

國立中央大學

數學系

碩士論文

德國初中階段的統計教科書研究

The Study of a Statistics Textbook of
Secondary Level for Germany

研究生：康育綺

指導教授：單維彰

中華民國 108 年 6 月



國立中央大學圖書館 碩博士論文電子檔授權書

(104 年 5 月最新修正版)

本授權書授權本人撰寫之碩/博士學位論文全文電子檔(不包含紙本、詳備註 1 說明)，在「國立中央大學圖書館博碩士論文系統」。(以下請擇一勾選)

() 同意 (立即開放)

() 同意 (請於西元 2020 年 7 月 31 日開放)

() 不同意，原因是：_____

在國家圖書館「臺灣博碩士論文知識加值系統」

() 同意 (立即開放)

() 同意 (請於西元 2020 年 7 月 31 日開放)

() 不同意，原因是：_____

以非專屬、無償授權國立中央大學、台灣聯合大學系統圖書館與國家圖書館，基於推動「資源共享、互惠合作」之理念，於回饋社會與學術研究之目的，得不限地域、時間與次數，以紙本、微縮、光碟及其它各種方法將上列論文收錄、重製、與利用，並得將數位化之上列論文與論文電子檔以上載網路方式，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

研究生簽名：康育綺 學號：106221022

論文名稱：德國初中階段的統計教科書研究

指導教授姓名：單維彰

系所：數學 所 博士班 碩士班

填單日期：2019.7.3

備註：

1. 本授權書之授權範圍僅限**電子檔**，紙本論文部分依著作權法第 15 條第 3 款之規定，採推定原則即預設同意圖書館得公開上架閱覽，如您有申請專利或投稿等考量，不同意紙本上架陳列，須另行加填申請書，詳細說明與紙本申請書下載請至本館數位博碩論文網頁。
2. 本授權書請填寫並**親筆**簽名後，裝訂於各紙本論文封面後之次頁（全文電子檔內之授權書簽名，可用電腦打字代替）。
3. 讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印上列論文，應遵守著作權法規定。

國立中央大學暨國家圖書館博碩士學位紙本論文【延後公開】申請書

Application for delayed public release of thesis/dissertation

 申請日期：2019 / 7 / 3
 Application Date (YYYY/MM/DD)

2018.9.1 版

申請人姓名 Applicant	康育綺	畢業年月 Graduation Date (YYYY/MM)	108 / 6
系所名稱 Schools or Departments	數學系碩士班	學位類別 Graduate Degree	<input checked="" type="checkbox"/> 碩士 Master <input type="checkbox"/> 博士 Doctor
論文名稱 Thesis/Dissertation Title	德國初中階段的統計教科書研究		
延後原因 Reason for delay	<input type="checkbox"/> 已申請專利並檢附證明，專利申請案號： Filing for patent registration. Registration number: _____ <input checked="" type="checkbox"/> 準備以上列論文投稿期刊 Submission for publication <input type="checkbox"/> 涉商業機密 Business confidentiality <input type="checkbox"/> 後續研究需要 Follow-up research needed	公開日期 Delayed Until	2020 / 7 / 31 (YYYY / MM / DD) (依教育部來函，延後公開最多5年) (The delay should be a reasonable period of no more than 5 years)

 申請人簽名：康育綺
 Applicant Signature _____

 研究所所長簽名：(可免填 Optional)
 Dean of Graduate School Signature _____

 指導教授簽名：單維新
 Advisor Signature _____

 學校圖書館章戳：(可免填 Optional)
 University Library Seal _____

 系所章戳：
 Schools or Department Seal _____


【說明】

- 以上表格依國家圖書館來函辦理，所有欄位請據實填寫，缺項或簽章不全，恕不受理。
- 本申請書請裝訂於論文電子授權之次頁。
- 依「教育部 100 年 7 月 1 日臺高(二)字第 1000108377 號函文」，延後公開須訂定合理期限，請依實際需求設定延後公開日期，自申請日期起算至多 5 年，若超過 5 年或未填寫延後公開日期，將逕以函定 5 年辦理。

【Notes】

- Please fill in all blanks. The application form will not be accepted for processing until all information, signatures, and stamps are included.
- Please attach this form right after the electronic authorization page when submitting your thesis/dissertation.
- Following the instructions from the Ministry of Education, the delay should be a reasonable period of no more than 5 years. If the applicant fills in a date that creates a period longer than 5 years, the delayed period for public viewing period will be fixed at 5 years.

國立中央大學碩士班研究生

論文指導教授推薦書

數學 學系/研究所 康育綺 研究生所提之論文
德國初中階段的統計教科書研究

係由本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授 單維彰 (簽章)

108 年 6 月 17 日

國立中央大學碩士班研究生
論文口試委員審定書

數學

學系/研究所

康育綺

研究生

所提之論文

德國初中階段的統計教科書研究

經本委員會審議，認定符合碩士資格標準。

學位考試委員會召集人

委

員

皮文良

張立杰

單維彰

中華民國 108 年 6 月 26 日

中文摘要

本研究目的為分析德國 2003 年出版的 Lambacher Schweizer Mathematik (LSM) 教科書。在量化分析方面，利用統計認知分析表、圖表理解分析表將教學例題予以歸類，瞭解德國統計教育著重或涵蓋哪些認知內容。在質性分析方面，瞭解統計相關單元的知識內容、教學活動、題目佈題方式與情境，以獲得德國統計課程編排脈絡的統整了解。

根據量化分析結果，在統計認知的各層次中，德國 LSM 教科書於統計知識佔比最多，而統計推論、統計思考兩層次共佔比 3 成以上，且各子類目皆佔有一定的題數。在圖表理解的各層次中，解讀、繪製圖表相關能力佔較高的比例，但識別以何種圖像表達數據與批判反思能力仍佔 2 成以上。另外，質性分析結果顯示，德國 LSM 統計課程的教學脈絡為六年級學習建構與報讀圖表，七年級分析圖表上的數據；六年級須畫出指定的統計圖，七年級則須自行選擇符合呈現數據特性的統計圖。本研究亦針對題目的內容分析，將教科書中例題分為數學內容、跨領域思維、統計素養相關題型。

為將德國 LMS 教科書的統計課程與臺灣教科書進行比較，本研究引用李健恆與楊凱琳對臺灣國中教科書之內容分析結果(2012)。比對結果顯示，雖然德國的統計課程學習年齡於 11 至 12 歲，較早於臺灣的 14 歲，但是德國於統計認知各層次中皆有一定比例的題目量，而且有與機率、速率與百分比等數學主題或跨領域學科建立統整性連結。

相對而言，國內教科書的統計主題相關內容，大多著重於基本統計知識的了解、公式套用與簡易的統計量計算、圖表的繪製及直接讀取資訊中的數據。我國的教科書應增加屬統計推理與統計思考的教學內容，提高題目情境與生活週遭經驗的連結，以培育具備統計素養的學生。本研究之結果提供國內統計課程設計者參考，並期望對數學教科書中統計單元的設計與編輯有所助益。

關鍵字：德國教科書、統計圖表理解、統計素養、內容分析法

Study of a Statistics Textbook of Secondary Level for Germany

Abstract

The purpose of this study is to analyze the statistics contents in *Lambacher Schweizer Mathematik* (LSM) textbook which was published in Germany in 2003. We classify the topics by using the statistical cognitive analysis table and the graph-chart comprehension analysis table. Therefore, we can use quantitative and qualitative analysis methods to understand what the Germany statistics education focus on. We also investigate how knowledge contents, teaching activities, problem-solving situations of the statistics related units are implemented to integrate the context of the German statistics curriculum.

According to the results of quantitative analysis, the LSM textbook accounts for the largest portion of statistical knowledge among all dimensions of statistical cognition. But the portions of statistical reasoning and statistical thinking still sum up to more than 30%, and each subcategory has a certain number of teaching examples. Among dimensions of graph-chart comprehension, the ability to interpret and graph-chart have higher portions, but of the graphical presentation and critical reflection abilities still account for more than 20%. In addition, the results of the qualitative analysis show that the teaching context of the German statistics curriculum is the construction and comprehension of graph-chart for the sixth grade study, the analysis of the graph-chart for the seventh grade; the statistical graph-chart are designated to the sixth graders, while the seventh graders must choose appropriate graph-charts which suit the purpose. For the content analysis of the topic, the examples in the textbook are categorized into mathematical content, cross discipline thinking, and statistical literacy related questions.

In order to compare textbooks between German and Taiwan on statistical cognition and graph-chart comprehension, we cite the work of Kin-Hang Lei and Kai-Lin Yang (2012). According to the results, although statistics is taught earlier in German (11 and 12 years old) than in Taiwan (14 years old), the proportion of statistical knowledge in the statistical cognition dimension is still higher in Germany. Furthermore, the teaching examples of LSM textbook establish integrated links with mathematical topics such as rate and percentage or cross disciplinary subjects.

On statistics content and statistical topics, most Taiwanese textbooks focus on the understanding of basic statistical knowledge, formula application, simple statistical calculation, graph-chart drawing and direct reading of information in the statistic chart. Therefore the study recommends that textbook editors increase the content of statistical reasoning and statistics thinking. In order to cultivate students with statistical literacy, we should often link problem situation with experience of life.

The results of this study also provide Taiwan statistics course designers as a reference. We also expect to contribute to the design and editing of statistics units in mathematics textbooks.

