分組與低分組，由此可見設計題目也是一門深奧的學問。

下面是協助研究的雅曠老師對負數教案的一些回饋。

負數教案設計回饋

「負數」概念在生活中隨處可見，高年級學生都或多或少接觸過，只是沒有系統化的整理，所以觀念尚是模糊。此教案從家中常見電器-----冰箱的溫度顯示器，理解保存食物有時需要相當低的溫度，帶出負數的印象與概念。再用一般直式溫度計引導出負數與數線的結合，以0為基準，高於溫度0度，即從0往上，數字為正；反之，溫度低於0度，即從0向下數，也就是負數。待學生理解溫度計的認讀後，轉換成數線就能一氣呵成。接著進行數值的討論，整數的正數比大小當然無礙，再延伸了解負數比大小，更進一步學習非整數的負數，如分數、小數的比大小，更形建立負數的概念。然後確切說明「0」在數線上的獨特性，既不是正數也非負數。接著將負數應用推衍至生活其他層面，例如海拔高度與低窪地區的認識，舉玉山與吐魯番窪地為例，讓學生能理解並印象深刻。之後進行簡單的正負數加減法運算，訓練學生的邏輯觀念與計算能力。最後，用「動動腦」小遊戲，讓學生明白，數學解題可能存在迷思，期待做到真正的明白與釐清。整體教案設計循序漸進，深入淺出，能符合高年級學生的先備知識與生活經驗，適時運用口頭與書面進行評

量，確認學生的學習情形，適切給予指導。並經由前後測，顯現學生在這二節課堂中，皆有達成教學目標。此教案能有效協助高年級學生學習負數概念。

負數教學活動回饋

教學簡報配合教案設計，依循教案內容，於重要環節皆安排有文字及圖案輔助教學。例如有冰箱溫度顯示計、一般溫度計、玉山、吐魯番窪地.....等，還有延伸的補充圖片，提升學生學習的興趣，也協助釐清與加深學生的負數概念。負數數線的繪製，將抽象概念具體化，方便學習效率較差的學生以視覺學習。隨堂練習的數字字體夠大而明顯，簡報設計得當。教學者態度穩健從容，熟悉教材內容，能掌握教學節奏。除了用心設計簡報外，還準備有真正的一般溫度計數只，讓學生實際觀察與操作，有效加深學生印象。適時運用學習單，進行形成性評量，也能藉由評量適時給予學生指導與回饋，並統整重要概念。課堂秩序良好，學生樂於學習，配合度高。這二節課，學生不但有效學習到負數概念，也有著愉快的學習經驗，期待也相信學生能帶著這次的美好，在國中較輕鬆的面對更深的負數課程。

雖然這次研究已經得出我國國小六年級學生具備學習負數單元的結論，但經過與教授、老師的討論，我明白這次實驗存在許多需要改進的地方，也因為種種因素沒有將研究做到盡善盡美，有許多議題是需要更深入探討的如：不同教學方法對學習負數的影響、學生學習上遇到的困難有何共同點以及如何去改善.....，在教育領域沒有最好只有更好，因此希望未來的研究者們能在負數方面繼續深究，讓台灣學生能以更有效率的方式學習數學。

參考文獻

- 林保平(2005)。正負數的概念及其加減運算(續)。科學教育月刊，(278)，2-12。
- 林保平(2005)。正負數的概念及其加減運算。科學教育月刊，(277)，10-22。
- 洪萬生(2016)。如何說數學故事?推薦負數史的一個版本。國立台灣師範大學。
- 唐書志(1998)。負數迷思。《HPM 通訊》，1(2)。
- 徐偉民、柯富渝(2014)。臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書幾何教材之比較。教科書研究，7(3)，101-141。
- 國家教育研究院 (2007)。數學領域影音資料:數學史一負數的時光之旅。台北:國家教育研究院。
- 張憲庭(2004)。析論國小分數教學的困境與突破。國教輔導，44(1)，41-45。
- 教育部 (2018)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校—數學領域。教育部。
- 教育部 (2021)。十二年國民基本教育課程綱要。教育部。 取自 <https://www.naer.edu.tw/PageSyllabus?fid=52>
- 郭書春(1995)。中國古代數學。台灣商務。
- 陳玉芬、單維彰(2021)。符號語言學作為數學的教學進路初探-以負數的概念模型譬喻為例。台灣數學教師，42(1)，1-16。
- 陳玉芬、趙子揚、單維彰(2023)。數學識讀文本教學對數學素養之影響-以負數單元為例。台灣數學教育期刊，10(2)，27-54。
- 陳淑娟(2013)。負數史與負數教學中的美感意涵。教育實踐與研究，26(2)，133-160。
- 傅海倫、陳偉(2014)。中國數學史中的正負數及其運算法則。數學教育，36。
- 單維彰(2018)。論知行識作為素養培育的課程架構—以數學為例。台灣教育評論月刊，7(2)，101-106。
- 黃光雄、蔡清田(2015)。課程發展與設計新論。五南書局。
- 楊德清(2016) 台灣、美國、新加坡、大陸與芬蘭國中階段數學教科書內容之比較研究。國立嘉義大學。
- 萬金娟(2023)。負數的初步認識-教學片段與思考。小學數學教育。數學 1 上。康軒文教。
- 數學 1 上。翰林出版。
- Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, 93, 379–397.
- Bruno, A. and Martinon, A. (1999). The teaching of numerical extensions: The case of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30(6), 789–809.

- Chang, C. Y. (2002). Does computer assisted instruction problem-solving improved science outcome? A pioneer study. *The Journal of Educational Research*, 95(3), 143–150.
- Gagatsis, A. (2022). A review of the research in teaching and learning the negative numbers: an “action research” concerning the application of the geometrical model of the number line. *Didattica della matematica Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 11, 9-32.
- Hativa, N. and Cohen, D. (1995). Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems. *Educational Studies in Math*, 28(2), 401–431.
- Hefendehl-Hebeker, L. (1991). Negative numbers: Obstacles in their evolution from intuitive to intellectual constructs. *For the Learning of Mathematics*, 11(1), 26–32.
- Stein, M. K., Remillard, J. and Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 1(1), 319-370.
- Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in ‘negativity’. *Learning and Instruction*, 14, 468–474.
- Zhu Y and Fan L-H (2006). Focus on the Representation of Problem Types in Intended Curriculum: A Comparison of Selected Mathematics Textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4, 609-626.

附錄一 課程學習單(一)

〈負數的認識〉課堂學習單

班級:

姓名:

座號:

練習 1

(1)請問下列數字中，哪些是正數?哪些是負數?

-1, 5, -3.1, $\frac{3}{7}$, 0, 7.7, $-\frac{23}{4}$, -0.001, 0.999, 3.14

正數:

負數:

(2)請問下列何者敘述正確?

(A) +9 的+讀做加

(B) -9 的-通常可以省略

(C) 比 0 小 5 的數是-5

(D) 比 0 大的數稱作負數

答:

練習 2

請在□中填入<, >, =

1. $-9 \square -8$

2. $-10 \square -7$

3. $-5 \square -4.9$

4. $0 \square -0.01$

5. $-0.9 \square -0.99$

練習 3

東方與西方是相對的，以車站為基準點，如果像西走 8 公里可記為-8 公里，那麼請問向東走 6 公里可記為?