Keywords: German textbooks, statistical chart comprehension, statistical literacy, content analysis

致謝

時光荏苒、倏忽即逝，轉眼之間兩年的研究所生涯即將邁入尾聲，回首畢業前這半年期間，檢定考試、論文撰寫計畫接續而來，迫使我必須安排好各個時段該做的事情，且在時間內一定要完成規劃中的事項。跌跌撞撞一路走來，感謝在完成學業、完成論文的這段旅程上，所有給予我指導、協助的人。

此篇論文能夠完成絕非憑一己之力，首先感謝我的指導教授單維彰老師，在論文撰寫期間給予教導與建議。即使老師於研究上、教學上的工作繁多，仍會在百忙之中騰出時段與我討論，從老師的身教與言教中，我看到那份對研究的熱誠與態度。在論文口試期間，感謝學習與教學研究所張立杰教授、清華大學應用數學系洪文良教授願意出席擔任我的口試委員，並給予論文上的意見與指正，讓我瞭解文章中哪些部分還可以修正的更完善。

在求學期間，博士班的哲毓學長擔任著研究室的領導者，總是以熱情、活潑的態度渲染著我們，在研究上不吝於給予適時的協助與指點論文撰寫方向，時而督促我於論文或學業上該完成的進度，並包容著我的各種差錯。那些無數個整日待在研究室的時光，因為有研究室同學的陪伴而變得不再索然無味，也因為有他們的歡笑為研究生生活增添了一份色彩。另外，感謝博士班的學姐於研究上的幫忙，忙碌中仍願意撥空擔任題目歸類的評分員。同時感謝大學好友在彼此喪失動力時，互相激勵與支持，在研究的路上共同成長與茁壯。最後，感謝在背後默默關心與體諒我的家人，即便在電話中感受到我疲憊與失落的語氣，仍總是以正向、積極的態度鼓勵著我，並且理解我的課業繁重，無法經常回去探望他們，

感謝科技部計畫的支持，讓我有機會站在不同視野對臺灣教科書提供渺小的見解，希望能在數學教育領域中有微小的貢獻，也期許自己經過研究所這兩年的磨練，日後能夠抱持著積極、上進的態度來面對任何事物。

謹誌

民國 108 年 7 月 1 日

目錄

中文摘要.....	i
致謝.....	iv
目錄.....	v
表次.....	vii
圖次.....	viii
第一章 緒論.....	1
第一節 研究動機與背景.....	1
第二節 研究目的與問題.....	3
第三節 名詞釋義.....	3
第四節 研究範圍與限制.....	4
第二章 文獻探討.....	7
第一節 臺灣與德國統計課程及教材內容.....	7
第二節 認知上的統計學習年齡.....	27
第三節 統計素養的文獻探討.....	28
第四節 統計圖表的理解能力.....	38
第三章 研究方法與實施.....	43
第一節 研究流程.....	43
第二節 研究對象.....	44
第三節 研究工具.....	47
第四節 資料處理及分析.....	58
第四章 資料分析結果.....	65
第一節 德國教科書統計題目分析結果.....	65
第二節 統計教材架構與編寫脈絡.....	71
第三節 題型概念分析.....	81
第四節 分析結果統整.....	100
第五章 結論與建議.....	107
第一節 研究結論.....	107

第二節 建議.....	110
參考文獻.....	112
一、中文部分.....	112
二、英文部分.....	114
附錄 德國學制圖.....	117

表次

表 1	臺灣十二年國教課程綱要數學領域之統計主題階段學習表現與學習內容-----	9
表 2	92 課綱之統計能力指標-----	12
表 3	97 課綱之統計能力指標-----	14
表 4	92 課綱與 97 課綱三版本對照表-----	15
表 5	92 課綱與 97 課綱三版本之相同/相似例題比例表-----	18
表 6	數據、頻率和概率之具體內涵-----	22
表 7	數據與隨機事件之具體內涵-----	24
表 8	德國 LAMBACHER SCHWEIZER MATHEMATIK 數學課本中統計教材的教學內容----	25
表 9	臺灣與德國同年齡統計學習內容之比較表-----	26
表 10	統計素養的定義-----	31
表 11	WATSON 統計素養六層次-----	33
表 12	與統計概念或素養相關之科技部專題計畫-----	35
表 13	與統計概念或素養相關之期刊論文-----	36
表 14	CURCIO 統計圖理解三層次-----	39
表 15	FRIEL 六種圖感能力-----	40
表 16	研究對象之範圍統整表-----	45
表 17	統計認知分析表-----	47
表 18	圖表理解分析表-----	52
表 19	第一組、第二組評分員相互同意值表-----	63
表 20	德國與臺灣教科書之統計認知分析比例表-----	67
表 21	德國與臺灣教科書之統計認知三層次比例分配表-----	68
表 22	德國與臺灣教科書之圖表理解分析比例表-----	70

圖次

圖 1	兄弟姊妹人數統計表	12
圖 2	次數與相對次數表	13
圖 3	次數與相對次數表	13
圖 4	週考成績折線圖	14
圖 5	97/107 年版本丙數學 6 下教科書	17
圖 6	97/107 年版本乙數學 6 下教科書	17
圖 7	德國小學數學教育基本能力圖	21
圖 8	德國初中數學教育基本能力圖	22
圖 9	研究流程圖	46
圖 10	德國 LSM 版統計認知層次比例分配圓形圖	69
圖 11	德國 LSM 版圖表理解分析比例分配圓形圖	70
圖 12	骰子投擲結果紀錄表	72
圖 13	絕對與相對頻率統計表	72
圖 14	性別與居住地關係表	73
圖 15	LAMBACHER SCHWEIZER MATHEMATIK 6 教材架構圖	74
圖 16	測速結果統計圖	75
圖 17	水杯示意圖	76
圖 18	長方形邊長與面積關係圖	76
圖 19	馬鈴薯含量圓形圖	78
圖 20	球員年齡盒狀圖	79
圖 21	小島氣溫盒狀圖	79
圖 22	LAMBACHER SCHWEIZER MATHEMATIK 7 教材架構圖	80
圖 23	骰子出現的相對頻率折線圖	82
圖 24	投擲骰子結果表	82
圖 25	骰子點數和長條圖	83
圖 26	時間與距離關係圖	84
圖 27	速率與時間變化圖	84
圖 28	速率與距離關係圖	85
圖 29	火車行駛距離與時間關係圖	85
圖 30	小鎮用水量折線圖	86
圖 31	關係圖	86
圖 32	手機用戶數折線圖	87
圖 33	樹林面積與時間關係圖	88
圖 34	初級能源消耗長條圖	89
圖 35	各州選票人數圖	89
圖 36	投票率橫長條圖	90

圖 37 歐洲議會席位圓形圖 -----	91
圖 38 溫度結果表 -----	92
圖 39 冰淇淋售價圖 -----	93
圖 40 租用面積橫長條圖 -----	94
圖 41 手機用戶數折線圖 -----	94
圖 42 初級能源長條圖 -----	95
圖 43 汽車示意圖 -----	96
圖 44 交通工具流量表 -----	96
圖 45 食品銷售表 -----	97
圖 46 坡度示意圖 -----	97
圖 47 長條圖 -----	99
圖 48 銷售量長條圖 -----	99
圖 49 搶案數量長條圖 -----	100
圖 50 小熊軟糖含糖量長條圖 -----	100
圖 51 性別與喜歡的動物之關係表 -----	103
圖 52 連續型長條圖 -----	103
圖 53 橫長條圖 -----	104
圖 54 氣溫連續變化圖 -----	104
圖 55 莖葉圖 -----	105

第一章 緒論

本章將分為四節，分別為研究動機與背景、研究目的與問題、名詞釋義及研究範圍與限制。

第一節 研究動機與背景

面對巨量資料的時代來臨，統計數據、統計圖表充斥在我們週遭環境，包括網際網路、新聞媒體、報章雜誌等，隨處可見與統計相關的資訊。為便於整理真實世界中大量的訊息，常須運用統計方法處理與分析數據，並利用整理完的數據資料，預測未來發展的趨勢。

十二年國民教育課綱以核心素養為主要教學導向，其中一項能力為「科技資訊與媒體素養」，強調學生應具備分析、思辨與批判資訊或媒體的能力（教育部，2014）。因應上述核心素養，瞭解統計概念、報讀統計圖表成為現代學生必備且基本的統計素養，具備分析數據與預測未來發展的能力亦日漸重要，因此，任一學習階段的統計課程皆不容忽視。綜觀臺灣中學統計課程，大多注重計算與繪製統計圖的能力，忽略了資料在真實世界中的本質，即透過資料的呈現進行解釋或推論。

檢視臺灣於國際數學與科學教育成就研究 TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) 與國際學生能力評估計畫 (Programme for International Student Assessment, PISA) 的成績表現，根據 TIMSS 2015 臺灣國家成果報告書調查結果顯示，臺灣八年級的學生在「數」、「代數」、「幾何」與「數據與機率」四個學習主題中，以「數據與機率」主題表現最差，低於整體平均得分（張俊彥等人，2018）。另外，PISA 2012 臺灣精簡報告亦指出，臺灣 15 至 16 歲的學生於「數量」、「改變與關係」、「空間與形狀」與「不確定性與資料分析」四個內容領域中，「不確定性與資料分析」測驗的平均分數比整體數學表現平均低 11 分 (549 vs. 560) (臺灣 PISA 國家中心，2014)。

為增強臺灣學生於統計認知上的能力，針對教學教材—教科書進行內容分析，統整研究結論並撰寫建議，提供臺灣教科書對照的範本。根據國內外研究，教科書被視為教學素材的權威（楊德清、鄭婷芸，2015），高達九成以上的教師在教學時偏重於教科書之內容（Mullis, Martin, Gonzalez, & Chrostowski, 2004），在教學情境中相當仰賴教科書，因此間接影響學生在教科書上投入的時間（周祝瑛，1995；柯華葳，1995）。由此可見，數學教科書在教與學中的重要性，早已被數學教育研究者、政策制定者、教科書發展者、以及教學實踐者所肯定（Fan, Zhu, & Miao, 2013）。教科書作為重要的教學媒介之一，要包含哪些內容自然必須關注（張芬芬，2012），因此本研究選擇國外教科書作為分析對象，進行跨國性教科書研究，以瞭解臺灣統計課程編排與教材設計上之差異與工拙。

舉凡跨國性教科書研究，大多以東亞或東南亞國家的教科書進行研究居多，目前臺灣在統計與機率主題只針對大陸、新加坡、美國、芬蘭進行教科書分析，歐洲國家的教科書文本較少成為研究對象，因此將研究取樣縮小範圍至歐洲各國。歐洲人口數最多的國家為德國，加上德國政府提出第四次工業革命，認為未來的工業技術將會以數位電腦化取代，在發展成智慧型工業世界以前，需要收集與分析各種巨量資料，其背後皆由統計資料或數據所組成。為因應未來世界發展，推估德國目前應積極培養學生具備統計相關能力，對照德國數學課程的編排，統計教育安排於初中六、七年級（相當於我國國小五、六年級），統計學習年齡上比臺灣早兩至三年，但在課文與題目的難易程度上並無相對淺顯，反而需要更多統計推論與思考能力進行解題，此部分正是臺灣教科書在統計佈題上較少涉及的層次。