練習 4

一汽車工廠，每日預定組裝 100 輛汽車，若某天組裝 106 輛，超過目標 6 輛，可以用___來表示，若另一天組裝 98 輛，差目標兩輛，可用___表示。

附錄二 課程學習單(二)

〈負數的加減〉課堂學習單

班級:

姓名:

座號:

練習 1

請先畫出一條數線並在數線上標出 -10, -7, -4, 0, 2, 4 這六個點。

練習 2

(1) $-2+3=$

(5) $1-5=$

(2) $-4-5=$

(6) $0-8=$

(3) $-1-7=$

(7) $-4-4=$

(4) $-5+3=$

(8) $2-3=$

動動腦

小新、小智和風間去商店買東西，買了一盒 30 元的巧克力，每人決定各出 10 元，但是因為活動促銷巧克力只賣 25 元，小新他們決定把 5 塊錢中的 2 塊錢給服務人員當小費剩下的 3 塊錢每人分回 1 元可以平分，大家也覺得贊成就都同意了。到了晚上，小新卻覺得很奇怪，他說消失了 1 元。

他的理由如下。

三人各出 10 元減去服務生還給他們一人 1 元，等於三人各出 9 元。

所以 $9 \text{ 元} \times 3 \text{ 人}$ 加上給服務生的 2 元

最後是 29 元。

怎麼不是最初的 30 元呢？還有 1 塊錢去哪了呢？

附錄三 質性訪談內容

1. 請問你還記得國小教學時提到「負數」的定義嗎?
請問「負數」的定義是?
請問這個回答是國中老師上課提到的嗎?
2. 請問你還記得「負數」處於數線上的哪個部分嗎?
請問你現在能在數線上標出(-3)嗎?
請問你如何得知(-3)在數線上的位置呢?
3. 請問你還記得課程中提到如何分辨「負」和「減號」嗎?請你讀出下列算式 $(-2)-5=-7$
4. 請問你還記得上課時教過「如何比較負數的大小」嗎?
請問(-3)和(-5)哪一個比較大呢?
請問你是如何比較兩個數字的大小的?
5. 請問你還記得之前教學中提到甚麼是「相對量」嗎?
可以請你說說甚麼是「相對量」嗎?
請你舉出生活中常見的相對量。
6. 請問你還記得課程中是如何進行「正負整數的加減」?
請你計算一下 $(-2)+5$ 等於多少
7. 請問你還記得課堂中提到數可以分成三種嗎?請問是哪三種呢?
8. 請問你還記得課程中老師如何進行教學的嗎?
請問國中老師是如何進行教學的呢?
兩者有何差異?
9. 請問提前學習「正負整數的加減」對於學習國中的「正負分數的加減」有幫助嗎?
你是否使用「正負整數的加減」的計算方法去類推「正負分數的加減」呢?
10. 請問在小學提前接觸負數對你國中的課程有所幫助嗎?
請問具體來說有何幫助呢?
請問跟其他同學相比你有感覺學習負數更加輕鬆嗎?

附錄四 前測測驗卷

〈負數的認識〉自編課程前測問卷

班級：

姓名：

座號：

(1)請畫出一條數線並在上面標示出-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 這九個點。

《進階題》請在(1)的數線上，再標出 $-\frac{3}{4}$ 和 -5.2 這兩個點。

(2)

請在 中填入 > 或 <

1. -1 2

2. -2 1

3. -2 -3

4. -1.2 -1.5

5. $-\frac{3}{2}$ $-\frac{5}{2}$

(3)算一算

1. $2-3=$

2. $-1+5=$

3. $-2-4=$

4. $-3+1=$

5. $-2-2=$

(4)

如果南方與北方是相對的，向北走

10 km 可以記作 + 10 km，請問向南走 7 km 該記作？

答：

(5)請問下列敘述何者錯誤？

(A) +2 讀作正二

(B) $-1-4=-5$

(C) 0 和 4 是正數，-1 和 -3 是負數

(D) 負數是指比 0 小的數

答：

附錄五 後測測驗卷

〈負數的認識〉自編課程後測問卷

班級：

姓名：

座號：

(1)請畫出一條數線並在上面標示出-7, -6, -4, -2, -1, 0, 1, 3, 4 這九個點。

《進階題》請在(1)的數線上，再標出 $-1\frac{2}{3}$ 和 -4.4 這兩個點。

(2)

請在 中填入 > 或 <

1. -1 2

2. -1 1

3. -3 -2

4. -2.1 -2.2

5. $-\frac{3}{2}$ $-\frac{4}{3}$

(3)算一算

1. $1-2=$

2. $-2+3=$

3. $-2-1=$

4. $-4+1=$

5. $-3-2=$

(4)

如果進步與退步是相對的，成績比上

次進步 5 分可以記作 + 5 分，請問退步 7 分該記作？

答：

(5)請問下列敘述何者正確？

(A) -3 讀作減三

(B) $-2-4=2$

(C) 0.1 和 1 是正數，-1 和 -0.1 是負數

(D) 正數是指大於等於 0 的數

答：

附錄六 教學投影片

https://docs.google.com/presentation/d/10nUBk-Cm0x_MRr0W38n6JP9l9XId751m/edit?usp=drive_link&ouid=116943925926459728111&rtpof=true&sd=true

附錄七 教學教案

臺北市大龍國小(研究所論文) 教學活動設計

國民小學數學教案

壹、設計理念

此教案是為了測試小學高年級學生是否能在國小階段知曉何謂負數，進而能比較負數之間的大小以及負數的簡單加減所設計的課程。在課程前後會用測驗的方式來確認學生的學習成效。

貳、教學分析

一、教材分析

本教材參考國外的小學課程設計而成，學生先備知識為對數線有一定認識。

二、學生分析

其實在生活中學生一開始接觸的負數觀念應該是冷凍櫃和溫度計，有從物品上看過負數對其也有一定的了解(可能知道負數相比正數更低或小)但缺乏系統性的整理。

三、教學方法分析

教學重點:首先應讓學生透過生活中有顯示的物品(溫度越低越冷)觀察出負數比正數小。再代入到讀法，透過溫度計上的刻度引導到數線，讓學生知道負數在數線上的位置，並透過數線比較數字大小。

參、教學活動設計

教學領域		數學	教學設計者	黃俊博
單元名稱		認識負數	教學時間	40 分鐘(共兩節)
教材版本		自編	教學準備	PPT
參考資料		康軒七上(整數與數線單元)		
九年	能力指標	N-4-05 能認識負數、相反數、絕對值的意義。 N-4-06 能做正負數的比較與加、減、乘、除計算。		

一貫		N-4-07 能將負數標記在數線上，理解正負數的比較與加、減運算在數線上的對應意義，並能計算數線上兩點的距離。
	分年細目	7-n-04 能認識負數，並能以「正、負」表徵生活中性質相反的量。 7-n-08 能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。
十二年 國教	核心素養	總綱 A1 身心素質與自我精進 A2 系統思考與解決問題 A3 規劃執行與創新應變 B1 符號運用與溝通表達 C2 人際關係與團隊合作
		領域 具體 內涵 數-E-A1 具備喜歡數學、對數學世界好奇、有積極主動的學習態度，並能將數學語言運用於日常生活中。 數-E-A2 具備基本的算術操作能力、並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題 數-E-A3 能觀察出日常生活問題和數學的關聯，並能嘗試與擬訂解決問題的計畫。在解決問題之後，能轉化數學解答於日常生活的應用 數-E-C1 具備從證據討論事情，以及和他人有條理溝通的態度。
	學習重點	學習 表現 n-IV-2 理解負數之意義、符號與在數線上的表示，並熟練其四則運算，且能運用到日常生活的情境解決問題。
		學習 內容 N-7-3 負數與數的四則混合運算（含分數、小數）：使用「正、負」表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算。
	議題融入(可複選、無則免勾選)	☐ 性別平等教育 ☐ 人權教育 ☒ 環境教育 ☒ 海洋教育 ☐ 品德教育 ☐ 生命教育 ☐ 多元文化教育 ☐ 法治教育 ☐ 科技教育 ☐ 資訊教育 ☐ 能源教育 ☐ 安全教育 ☐ 生涯規劃教育 ☐ 防災教育 ☐ 家庭教育 ☐ 閱讀素養 ☐ 戶外教育 ☐ 國際教育 ☐ 原住民族教育
單元教學目標		1. 能理解何謂負數 2. 能知道負數在數線上的位置 3. 能比較負數的大小