審視德國於國際評量中的表現，2000年PISA的成績不盡理想，促使德國聯邦政府與各邦之間開始採取教育改革措施，希望透過提升學校教育品質，進而增加學生的學習成就（張炳煌，2011）。隨著教育政策的改革，德國於近幾年的PISA成績表現有所進步。根據德國15歲學生於2015年的PISA成績顯示，其數學分數皆高於大部分的歐洲國家與美國，例如：英國、法國、義大利、西班牙、瑞典等國家。

綜合上述，選擇德國作為跨國性教科書研究之對象，並針對統計單元進行分析，瞭

解德國教科書於各統計認知層次之所佔比例，以及學習如何將課文內容與命題方式提升至統計認知較高層次。

第二節 研究目的與問題

本研究希望透過對德國教科書的內容分析，瞭解德國統計課程的教學目標與學習活動，並探究教材架構與學習內容編排的順序，針對教科書例題在統計認知與圖表理解的歸類情形，統整出研究結論與建議，供教科書撰寫者和課程規畫者參考。

根據以上研究目的，針對德國教科書的教材與例題提出下列研究問題：

1. 德國教科書的例題在統計認知的分類上較著重哪些部分？
2. 針對含有統計圖表之例題，在圖表理解的分類上較重視哪些層次？
3. 綜合課文與題目的分析，德國統計課程的編排脈絡為何？
4. 針對題目的內容分析，德國教科書的佈題方式與情境有何特色？

第三節 名詞釋義

本研究採用的分析工具之一為統計認知分析表，其中包含統計知識（素養）、統計推理、統計思考三種面向，以下將分別簡述其定義：

一、 統計知識或素養（Statistical literacy）

Garfield、delMas 與 Chance（2003）提出統計知識的認知面向，將「Literacy」解釋為知識一詞。事實上，「Literacy」亦翻作為「素養」，即一個人讀和寫的能力，與個人對知識的認知與學習能力（McClure, 1994）。本研究延用李健恆、楊凱琳（2012）對統計知識的定義，將「Statistical Literacy」視為統計知識。

統計素養為統計推理與思考的重要基礎，其中包含理解基本統計概念、用語與符號，以及描述研究結果等基本重要技能；組織、建構和呈現數據與圖表，能描述問題結果並與他人交流溝通（Rumsey, 2002）。

二、 統計推理 (Statistical reasoning)

統計推理定義為理解統計資訊且以統計思維進行推論的方法，包括根據數據、圖表的呈現形式或統計摘要進行解釋，其中推理指的是理解並能闡述統計過程與解釋統計結果。統計推理亦可能涉及兩個概念間的連接，或結合數據與機率的想法(Garfield, 2002)。

三、 統計思考 (Statistical thinking)

統計思考為瞭解統計調查的原因和方式，考慮如何使用適當的數據分析方法，例如：該用哪些統計量描述整體數據，與如何視覺化呈現數據。Franklin 等人 (2007) 將統計思考定義為根據對數據的理解、解釋以及處理量化的變化性來解決統計問題與做出決策。

Chance (2002) 則認為統計思考除了能理解問題內容、設計調查以獲得結論，還需認識和瞭解問題形成至解決的過程(問題形成至收集數據、選擇分析方法、測試假設等)，因此，統計思考者面對已解決問題或統計研究的結果時，具備批判與評估能力。另外，統計思考亦包括理解抽樣的本質、從樣本推論至群體的方法，瞭解統計模型如何模擬隨機現象、生成數據以估算機率。由此可知，統計思考超過知識與推理之難度，其重要性不容忽視。

第四節 研究範圍與限制

為瞭解德國教科書統計課程的編排，以及題目於統計認知、圖表理解類目表的層次，選定研究範圍為第六冊、第七冊教科書中與統計相關單元的內容與例題，各單元、小節詳細名稱與所占比例於第三章研究對象詳細說明。德國的小學階段為一至四年級，五到九年級則為初中階段，加上統計部分的學習內容編排至六、七年級，因此選取第六冊、第七冊的教科書為研究對象。

本研究選定之教科書 Lambacher Schweizer Mathematik 為德國初中學校使用率較高的版本，但由於只選擇單一版本教科書，研究對象樣本可能稍顯不足，且研究者本身不

諳於德國社會與文化，在解析題目時可能忽略其背景意義，加上有關德國數學課程綱要的文獻與資料搜尋範圍有限，因此可能無法以完整觀點分析德國的統計教育。

本研究引用李健恆、楊凱琳對國內教科書之分析結果，與德國 Lambacher Schweizer Mathematik 教科書進行簡易比較，由於當時國內教科書為 99 年出版且以 92 課綱為標準進行編寫，現行教科書皆以 97 年課綱進行編撰，此為比較樣本選取上之限制。以下簡述研究限制：

1. 僅以一個版本教科書分析德國統計教育可能有些偏頗。
2. 研究者不熟稔於德國語言與文化，分析題目時可能會以主觀思維進行解讀。
3. 德國數學課程綱要的資料與文獻可能不夠充足。
4. 採用 92 課綱而非現行 97 課綱之教科書進行比較。

第二章 文獻探討

本章將針對研究主題進行相關文獻之探討，在認識德國統計課程教材前，必須先瞭解臺灣的統計教學目標與教科書版本，再探討德國的中等教育制度與統計教學內容，並以統計素養作為主分析。本章共分四節，第一節為臺灣與德國統計課程及教材內容、第二節為認知上的統計學習年齡、第三節針對統計素養之文獻探討進行整理與分析及第四節為統計圖表的理解能力。

第一節 臺灣與德國統計課程及教材內容

本研究目的在於分析德國初中階段的統計課程、教材內容以及歸納統計教學目標。針對臺灣的教材內容，由於教育部尚未出版符合 108 課綱之教科書，本節僅統整臺灣十二年國民基本教育課程綱要數學領域，並針對國民中小學中「數學學習領域」的主要課程目標及統計主題做整理；對於德國統計課程與教材內容，整理德國 Lambacher Schweizer Mathematik 版數學教科書中的統計教材內容，作為理解德國統計課程發展之脈絡。最後，根據上述統整資料，提出結論並做總結。

一、十二年國民基本教育課程綱要之統計教學目標

十二年國民基本教育課程綱要將於 108 年逐年實施，臺灣目前教材尚未依照該課程綱要進行編排。十二年國民基本教育課程綱要的基本理念為數學是一種自然語言、亦是一種實用科學，更是一種人文素養，數學也應提供每位學生有感的學習機會，以及培養學生正確使用工具的素養（教育部，2018）。因應目前充滿統計數據、不確定性資訊的時代特性，上述能力更顯重要。

現行的十二年國民教育課程綱要依據學生的學習表現與學習內容，將學習重點分為五個階段：第一學習階段為國小一至二年級，第二學習階段為國小三至四年級，第三學習階段為國小五至六年級，第四學習階段為國中一至三年級，第五學習階段為普通高中一至三年級。將學習內容分為數與量 (N)、空間與形狀 (S)、坐標幾何 (G)、關係 (R)、代數 (A)、函數 (F)、資料與不確定性 (D) 六大主題，並就六大主題條列數學領域能

力指標，再依階段與年級條列能力指標及其細目（教育部，2018）。

以下分別敘述六個階段的統計學習目標：

（一） 國民小學一至二年級：

藉由分類的操作活動，協助學生進行資料的蒐集與建立分類的概念，並對資料做簡單的報讀、呈現與說明。再針對分類的模式，觀察得知同一組資料可有不同的分類方式，以及討論分類之中是否還可以再進行分類。

（二） 國民小學三至四年級：

學習如何報讀、說明與製作生活中會出現的一維及二維表格、長條圖與折線圖，並配合其他課程領域，學習報讀與製作長條圖。

（三） 國民小學五至六年級：

學習報讀、說明與製作生活中會出現的折線圖與圓形圖，且分辨不同統計圖的使用時機，並根據資料或圖表所呈現的數據，作簡單的推論與解決含有「可能性」的問題。

（四） 國民中學七至九年級：

• 七年級：

將生活中常見的數據資料整理並繪製成直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表等統計圖表。在統計數據的部分上，運用平均數、中位數與眾數等簡單的統計量對資料進行分析，以及描述資料的特性。

• 八年級：

學習處理統計資料，將原始資料整理成累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖等統計圖。

• 九年級：

以全距、四分位距、盒狀圖等統計量來表達統計數據的分布與數據的集中程度，並用平均數、中位數、眾數等統計量代表整體數據。

因本研究僅針對統計課程做比較分析，因此有關機率課程部分之綱要則不列入說明。以下根據十二年國民基本教育課程綱要，分別條列各年級於資料與

不確定性的學習表現與學習內容 (表 1):

表 1

臺灣十二年國教課程綱要數學領域之統計主題階段學習表現與學習內容

年級	學習表現	學習內容
一年級		以操作活動為主。能蒐集、分類、記錄、呈現日常生活物品，報讀、說明已處理好之分類。觀察
二年級	認識分類的模式，能主動蒐集資料、分類，並做簡單的呈現與說明。	分類的模式，知道同一組資料可有不同的分類方式。
三年級		以操作活動為主。能蒐集、分類、記錄、呈現資料、生活物件或幾何形體。討論分類之中還可以再分類的情況。
四年級	報讀與製作一維表格、二維表格與長條圖，報讀折線圖，並據以做簡單推論。	以操作活動為主。報讀、說明與製作生活中的表格。二維表格含列聯表。報讀長條圖與折線圖以及製作長條圖：報讀與說明生活中的長條圖與折線圖。配合其他領域課程，學習製作長條圖。
五年級	報讀圓形圖，製作折線圖與圓形圖，並據以做簡單推論。	製作折線圖：製作生活中的折線圖。圓形圖：報讀、說明與製作生活中的圓形圖。包含以百分率分配之圓形圖（製作時應提供學生已分成百格的圓形圖。
六年級	能從資料或圖表的資料數據，解決關於「可能性」的簡單問題。	解題：可能性。從統計圖表資料，回答可能性問題。機率前置經驗。「很有可能」、「很不可能」、「A比B可能」。

(續下頁)