具體目標	教學內容	時間	評量	備註
	壹. 引起動機 老師:各位小朋友，有人注意到家裡的冰箱上面是否會顯示一些數字呢?有人知道為什麼有不同的數字呢? 學生答: 因為有不同的冷度 老師:為什麼必須要有不同的冷度呢? 學生答:因為要冰不同的東西 老師:請問你想知道今天的氣溫，該怎麼做呢? 學生答:收看氣象報導 老師:氣象報導中的溫度資料是來自老師手中的溫度計，有沒有人注意到上面有兩排數字，為什麼會這樣呢? 學生答:溫度的不同表示方法 老師:那台灣是用哪一種? 學生答:度C 老師:度C是攝氏的意思，那旁邊的度F有沒有見過呢? 老師:哪個國家是使用度F呢? 學生答:美國 老師:為什麼會這樣呢?(解釋一下) 老師:請問一下現在是攝氏幾度?又是華氏幾度呢?那溫度的互換不在今天的討論範圍內。 老師:如果老師把溫度計放進冰箱請問溫度計會有甚麼變化呢?	6 分鐘	能說出溫度計顯示的溫度即問度隨環境的變化	電腦大屏

	學生答:溫度會變低 老師:為什麼? 學生答:因為冰箱內溫度比較低 老師:回過頭來我們看到照片中螢幕顯示的數字,請問前兩個比較常見溫度分別怎麼讀? 學生:4 度 C, 0 度 C 老師:接下來請你們把這個算式念念看($20-18=2$) 學生:二十減十八等於二 老師:很好這裡讀作減 18, 回來看這怎麼讀?有些人知道這個溫度讀作負 18 度 C 老師:那甚麼時候該唸負甚麼時候該唸減呢?這時候老師要介紹一下性質符號與運算符號。性質符號是指代表了某種特性的符號(有這些符號的數字會有共通點), (PPT 輔助)而運算符號是指在算式中進行運算的符號如:加減乘除 老師:那我們再確認一下到底-18 度 C 是甚麼意思? 學生:比 0 低 18 度 C 老師:那我們看到溫度計比 0 大的數字怎麼讀(1, 2, 3...), 那比 0 小的數字怎麼讀? 學生:(學生自由回答) 老師:我們把這些比 0 小的數叫做負數 老師:除了整數有負數外, 小數分數也有負數, 請問這個(-1.5)怎麼讀, 這個呢(-4/5) 老師:我們剛剛提到有大於 0, 有小於 0 的數字還有一種狀況沒提到有人知道嗎? 學生:等於 0 老師:所以我們可以把數分成三種正數負數和 0, 0 不是正數也不是負數 老師:生活中有那些地方必須用到負數呢?如果想不出來, 老師給你們一點提示玉山很高, 那甚麼很深? 點 3 名學生各說出一個正數一個負數 練習題 1 請問下列數字中, 哪些是正數?哪些是負數?	3 分鐘 5 分鐘 5 分鐘 含講解	能正確讀出算式及數字 能正確判斷哪些是正數哪些是負數	投影機 PPT 學習單 大屏
--	--	---	--	--------------------------------------

	-1 , 5 , -3.1 , $\frac{3}{7}$, 0 , 7.7 , $-\frac{23}{4}$, -0.001 , 0.999 , 3.14 正數: 5 , $\frac{3}{7}$, 7.7 , 0.999 , 3.14 負數: -1 , -3.1 , $-\frac{23}{4}$, -0.001 請問下列何者敘述正確?(C) A $+9$ 的$+$讀做加 B -9 的$-$通常可以省略 C 比 0 小 5 的數是-5 D 比 0 大的數稱作負數 請學生修正 ABD 選項 負數的大小 老師:現在我們嘗試把溫度計這樣擺,就是數學上呈現數字的方式之一,數線。 老師:請你們跟老師一起幫數線標上數字,這裡是 1234,這邊是?$(-1, -2, -3)$ 老師:我們知道 $1, 2, 3, 4$ 越往右邊數字會? 學生:越大 老師:數線越左邊數字會? 學生:越小 老師:請看著數線回答老師 2 和 5 誰比較大呢? 學生:5 老師:請看著數線回答老師 3 和 -2 誰比較大呢? 學生:3 老師:請看著數線回答老師 -4 和 -2 誰比較大呢? 學生:-4 老師:那我們挑戰一下比較高深的題目,請問 2.5 和 3.1 誰比較大? 學生:3.1 老師:那 -1.2 和 -2.3 誰比較大?注意囉這裡和正數正好相反,負號後面的數字越大代表數字越小。 學生:-1.2 比較大 老師:那 $1\frac{2}{7}$ 和 $1\frac{6}{7}$ 誰比較大呢?	5 分鐘	能標出負數在數線上的正確位置	
--	--	------	----------------	--

	學生: $1\frac{6}{7}$ 比較大 老師: 請問 $-1\frac{2}{9}$ 和 $-1\frac{6}{9}$ 誰比較大呢? 在回答老師前先告訴老師 $-1\frac{2}{9}$ 和 $-1\frac{6}{9}$ 介於哪兩個負整數之間? 學生: -1 和 -2 之間 老師: 那我們先把 -1 和 -2 之間分成 9 等分 練習 2 請在 $\square$ 中填入 $<$, $>$, $=$ $-9 \square -8$ $-10 \square -7$ $-5 \square -4.9$ $0 \square -0.01$ $-0.9 \square -0.99$ ANS: $< < < > >$ 相對的量 老師: 前面有提到生活中那些地方必須用負數呈現 老師: 以現在的溫度為基準點, 如果氣溫下降 10 度 C 記作 -10 度 C, 請問如果溫度上升 9 度 C 該如何表示呢? 學生: +9 度 C 練習 3 東方與西方是相對的, 以車站為基準點, 如果像西走 8 公里可記為 -8 公里, 那麼請問向東走可記為? 一汽車工廠, 每日預定組裝 100 輛汽車, 若某天組裝 106 輛, 超過目標 6 輛, 可以用 ____ 來表示, 則另一天組裝 98 輛, 差目標兩輛, 可用 ____ 表示。	5 分鐘	能判斷負數的大小	學習單
		8 分鐘	學生能用正負數表示相對的量	學習單 PPT

	(不夠 2 所以是-2) 總結: 老師:請問-甚麼時候讀做減呢?甚麼時候讀作負呢? 老師:請問我們可以把數分成哪三類呢? 老師:甚麼是正數? 學生:大於 0 的數 老師:甚麼是負數? 學生:小於 0 的數 老師:那 0 是正數還是負數呢? 學生:都不是 ～第一節課結束～ 老師:請問有人知道圖片中的地方是哪裡嗎 學生:玉山  老師:請問玉山主峰有多高呢? 學生:玉山主峰有 3952 公尺 老師:那玉山主峰的高度是怎麼計算出來的呢? 老師:高度就是由一個基準點「向上」垂直測量。而「向下」的垂直測量稱為深度。你覺得這個基準點應該以甚麼為標準? 老師:在地球上,我們計算的是山脈的高度或者海洋的深度,我們就會把海平面當成基準點。 老師:請問玉山主峰比海平面高多少公尺呢? 學生:高 3952 公尺 老師:比海平面高 3952 公尺,我們可以用+3952m 來表示 老師:請問中國和台灣中間是甚麼地方	3 分鐘		黑板 標語
		12 分鐘		大屏