<p>七年級</p>	<p>理解常用統計圖表，並能運用簡單統計量分析</p>	<p>統計圖表：蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖表：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。</p>
	<p>資料的特性及使用統計軟體的資訊表徵，與人溝通。</p>	<p>統計數據：用平均數、中位數與眾數描述一組資料的特性；使用計算機的「M+」或「Σ」鍵計算平均數。</p>
<p>八年級</p>		<p>統計資料處理：累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖。</p>
<p>九年級</p>		<p>統計數據的分布：全距；四分位距；盒狀圖。</p>
<p>十年級</p>	<p>能判斷分析數據的時機，能選用適當的統計量作為描述數據的參數，理解數據分析可能產生的例外，並能處理例外。</p>	<p>數據分析：一維數據的平均數、標準差。二維數據的散布圖，最適直線與相關係數，數據的標準化。</p>
<p>十二年級- 數甲</p>	<p>認識隨機變數，理解其分布概念，理解其參數的意義與算法，並能用</p>	<p>離散型隨機變數：期望值、變異數與標準差，獨立性，伯努力試驗與重複試驗。 二項分布與幾何分布：二項分布與幾何分布的性質與參數。</p>
<p>十二年級- 數乙</p>	<p>以推論和解決問題。</p>	<p>離散型隨機變數：期望值、變異數與標準差，獨立性，伯努力試驗與重複試驗。 二項分布：二項分布的性質與參數。</p>

資料來源：十二年國民基本教育課程綱要-數學領域（2018）

二、臺灣教科書版本簡介

(一) 臺灣教科書版本

本研究於第四章「資料分析結果」中，將會引用李健恆與楊凱琳（2012）對臺灣國中教科書的分析結果，由於其研究過程中未說明版本來源，加上本研究以分析德國 Lambacher Schweizer Mathematik 數學教科書為主，故只對臺灣教科書出版社進行簡單介紹與文獻探討。

臺灣自 1989 年起開放教科書的編印權限，至 1992 年全面開放中小學的教科書，揭開了教科書民營化的序幕，各個出版社開始積極於出版國小、國高中教科書，至今國內教科書出版社僅剩翰林、南一、康軒三大出版社。

翰林出版社創立於 1959 年，初期以出版小說、閱讀書籍為主，至 1991 年藝能教科書審定本開放，即開始踏入教科書出版領域，如今跨足國小、國高中的教科書出版領域（翰林版網路，2018）；南一出版社於民國 1953 年成立，從 1996 年至 1999 年政府開放國民小學與高中審定本教科書，開始研發國民小學與高中的教科書，隨著九年一貫課程改革開放，南一出版社成為當年國內唯一一間十二年一貫的教育出版公司（南一版網路，2018）；康軒文教事業成立於 1988 年，為國內第一家中、小學教科書出版的企業，前身為康和出版有限公司，經營至今成為國小至高中各年級選用的教科書出版社（康軒版網路，2018）。

臺灣初中階段學習「數據與不確性」的內容僅在國三下學期，因此採用第六冊教科書作為分析結果之比較對象。李健恆與楊凱琳（2012）選用的教科書於 99 年出版並以九年一貫數學學習領域課程綱要（92 課綱）（教育部，2003）的標準進行編排，下方列出九年一貫的數學課程綱要（表 2），並提供以九年一貫課程為標準編排的課本例題。

表 2

92 課綱之統計能力指標

編號	能力指標
D-1-01	能將資料做分類與整理，並說明其理由。
D-1-02	能報讀生活中常見的直接對應（一維）表格。
D-1-03	能報讀生活中常見的交叉對應（二維）表格。
D-2-01	能認識生活中資料的統計圖。
D-2-02	能報讀較複雜的長條圖。
D-2-03	能整理生活中的資料，並製成長條圖。
D-2-04	能整理有序資料，並繪製成折線圖。
D-3-01	能整理生活中的資料，並製成圓形圖。
D-4-01	能報讀百分位數，並認識個體在群體中相對地位的情形。
D-4-02	能利用統計量，例如：平均數、中位數及眾數等，來認識資料集中的位置。
D-4-03	能利用統計量，例如：全距、四分位距等，來認識資料分散的情形。

資料來源：國民中小學九年一貫 92 年課程綱要數學學習領域（2003）

以下提供部編版 99 學年度課本中的例題，如圖 1 呈現班上同學的兄弟姊妹數目，該題要求學生根據原始蒐集資料，整理並製出包含次數與相對次數表的一維表格(圖 2)，簡單將資料做分類與整理。在解題步驟上，學生須先將原始表格數據做排序與計次，整理出班上同學兄弟姊妹的個數與相對應的人數，再計算出相對次數，即以不同表格形式（次數表、相對次數表等）呈現數據，故可歸類於能力指標中的「能將資料做分類與整理」，同時亦屬統計知識中表格轉換的類目。

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
兄弟姊妹數(人)	2	1	1	2	0	3	1	0	1	2	0	0	1	1	2

圖 1 兄弟姊妹人數統計表

資料來源：部編版數學課本第六冊（頁：5），2010。國家教育研究院。

資料值(人)	0	1	2	3
次數(人)	4	6	4	1
相對次數	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

資料數 = 15

圖 2 次數與相對次數表

資料來源：部編版數學課本第六冊（頁：5），2010。國家教育研究院。

另一例題提供班上同學閱讀資料（本）的次數與相對次數表（圖 3），以求該資料的眾數、中位數與平均數。此題目讓學生瞭解可以利用眾數、中位數與平均數這三種統計量來代表此資料的特性，亦可透過此三項統計量大致瞭解資料分布的情形，因此符合能力指標中的「能利用平均數、中位數與眾數等統計量來瞭解資料集中情形」。

資料值(本)	0	1	2	4	7
次數(人)	3	4	6	1	1
相對次數	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

資料數 = 15

圖 3 次數與相對次數表

資料來源：部編版數學課本第六冊（頁：8），2010。國家教育研究院。

針對含有統計圖表的例題，另一題目呈現兩人八次週考的成績折線圖（圖 4），根據圖中的數據判斷兩人每次的週考成績相差最多（最少）有無達到 60 分，以及兩人八次週考的平均成績是否有超過 60 分。此題透過折線圖的分布找出兩人相差對多的成績，並觀察折線圖分布情形與合格成績的關係，可以發現臺灣教科書對於統計圖表的題目要求僅限於報讀或解讀圖表，即直接讀取圖表上的數據，以及依據圖表提供的資訊作簡單的運算，並未針對折線圖的發展趨勢進行預測。

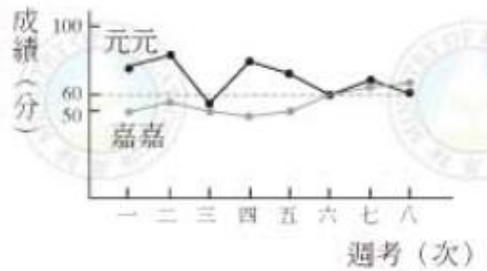


圖 4 週考成績折線圖

資料來源：部編版數學課本第六冊（頁：16），2010。國家教育研究院。

由於現今的初中教科書以 97 課綱為標準進行編排與設計，因此下方（表 3）列出 97 課綱數學課綱中的統計能力指標。可以發現 97 課綱中提及的報讀表格包含了一維與二維表格，並以百分位數加上中位數與四分位數表示資料在群體中的相對位置。而與 92 課綱共同的部分為整理生活中的資料，並繪製並報讀成長條圖、折線圖與圓形圖；利用平均數、中位數與眾數等統計量代表資料集中的位置；利用全距、四分位距等統計量，來認識資料分散的情形。

表 3

97 課綱之統計能力指標

編號	能力指標
D-1-01	能將資料做分類與整理，並說明其理由。
D-2-01	能報讀生活中常見的表格。
D-2-02	能認識並報讀生活中的長條圖、折線圖。
D-3-01	能整理生活中的資料，並製成長條圖、折線圖或圓形圖。
D-4-01	能利用統計量，例如：平均數、中位數及眾數等，來認識資料集中的位置。
D-4-02	能利用統計量，例如：全距、四分位距等，來認識資料分散的情形。
D-4-03	能以中位數、四分位數、百分位數，來認識資料在群體中的相對位置。

資料來源：國民中小學九年一貫 97 年課程綱要數學學習領域（2008）

(二) 92 課綱與 97 課綱版本對照

本研究欲將德國 Lambacher Schweizer Mathematik 教科書與臺灣教科書進行簡易比較，因此採用李健恆、楊凱琳對國內教科書的分析結果，但該版教科書為 2010 年出版且以 92 課綱為標準進行編排。目前市面上的教科書是以 97 課綱進行編排，為避免教科書出版年份選用之疑慮，研究者統整出以 92 課綱與 97 課綱為標準的版本甲、版本乙及版本丙教科書（表 4），分別統計各版本之章、小節數與頁數。

根據版本甲 92 課綱與 97 課綱之教科書於小節數上的比例，皆為 29%，但有關統計教材的比重以 92 課綱之教科書較高，統計單元的頁數占總頁數比例高過 97 課綱；而版本乙無論在小節數或頁數上，92 課綱的統計內容的比例皆高於 97 課綱的教科書；版本丙兩個課綱之教科書於小節數、頁數上的比例較接近，其中頁數只相差兩個百分點。

表 4

92 課綱與 97 課綱三版本對照表

版本	課綱	章	小節	小節數 (比例)	頁數 (比例)	
版本甲	98 年出版 (92 課綱)	第二章 敘述統計	2-1 資料整理與 統計圖表	2/7 (29%)	30/136 (22%)	
			2-2 統計量		27/136 (20%)	
		107 年出版 (97 課綱)	第三章 統計與機率	3-1 資料整理與 統計圖表	2/7 (29%)	29/178 (16%)
				3-2 資料的分析		33/178 (19%)
版本乙	97 年出版 (92 課綱)	第二章 資料的整理與 分析	2-1 次數分配表 圖	4/8 (50%)	24/140 (17%) (續下頁)	

		2-2 算術平均 數、中位數與眾 數		10/140 (7%)
		2-3 百分位數		12/140 (9%)
		2-4 全距、四分 位距與盒狀圖		17/140 (12%)
106 年出版 (97 課綱)	第三章 統計與機率	3-1 統計表圖與 資料的分析	2/8	30/158 (19%)
		3-2 百分位數、 四分位數與盒狀 圖	(25%)	22/158 (14%)
97 年出版 (92 課綱)	第二章 資料的整理與 分析	2-1 次數分配表 與資料展示		20/137 (15%)
		2-2 算術平均 數、中位數與眾 數	3/7 (25%)	12/137 (9%)
版本丙		2-3 百分位數、 四分位數與盒狀 圖		16/137 (12%)
107 年出版 (97 課綱)	第三章 統計與機率	3-1 次數分配與 資料展示	2/8 (25%)	21/172 (12%)
		3-2 資料的分析		37/172 (22%)

根據教科書的題目內容，本小節列出不同課綱下三個版本佈題完全一樣之例題、相似但概念相同之例題（表 5），如下。

圖 5 為版本丙 97 年、106 年出版教科書之相同例題，此題無論題幹文字鋪成、學生回答此題所需的統計概念與解題步驟完皆全相同，成績分布皆從 50 至 100 分且每組成績所含人數完全相同，皆須建製包含組中點之次數分配表。

成績(分)	次數(人)	組中點	次數×組中點
50~60	6		
60~70	8		
70~80	10		
80~90	12		
90~100	4		
合計	40		

成績(分)	組中點(分)	次數(人)	組中點×次數(分)
50~60		6	
60~70		8	
70~80		10	
80~90		12	
90~100		4	
合計		40	

圖 5 97/107 年版本丙數學 6 下教科書

版本乙 97 年、107 年出版教科書之相似例題如下圖（圖 6），97 年版之教科書的例題提供衣服型號的統計數量，並要求學生根據表格數據求出眾數；107 年版的例題則提供球鞋尺寸統計人數，即使兩版本的題幹敘述不一樣，但欲測試的統計概念完全相同，皆是直接讀出表格數據以得到眾數。

型號	S	M	L	XL	XXL
數量(件)	4	8	15	10	3

尺寸(號)	7.5	8	8.5	9	9.5	10
次數(人)	1	5	5	4	2	3

圖 6 97/107 年版本乙數學 6 下教科書

根據上述相同與相似例題判斷標準，分別列出兩個課綱下三個版本相同與相似之例題，題目來源為教學例題、隨堂練習。版本甲 98 出版之教科書有 7 成以上的教學例題、隨堂測驗與 107 年版教科書重複或相似；版本乙 97 年出版之教科書，其中教學例題 17 題中有 13 題與 106 年版相似，在隨堂練習的部分，97 年版的教科書中 27 題竟有 20 題與 106 年版重複或類似，題目重複率高達 7 成以上；版本丙於 97 年版的教學例題與隨

堂測驗中重複率亦偏高，教學例題共 16 題就有 12 題與 107 年版之教科書相似。

綜合上述，採用以 92 課綱或 97 課綱為標準之教科書，作為與德國教科書之比較對象差異不大，因此選擇 99 年出版 92 課綱之臺灣教科書，以其於統計認知、圖表理解分析表之結果與德國教科書進行對照。

表 5

92 課綱與 97 課綱三版本之相同/相似例題比例表

92 課綱版本	教學例題	隨堂測驗
版本甲	12/16 (75%)	20/25 (80%)
版本乙	13/17 (72%)	20/27 (74%)
版本丙	12/16 (75%)	14/23 (61%)

三、德國中等學校教育制度

(一) 德國中等學校教育制度

德國為聯邦制國家，故教育制度由各邦自行決定。其中由「各邦文教部長常設會議(Die staendige Konferenz der Kultursminister der Laender, 簡稱為 KMK)」及各邦聯合組成的各種研究委員會進行規劃及協調。各邦文教部長常設會議(KMK)於 1949 年成立，負責協調各邦教育措施，以及策劃各邦及全國教育之發展(余曉雯, 2006)。

德國的教育體制歷經多次改革，於 1955 年將中等學校分為主幹學校(Hauptschule)、實科中學(ReaLSMchule)、文理中學和高級中學(Studienschule)，其中小學學制被稱為「分歧型」(fork system)學制；1959 年確立「一本三枝」的中小學架構，其中「一本」指的是基礎學校(Grundschule)與定向階段，「三枝」即為主幹中學、實科中學和文理中學(丁志權, 2016)。1964 年通過的漢堡協定(Hamburger Abkommen)制定出第一至第四學年為學習共同階段，第五及第六學年為觀察階段，因此德國的學生於五年級即進入中

等學校就讀；1970 年開始提倡綜合中學，並把中等教育的前 2 年訂為「定向階段」(Orientierungsstufe)，其目的在於補救德國學童過早分流的缺失（梁福鎮，2009）。在此階段須同時觀察學生並協助其決定未來的升學方向，因此德國中等教育前兩年的學習內容成為日後學生試探與分化的關鍵。

綜觀德國目前學制架構（詳見附錄），中學採「4-6-2 制」，意即小學 4 年、初中 6 年、高中 2 年，中學修業期間共 12 年。其中等教育又可分為兩階段，經過初等教育結束後，從第五年級至第九或第十年級為「第一階段」。此階段的學校類型有主幹中學（Hauptschule）、實科中學（Realschule）、文理中學（Gymnasium）、綜合中學（Gesamtschule）和多元進路學校（Schularten mit mehreren Bildungsgängen）。其中文理中學主要目的在深化學生的普通教育，且為大學升學做準備，該校學生通過高中畢業會考（Abitur）後可繼續就讀大學；實科中學的教育目標是「廣泛的一般教育」，主要培養中級技術員的學生，畢業生拿到證書者可進入專門高級學校（Fachoberschule）、職業專門學校（Berufsfachschule），亦可進入文理中學就讀（陳惠邦，1997）；主幹學校的教育目標則是「基礎性的一般教育」，學生以職業訓練體系為主要出路（謝斐敦、張源泉，2012），該校學習的課程內容大多為職業教育，學生畢業後即進入製造廠工作，日後能進入高等教育的機會較少；為彌補德國學生基礎學校畢業後即開始分流的弊病，前三項中學整合成綜合中學，主幹中學與實科中學合併為多元進路學校（張炳煌，2011），提供家長與學生更多入學選擇機會。「第二階段」從第十一至第十二或十三年級，在此階段的學生畢業後必須通過高中畢業會考（Abitur），才可進入高等學校就讀（詹紹威，2012）。

（二） 德國教科書審查流程

德國憲法規定各邦擁有獨立的行政自主權，其中等學校的課程標準由各邦教育廳制定，各邦依據自己所訂定之法規，檢視各校是否均達到符合該年級的教育目標與教學內容，因此無論教學範圍、進度以及校用教科書，各邦之間均

有所差異。為避免各邦制定出的課程標準差異過大，教師、專家學者與廳有關官員組成「課程標準編訂委員會」，根據各邦文化廳長常設會議所訂定的標準或各邦之間的協商結果來擬定（丁志權，2016）。

各邦公布教學綱要後，出版商即可依據教學綱要與教學標準編撰教科書。教學綱要包含各學科的教學目標與教學內容等；教學標準則說明各學科總目標以及各年級之學習內容（巖翼長，1989）。

而德國中等學校的教科書均採認可制，由資優教師、校長、教師中心代表及大學教授組成「教科書選擇委員會」，負責選擇教科書相關工作。在各邦公布課程標準後，私人或書商即根據課程標準進行編寫與出版，接著經過各邦教育廳的選擇，公布教科書認可名單，各校再依教師認可名單選擇欲使用的教科書（梁福鎮，2009），最後由校長選出適用教科書（張筱雲，2002）。

四、德國統計課程教學目標

研究者於「各邦文教部長常設會議（KMK）」網站中搜尋到德國中小學的數學教育標準，以下分別敘述中小學數學基本能力，並針對統計相關之學習內容加以說明：

（一）德國小學數學教育標準（Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich）

德國在小學的數學教育中提倡五個基本能力（圖7），下方分別陳述各能力之具體內涵。

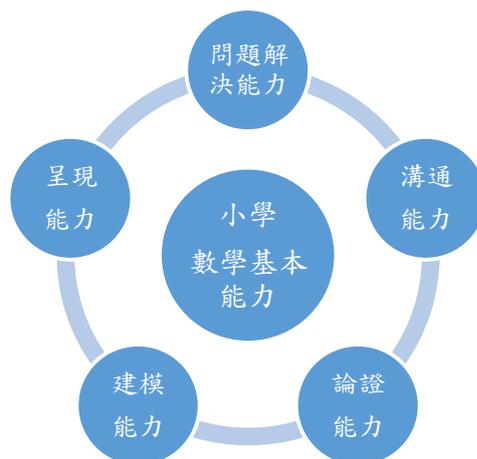


圖 7 德國小學數學教育基本能力圖

問題解決能力 (Problemlösen)：

- 應用數學知識、技巧與能力解決問題
- 發展並利用問題解決策略
- 具備問題辨認能力並找出其相關性，類化至相似問題情境

溝通能力 (Kommunizieren)：

- 描述自己的問題解決過程，並瞭解、反思他人的解決方法
- 正確使用數學術語與符號
- 與他人約定、遵守並共同完成任務

論證能力 (Argumentieren)：

- 對數學陳述進行批判思考，並驗證其正確性
- 辨認出數學問題的關聯性，並提出假設
- 尋找問題解決方法，並瞭解其原因

建模能力 (Modellieren)：

- 在事實文本中找到與現實生活相關的描述
- 將生活上待解決之問題利用數學語言或符號呈現，找出解決方法並與初始情況產生連結
- 將問題轉換為數學語言、方程式或利用圖形表示之

陳述表徵能力 (Darstellen)：

- 設計、選擇與使用合適的表徵以解決數學問題
- 轉換表徵符號
- 比較與評估表徵符號

德國小學的數學學習內容共分為五大類，分別為：數字運算 (Zahlen und Operationen)、空間與形狀 (Raum und Form)、模式與結構 (Muster und Strukturen)、大小與測量 (Größen und Messen)、數據、頻率和概率 (Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit)。其中「數據、頻率和概率」的具體內涵如下表 6 呈現：