	學生:台灣海峽 老師:台灣海峽最深的地方是 1773 公尺，請問這個深度是怎麼算出來的呢? 學生:從海平面往下算 老師:剛剛說到比海平面高 3952 公尺，我們可以用 +3952m 來表示，那比海平面低 1773m 要怎麼表示呢 學生:-1773m  老師:這是位於中國的吐魯番窪地，窪地是指高度低於海平面的陸地，它的最低點是-154 公尺，為什麼它高度比海平面低卻沒有淹水呢? 老師:因為它深具內陸，四周都是高山，海水淹不進來，也沒有積水成湖。當地溫度非常的高，平常都四五十度，據說西遊記裡的火焰山就是指這個地方。所以不是所有低於海平面的地方都在海裡。 老師:如果在計算海拔高度時基準點是海平面，那我們要在數線上找到任意一個數字，最常使用的基準點應該是甚麼呢? 學生:0(原點) 老師這時候先在黑板上畫出數線請學生一起幫忙 老師:請問如果給你原點，你能在數線上找出 3 的位置嗎?請問你們是怎麼找出來的呢? 學生:0 往右邊數三格 老師:將這個過程寫成算式，可以如何呈現? 學生:$0+3=3$ 老師:如果要在數線上找出比 3 大 2 的數字，我們該怎麼做呢? 學生:從 3 往右移兩格 老師:將這個過程寫成算式是?	10 分鐘	學生能用正負數表示相對的量	PPT
--	--	-------	---------------	-----

學生: $3+2=5$ 老師: 所以我們可以知道比 3 大 2 的數字是 5 老師: 如果要在數線上找出比 3 小 2 的數字, 我們該怎麼作呢? 學生: 從 3 往左移兩格 老師: 請問要找比 0 小 1 的數字算式該怎麼列呢? 答案又是多少呢?(看數線圖) 學生: $0-1=-1$, -1 老師: 那比 -1 小 1 的數字是多少呢? 算式是? 學生: -2, $-1-1=-2$ 練習 1 請先畫出一條數線並標上 $-10, -7, -4, 0, 3, 5$ 這六個點 練習 2 <table><tr><td>(1) $-2+3=1$</td><td>(5) $1-5=-4$</td></tr><tr><td>(2) $-4-5=-9$</td><td>(6) $0-8=-8$</td></tr><tr><td>(3) $-1-7=-8$</td><td>(7) $-4-4=-8$</td></tr><tr><td>(4) $-5+3=-2$</td><td>(8) $2-3=-1$</td></tr></table> 動動腦: <u>小新</u>、<u>小智</u>和<u>風間</u>去商店買東西, 買了一盒 30 元的巧克力, 每人決定各出 10 元, 但是因為活動促銷巧克力只賣 25 元, 小新他們決定把 5 塊錢中的 2 塊錢給服務人員當小費剩下的 3 塊錢每人分回 1 元可以平分, 大家也覺得贊成就都同意了。到了晚上, 小新卻覺得很奇怪, 他說消失了 1 元。 他的理由如下。 三人各出 10 元減去服務生還給他們一人 1 元, 等於三人各出 9 元。 所以 $9 \text{ 元} \times 3 \text{ 人}$ 加上給服務生的 2 元 最後是 29 元。 怎麼不是最初的 30 元呢? 還有 1 塊錢去哪了呢?	(1) $-2+3=1$	(5) $1-5=-4$	(2) $-4-5=-9$	(6) $0-8=-8$	(3) $-1-7=-8$	(7) $-4-4=-8$	(4) $-5+3=-2$	(8) $2-3=-1$	10 分鐘	學生能正確計算簡單的負數加減	學習單
(1) $-2+3=1$	(5) $1-5=-4$										
(2) $-4-5=-9$	(6) $0-8=-8$										
(3) $-1-7=-8$	(7) $-4-4=-8$										
(4) $-5+3=-2$	(8) $2-3=-1$										
	8 分鐘		學習單								

肆、教學評量

具體目標	評量方式	備註
能說出正數負數的定義	考卷評量	
能正確讀出包含負數的算式	口頭測驗及考卷選擇題問答	
能用正負數表達相對的量	考卷評量	
能在數線上標出負數的正確位置	考卷評量	
能正確計算簡單正負數之加減	考卷評量	