表 6
數據、頻率和概率之具體內涵

學習內容	具體內涵
蒐集並呈現數據	蒐集數據並以表格形式建構與呈現
	從表格、統計圖中讀取相關訊息

(二) 德國初中數學教育標準

德國在初中的數學教育中延續小學提倡的五個基本能力，加深各項能力之標準，並多增加「處理正規的數學符號」的能力，詳見圖 8。

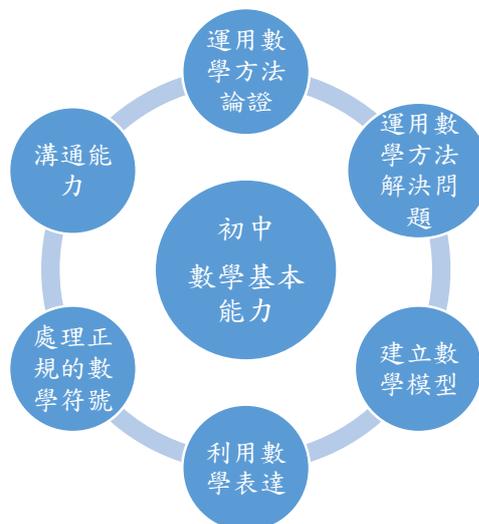


圖 8 德國初中數學教育基本能力圖

以下列出中學各基本能力之詳細說明：

運用數學方法論證 (Mathematisch argumentieren)：

- 提出具有數學特性的問題，並給予合理的假設
- 提出數學論證，例如：解釋、原因、證明
- 描述並證明解決方法的合理性

運用數學方法解決問題 (Probleme mathematisch lösen)：

- 釐清給定的或自己形成的問題
- 選擇並應用合適的工具、策略或原則以解決問題
- 檢查結果的合理性，並對解決方法提出反思

數學模型 (Mathematisch modellieren)：

- 將要建模的範圍或情況轉換為數學語言、結構或關係
- 處理特定的數學模型
- 在特定的範圍或情況下解釋和測試結果

使用數學表徵 (Mathematische Darstellungen verwenden)：

- 應用、解釋和區分不同表現形式的數學符號與情境
- 認識不同表現形式間的關聯
- 根據不同情況、目的選擇不同形式的表現方式，並能夠互相轉換

處理正規的數學符號 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen)：

- 處理數學符號、語言、方程式、函數、圖表
- 將符號與形式語言轉換成自然語言，反之亦然
- 執行解決方法並控制過程
- 合理並有效的使用數學工具，包括：公式、計算機、電腦軟體

溝通 (Kommunizieren)：

- 使用合適的媒體以呈現適當的解決方法與結果
- 使用適合目標的術語
- 理解並審視他人的言論或數學文本的內容

德國中學的數學學習內容分為五大類，分別為：數(Zahl)、測量(Messen)、空間和形狀(Raum und Form)、函數關係(Funktionaler Zusammenhang)、數據與隨機事件(Daten und Zufall)。表 7 詳細說明「數據與隨機事件」的具體內涵：

表 7
數據與隨機事件之具體內涵

學習內容	具體內涵
數據與隨機事件	根據統計調查的圖表進行計算
	自行設計統計調查
	有系統地蒐集數據，使用適當的工具（例如：電腦軟體）
	將其記錄在表格中並繪製出統計圖
	使用參數（metrics）解釋數據
	根據數據的分析提出想法與評估
	計算和解釋頻率值與平均值

(三) 德國「Lambacher Schweizer Mathematik」數學教科書

由於研究者不諳德文，無法進一步取得各階段的統計學習表現，因此本研究依 Lambacher Schweizer Mathematik 版教科書的內容與編排，大致推測德國統計教育在六至七年級的設計脈絡，以下呈現研究者統整之內容：

六年級：

- 蒐集資料加以分類，並製作一維表格、二維表格、長條圖、圓形圖

- 瞭解繪製統計圖的錯誤觀念
- 認識統計用語—離婚率、漲跌率、選票率
- 讀取統計圖上的數據並製成表格

七年級：

- 分析圖表上的數據
- 選擇蒐集數據的方式、選擇合適的統計圖表達數據
- 認識統計數據的迷錯誤概念
- 認識並繪製莖葉圖
- 認識統計用語—平均坡度、平均速率
- 認識算術平均數、中位數、全距、四分位距、盒狀圖

另外，列出六年級、七年級各課本內容之編排，章下面分為小節，六年級共有 8 章 45 節，七年級則有 8 章 37 節，由於本研究針對教科書中的統計單元進行分析，故僅列出有關統計主題之教學內容，詳見表 8：

表 8

德國 Lambacher Schweizer Mathematik 數學課本中統計教材的教學內容

年級	章	小節
六年級	II 相對頻率	2 收集與評估數據
	VIII 百分比計算和圖表	5 錯誤的百分比和圖表
		6 表示變量之間的關係
七年級	VI 數據、圖表和百分比計算	1 分析圖表上的數據
		2 算術平均數
		3 百分比計算的基本公式

根據德國各邦文教部長常設會議 (KMK) 提供的德國各級學校教育制度圖，可發現德國六、七年級學童的年齡大約為十一至十二歲，相當於臺灣學生五、六年級時的年齡，此階段的學習內容大多以報讀、說明與繪製統計圖為主，包

括折線圖、圓形圖。檢視德國同年齡學生的學習內容，需自行蒐集數據資料以整理並繪製統計圖表，且統計圖表的類型不僅限於折線圖、圓形圖、一維表格，另有直方圖、長條圖、列聯表等統計圖。除了認識並繪製常用的統計圖表，還需運用統計數據包括平均數、中位數與眾數等進行數據分析。由此可知，德國的統計課程內容比臺灣豐富多元，且統計學習年齡比我國早兩至三年，下方列出臺灣與德國同年齡統計學習內容之比較（表 9）：

表 9
臺灣與德國同年齡統計學習內容之比較表

國家	年齡	學習內容
臺灣	11 歲	製作折線圖
	12 歲	報讀、說明與製作圓形圖
	13 歲	蒐集、整理數據並繪製統計圖表 (直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表)
		認識並利用統計數據描述一組資料 (平均數、中位數與眾數)
	14 歲	統計資料處理 (累積次數、相對次數、累積相對次數折線圖)
	15 歲	認識統計數據的分布全距、四分位距、盒狀圖)
德國	11 歲	蒐集、數據並繪製統計圖表 (直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表) 瞭解繪製統計圖的錯誤迷思
		認識統計用語—離婚率、漲跌率、選票率
	12 歲	自行選擇蒐集數據的方式 自行選擇合適的統計圖表達數據 (續下頁)

認識並繪製莖葉圖

認識統計用語—平均坡度、平均速率

認識並利用統計數據描述一組資料

(平均數、中位數與眾數)

認識統計數據的分布

(全距、四分位距、盒狀圖)

第二節 認知上的統計學習年齡

德國學生學習統計課程時的年齡比臺灣早兩至三年，大約在十一至十二歲，根據 Piaget (1970) 的認知發展階段，十一至十二歲的學童正處於形式運思期 (period of formal operation)。Piaget 將認知發展劃分成四個階段：感覺動作期 (sensory-motor period) — 從出生至兩歲、運思前期 (peroperation period) — 從二歲至七歲、具體運思期 (period of concrete operations) — 從七歲至十一歲、形式運思期 (period of formal operation) — 從十一至十五歲。而其認知發展階段理論的特徵主要有發展的次序不變、以整體結構闡釋行為為模式、各結構間的關係不可替換等 (王文科, 民 80)。

根據 Piaget (1970) 的認知發展階段理論，本研究選用之教科書其描寫對象的認知發展階段約在形式運思期，在此期間學生思考模式能以假設命題方式呈現，故亦可稱為命題運思期 (propositional operations)。Piaget 發現此階段的學生能夠想像情境的各種可能性，且具備處理假設命題的能力，思考對象不再只限於具體事物，因此，他認為在此階段青少年所運用的推理歷程，為假設—演繹推理 (hypothetico-deductive reasoning) 與科學 (歸納) 推理 (scientific (inductive) reasoning) (王文科, 民 80)。

假設—演繹推理亦稱為先驗論 (transcendentalism)，約在十一、十二歲時出現，此時的推理過程不須透過直接觀察或根據人的經驗才能獲得結果，而是透過假設再經過演繹歷程，最後獲得結論。採此種方式推理必須是以正確的情境、真的陳述、可驗證的陳述為前提，即先確認前提為真，結論使為真，才可判斷結果的真偽。

該年齡階段的學生面臨不同情境時，能根據科學的推理模式解決問題，此種推理模式稱為—科學（歸納）推理。之所以能具備此種推理能力，乃因為智力運作的方式從具體運思期的「第一級運思」提升至「第二級運思」，使他們不一定要透過現實世界的摸索，靠著抽象化的思考也能獲得同樣結論。所謂的「第二級運思」(second order operations) 或一再運思(operations on operations)是用於對比具體運思時期兒童以實際物體為對象，經由心理(mental)作用而進行的「第一級運思」。Adult (1979)更針對第二級運思加以說明：「此種運思方式是利用抽象規則來解決問題，並非運用嘗試錯誤程序來解決問題」。

除此之外，形式運思期的青少年除了具備假設、推理能力，還能夠將問題進行拆解、處理，其步驟為：(1)適當地設計實驗，並計畫做適當的考驗；(2)準確觀察結果；(3)從結果中擷取結論(Piaget, 1970)。綜合上述，形式運思期青少年所具備之能力對於學習統計主題時相當重要，例如：可以自己設計蒐集數據的方式、從折線圖的趨勢中觀察並預測結論、從統計圖表呈現出的結果進行推論等。因此德國將統計部分學習內容安排於十一至十二歲時學習並無不妥，可供臺灣做為參考。

第三節 統計素養的文獻探討

審視德國教科書的文本內容與題目情境，可看出欲培養學生具備統計素養之能力，例如：要求學生對統計結果或訊息做出解釋與批判思考、根據統計圖表做出可能性的預測等。由此可見，統計素養在學習「數據與不確性」主題之重要性。

隨著科技與網際網路的蓬勃發展，處處可見經數據化的資訊，且包含統計語言的訊息日漸增多，例如：利用統計資訊增加廣告吸引度、以數據輔助論述內容。日常生活中亦隨處可見不確定性因素存在的情境，例如：今日的降雨機率為多少、某總統候選人的民意調查高或低等。市民大眾皆須掌握不確性因素的影響，並根據數據化的訊息做出決策，而處理不確定性因素的科學工具之一就是統計，因此具備基本的統計素養對現代人是一項不可或缺的重要能力，甚至有專家學者建議開設統計學相關課程供民眾學習，以應付數據與資訊充斥的現代社會。Gal(2003)亦認為統計專家應發展大眾能夠瞭解的統

計議題，以增進國民的統計知識與素養。

在這個充滿隨機情形的世界常須作出抉擇，無論是對現況或未來進行推測或預測。數學素養更應包含瞭解不確定性，以及具備基本處理數據與風險評估的能力（教育部，2014）。二十一世紀關鍵能力聯盟（P21, Partnership for 21st century skills）亦提及國民未來須具備的關鍵能力：「學習與創新的能力」、「資訊、媒體與科技素養」、「工作與生活能力」（劉曉樺，2012），其中資訊素養指的是有效的取得資訊，並能嚴謹的評估資訊的正確性，對於問題解決的決定有著關鍵性的影響。美國數學教師學會（National Council of Teacher of Mathematics，簡稱 NCTM）在其頒布的數學課程標準中指出：「要能對統計結果作出解釋，對文字敘述提出批判。」。

從上述文獻可以發現，無論在日常生活情境，或是需要運用到統計相關能力的任務，基本的統計素養與推理能力已成為學生應具備且重要的技能之一，因此我們需要思考如何將統計學習內容成為學生能帶得走的能力。

一、統計素養的定義

首先，我們必須瞭解統計學者是如何定義統計素養，本研究統整了國內外學者對統計素養的定義。首先，Wallman 在 1993 年提出國民統計素養的概念，進一步說明統計素養是能理解、評論批判在日常生活中各種統計結果的能力。Lajoie、Jacobs 及 Lavigne（1995）亦認為統計素養是有能力解讀新聞媒體、報章雜誌與工作情境中出現的統計觀點。Watson（1997）則認為統計素養具有層級（tier）架構，可利用統計與機率的術語，對社會議題的統計語言進行批判與質疑。

隨著統計素養日漸備受重視，越來越多國外學者對統計素養加以定義，Lehohla(2002)認為統計素養是閱讀和理解含有數據資料的能力。Galpin（2001）則認為統計素養是能思考統計語言或訊息，以及具備分析含有統計資訊的能力。Gal（2000）提出統計素養是能以含有統計數據或訊息的論證解釋，進行理解與批判性評論，並與他人溝通討論。Schield（2004b）也提出類似看法：「統計素養是在閱讀和解釋資料訊息時，能利用統計

意義作為溝通證據，並進行批判思考。」。Holmes (2003) 則認為統計素養除了具備以數字讀和寫的能力，更應多增加解讀和溝通能力，強調應清楚區分統計計算能力與統計素養之間的差異。

Schild 在 2001 年更針對統計素養提出更詳細具體之說明：

1. 統計素養不但是數學思維（數字上的），同時也是批判思維（文字上的）。
2. 統計素養不但處理變數（代數）與數值（算數），同時也需處理文字（文法跟語意）。
3. 統計素養不但考慮變異數和標準差，同時也要考慮比率（rates）和百分比。
4. 統計素養不但要能讀迴歸診斷，同時也要能讀統計圖表。
5. 統計素養不但能選擇正確的統計檢定，而且還能選擇相關的比率（rates）和百分比。
6. 統計素養不但能夠辨別兩個母體是否具有相等的變異數，同時也能夠辨別實驗與非實驗的差異。
7. 統計素養不但能解讀統計圖表，而且還能解讀統計量。
8. 統計素養不但能機械地思考如何計算 p 值，同時也能創造性地思考如何選擇不同的解釋。
9. 統計素養不但能在不考慮條件地情境下，思考觀察值的相關強度，同時也能在有條件的情境下思考觀察值的相關程度。
10. 統計素養不但是非條件和非脈絡性的思維，同時也是條件性和脈絡性的思維。

根據上述十項統計素養具體能力，可發現 Schild 將大部分學者皆提倡的統計素養能力列入參考，即基本的統計計算、繪製圖表的技能，更加入了瞭解讀統計數據、統計圖表所呈現的結果，並對統計結果進行批判辯論等能力，額外增加對中學學生相對較高層次的統計知識，包括要能讀迴歸診斷、選擇正確的統計檢定、知道如何計算 p 值等，由於這些能力未在中學階段的統計學習內容提及，因此不進行深入探討。隨後 Schild 又在 2004 年補充了對統計素養的界定，認為統計素養應該是：

- 著重在描述性的統計和模型上更甚於統計性的推論
- 著重在解讀表格、圖表更甚於樣本分布
- 著重在調查研究更甚於實驗
- 著重在因素和偏差更甚於機會
- 著重在建立變數間的關聯性更甚於統計顯著性檢定
- 著重在歸納推論更甚於演繹推論
- 著重在有關社會政策中統計論點的品質更甚於數據該符合哪種統計理論
- 著重在如何用統計來支持論點更甚於統計方法的數學理論

下方統整各學者在統計素養上採取的論點(表 10),以瞭解統計素養的看法或定義:

表 10
統計素養的定義

學者 (年代)	統計素養之說明
Wallman (1993)	理解和精確地評估出現在我們日常生活中的統計結果的能力,及欣賞在各類情境中以統計思維做決策時所得到的貢獻的能力。
Lajoie, Jacobs & Lavigne (1995)	解讀出現在報章、雜誌、電視、廣告和與工作相關的任何統計論點的能力。
Garfield (1999)	理解統計語言(如字、符號、專有名詞)的能力,更廣泛地說,是具有解釋和理解出現在新聞媒體或民意調查中相關圖表和統計訊息的能力。
Schild (1999)	對與統計相關訊息能夠採取批判性思維的能力。
Snell (1999)	對統計基本概念和統計推論的理解能力。
Gal (2000)	能以統計資料的論證解釋,來理解和進行批判性評論。
Galpin (2001)	能夠思考人們說的話、能鑑定訊息且判斷它是否有異議。
Lehohla (2002)	閱讀和理解量化資料的能力。

(續下頁)

Holmes (2003)	在統計的範疇下，具有數字化讀和寫的能力。
Watson (2003)	在各類情境中以統計思維做決策所使用到的能力
Schild (2004b)	能閱讀和解釋數據訊息，能利用統計意義作溝通證據並進行批判思考。

綜觀國內外各學者對統計素養的定義，可看出統計素養是建立在基本統計計算能力上，但重視的是能夠解讀統計資訊、以統計數據作為溝通依據，並對統計結果提出質疑與批判。大部分的學者亦強調統計素養之功能性，包括能夠閱讀與解讀新聞媒體、報章雜誌出現的統計訊息，或是要能對具有統計相關的訊息提出批判性思維的能力等。由此可知，統計素養包含的統計認知層次相當廣泛，實際生活中有關統計與不確定性的情境也相當多元，反觀國內統計的課程內容安排，著重於公式的熟練、數值的運算、單純地繪製統計圖表，較少培養學生學習涵蓋統計素養之內容。

由於統計教學內容大多停留在基本計算的操作，相對缺乏統計意義的詮釋能力，以及不確定性問題的推演能力，學生在遇到數據繁多複雜時計算意願偏低 (Lin, 2010)。當處理生活情境中的統計問題時，亦無法瞭解問題情境隱含的假設、統計意義與所對應的統計策略 (Finney & Schraw, 2003)，因此國內外學者開始提倡學習統計思維應重於統計規則 (林福來，2011；楊玲惠，2015)，且培養學生對統計資料進行解釋、判斷正確性、預測、推論更為重要 (曾建銘，林原宏，2016)。

二、統計素養的認知層次

統計素養亦有層次上的區分，Gal (2002) 提出統計素養有知識層面與情意層面兩大要素，其中知識層面包含素養技能、統計知識、數學知識、脈絡知識、批判評論；而情意層面則包括信念和態度、批判評論的立場。基於知識層面與情意層面發展而出的兩項統計素養能力：(1) 能對文章中的統計訊息、與數據相關的議題以及隨機現象進行解釋和批判；(2) 能對統計訊息意義上的認知、資訊內涵、結果的可能性等進行討論和溝通。

Watson 於 1997 年針對統計素養提出三個等級層次：(1) 認識機率與統計的基本專

用術語；(2) 能將統計語言和概念對應至生活情境或社會議題中；(3) 對採錯誤統計基礎的結論、不完整的訊息持質疑態度，並以正確概念反駁。接著又於 2003 年利用澳洲中小學生的問卷調查結果，提出統計素養六大層次：層次一為自我的 (idiosyncratic) 層次，利用自身觀點瞭解文章意義，重複使用專有名詞並具備基本報讀表格的技能；層次二為非正式的 (informal) 層次，僅對文章內容有口語上的理解，存在直觀的統計信念，能針對簡單統計圖表進行計算；層次三為不一致的 (inconsistent) 層次，對文章選擇性的理解且無法對統計結果進行論證；層次四為一致無批判的 (consistent non-critical) 層次，能應用統計圖表上統計量和機率的特性，能瞭解文章內容，但無批判思考能力；層次五為批判性的 (critical) 層次，能瞭解機率的性質和察覺變異的存在，對文章已有批判質疑態度，但缺乏推論能力；層次六為批判數學的 (critical mathematical) 層次，具有對文章內容進行批判質疑之能力，並使用推論和預測的技能 (Watson & Callingham, 2003)。表 11 詳細列出統計素養六層次的具體內涵：

表 11

Watson 統計素養六層次

層級	名稱	內容說明
層次一	自我的理解層次 (idiosyncratic)	<ul style="list-style-type: none"> 利用自身觀點詮釋對文章內容的瞭解 重複使用專有名詞 具備計數、報讀表格等基本數學技能
層次二	非正式的理解層次 (informal)	<ul style="list-style-type: none"> 對文章內容僅於直觀的口頭或非正式的瞭解，未含有統計的信念 對複雜的統計術語和情境有初步的概念 會進行簡單的圖表計算
層次三	不一致的理解層次 (inconsistent)	<ul style="list-style-type: none"> 能對文章內容作選擇性的瞭解 較著重於統計概念的性質而非量化 能接受結論但無法進行論證

(續下頁)

層次四	一致但無批判的 理解層次 (consistent non-critical)	<ul style="list-style-type: none"> 能瞭解文章內容，但不具備批判性論述能力 能多方面且大量使用統計術語 能察覺到機會的變異 具有結合平均值、簡單機率、統計圖的特性 等的統計技能
層次五	批判性理解的層次 (critical)	<ul style="list-style-type: none"> 對含有專業術語的文章具有批判與質疑的態 度，但未進行推論 能解釋機率的性質 能察覺變異性
層次六	批判數學理解的層 次 (critical mathematical)	<ul style="list-style-type: none"> 對任何文章皆具備批判與質疑的態度 對報章雜誌的文章內容能夠進行推論 能察覺到事件的不確定性，並進行預測 能詮釋統計語言的些微差異

資料來源：Watson (1997)

有別於統計基本計算能力的單一評量標準，即選擇合適的公式進行運算，計算結果的正確性，統計素養的評量標準相對較多元。Schild (2010) 提出評量學生統計素養的四個層次：對統計使用的評價、對開放性問題的量化估計、描述和比較圖表的統計結果、以統計觀點回答選擇性問題。

歸納上述學者對於統計素養層次的看法，認識統計專有名詞、報讀或繪製統計圖表、計算統計圖表上的數據等教學目標皆屬於較低的認知層級，操作與思考上容易單純化，若要將統計學習內容延伸與提高認知程度，則必須提供學生對統計訊息進行評論的機會，培養其對統計資訊產生反思驗證的態度、對不確定性事件預測發生的可能性等能力。除此之外，採用真實性情境的數據或問題，能讓學生瞭解問題背景的脈絡，更有助於統計概念與素養的提升 (Daniel & Braasch, 2013; Karpiak, 2011)。

三、統計素養的相關研究

察覺至統計素養之重要性，國內學者亦相繼投入統計素養的相關研究，近幾年來與統計概念或素養相關之科技部專題計畫、期刊論文日益增多。研究者於政府研究資訊系統（Government Research Bulletin, GRB）以「統計素養」為關鍵字查詢，又因統計與不確定性有著密切的關聯性，增添「不確定性」為關鍵字搜尋，一併列出近 10 年內與統計素養相關之科技部專題計畫，將搜尋結果整理如下（表 12）：

表 12
與統計概念或素養相關之科技部專題計畫

計畫年度	主持人姓名	計畫名稱
99	陳幸玫	統計教育研究-人才培育與資訊整合-子計畫二：兒童資
100		料變異概念之發展研究
99	林素微	統計教育研究-人才培育與資訊整合-子計畫三：青少年統
100		計素養的建構與評量
100	王美娟	以 TIMSS 2007 認知評量架構探討我國國小學童統計圖
101		理解能力
101		運用 TIMSS 2011 認知評量架構探討影響我國國小學童
		統計圖理解能力之因素
101	林素微	統計素養的批判思維評量建構探討
101	楊志強	以 GAISE 架構發展臺灣學童統計問題解決程序能力之縱
102		貫研究
102	陳幸玫	從不確定性觀點發展統計教材與教學方案之研究 (I)
103	林原宏	國小統計與機率主題之數學閱讀數位文本發展與成就和 素養表現診斷

（續下頁）

104		提升臺灣K-12學生數學素養之研究-子計畫二：整合數學
105		文本閱讀與評量的國小學童統計素養培育活動探討
106		
104	楊凱琳	提升臺灣K-12學生數學素養之研究-子計畫六：整合閱讀
105		與建模的高中學生統計素養培育活動探討
106		
105	陳幸玫	從統計知識、統計推理和統計思考三個層次探討國中小學老師的統計教學知識-運用真實資料的統計教材
105		學生資料與可能性的能力之探究與評量
106	曾建銘	國際小學生數學能力成分研究與評量工具之發展-學生資料與可能性的能力探測與評量II、III
107		國小學生資料與不確定性情境式素養評量之研究

另外，於臺灣期刊論文索引系統中，以「統計素養」、「統計概念」為關鍵字搜尋，列出與其相關之期刊論文（表 13），可以看見國內學者深入研究與統計相關之課程、教材，或探討學生統計概念的發展、教師於統計課程的教學法，以及進行跨國性教科書比較，其目的皆是提倡統計教學內容的多元性，以呼籲統計素養的重要性。

表 13
與統計概念或素養相關之期刊論文

年份	作者	期刊名稱
83	李源順	機率與統計教學研究的文獻探討
84	蘇國樑	國小兒童統計概念分析之研究（1）-資料分佈概念之分析
85		兒童統計概念分析（2）-統計圖的概念
88		統計概念在現象觀察中的意義

（續下頁）

88		統計概念的啟蒙和發展
88		統計概念的啟蒙-統計圖
95	陳幸玫	國小統計課程之內涵與教學理念
100	陳幸玫 林哲夫	國小高年級學生自發性抽樣概念之探討
100	劉子鍵 林怡均	發展二階段診斷工具探討學生之統計迷思概念：以「相關」為例
100	李宛臻 袁媛	桃園縣高中職數學教師信賴區間學科教學知識之研究
101	李健恆 楊凱琳	從統計認知面向與圖表理解角度分析國中數學教科書的統計內容

最後，於臺灣碩博士論文知識加值系統以「統計素養」為關鍵字查詢，出現許多篇與統計素養相關之學位論文，大致可分為有關教科書面向、教學法面向、統計素養測驗面向、建構統計素養指標面向等面向，以下簡述各面向的論文：

教科書分析面向的有：高中數學教科書與測驗的統計內容分析（紀岳宏，2019）、數學教科書統計教材之分析—以臺灣、大陸、美國、新加坡為例（吳肯致，2015）、臺北縣市國小六年級學童解讀社會課程統計圖能力之探討—以翰林版為例（陳忠信，2010）、國小學童自然與生活科技領域常用之統計圖解讀研究—以臺北市南港區國小四、六年級學童為例（李佳芳，2005）等。

教學法面向則有：桌遊融入數學建模之活動設計與學習成效評估—以高中數據分析為例（游舒婷，2018）、國小職前教師統計素養—以南部某國立大學為例（陳展興，2015）、以高中教師的觀點探討 99 課綱與 95 暫綱高中數學課程—以機率、統計單元為例（黃心蕙，2014）、高中生統計圖表建構素養暨錯誤類型探討（黃千益，2013）、高中數學「機率與統計」單元課程設計與發展（洪耀男，2012）、桃園縣高中職數學教師信賴區間學科

教學知識之研究(李宛臻,2011)、高中數學教師數學教學相關知識之初探—以集中與離散趨勢量數為例(黃精裕,2008)、國小數學科統計課程設計之研究—真實解讀計劃(AEP)(鄒聖馨,2000)等。

統計素養測驗面向有關則有：國小六年級學童的統計素養閱讀文本表現之探討(洪宜君,2019)、六年級學生的統計素養與解題策略表現之研究(吳思嫻,2017)、發展不確定性與資料之評量工具—以九年級學生為例(秦僑翎,2014)、高中生統計素養測驗之發展(陳亦中,2013)、高中學生統計素養表現之探討(曾瑞玫,2010)、依據國小統計教材探討職前教師之統計素養—以國立臺北教育大學為例(翁意茹,2006)等。

建構統計素養指標面向則有：數學素養相關指標之研究(張珈華,2018)、國中生統計素養指標之發展(李信逸,2013)、國小中年級學生統計基本能力指標之發展(林昭岑,2013)、九年一貫數學課程實施下北部地區中學生統計素養之探究—以九年級為例(楊靜惠,2006)、等。

從上述統整資料中，可看到諸多研究者、專家學者從各層面對統計素養進行探討，從教材、教學方面思考如何培養學生統計素養之能力，提升其統計知識的認知層次，亦嘗試建構出統計素養之指標，讓課程設計者或教學者能以其標準發展符合統計素養之教學內容。

第四節 統計圖表的理解能力

統計圖表於網路媒體、報章雜誌等生活情境中頻繁出現，相較於文字敘述，利用圖表呈現的資訊給予大眾較深刻的印象。統計圖表亦是陳述現象或結果的重要工具，其優勢在於透過表格或圖像呈現原始數據，能顯示出數據的型態與方便進行比較(Scheaffer etc, 1998)。為了讓閱讀者便於讀取訊息、瞭解數據間的關係，我們常利用統計圖表的外在表徵(圖形、表格等)，作有系統、規則的陳述(鍾靜、林素微、魯炳震與鄒聖馨, 2002)，因此能解讀和製作統計圖表是生活在資訊時代需具備的統計素養之一。此外，統計圖表於其他領域學科擔任著補充文字敘述的角色，輔助學生對學習內容有更多的認識。

根據十二年國民基本教育課程綱要數學領域，國中階段學生須學習的統計圖像包括長條圖、折線圖、圓形圖、直方圖、盒狀圖等，表格亦包含其中。Bright 與 Friel (1998) 認為表格擔任重要的中介角色使原始數據轉換為簡化數據，並建立不同表徵之間的連結 (connection)。除了認識基本的統計圖形，學習特定圖像之間的轉換也相當重要，例如：統計圖形連續性與離散性的差異、莖葉圖可視為由直方圖逆時針轉 90 度得到等。因此學生在學習統計相關單元時，必須具備將原始數據轉換為表格或圖像的能力，以及理解統計圖表之間的關聯。

一、統計圖理解層次

統計圖表理解能力包含讀取、解讀、分析、評論、預測數據等，除了能利用圖像整理與表達數據外，針對圖表呈現的訊息加以解釋與評論，以及搭配不同情況選擇合適的圖像皆是重要的統計學習內容。

針對統計圖表的理解層次，Curcio (1987) 提出三項閱讀統計圖的理解能力，分別為報讀統計圖的原始資料、解釋統計圖呈現的資料、利用統計圖上的資料進行推論。接著以上述能力發展出統計圖理解的三個層次，各層次詳細說明列於下表 (表 14)：

表 14

Curcio 統計圖理解三層次

層次	說明
初階層次 (reading the data)	能直接從統計圖中讀出問題的答案。
中階層次 (reading between the data)	能找出統計圖中數據之間的關係以回答問題，包含比較 (大於、最多、最高、最小) 的過程，以及至少須完成一至兩步驟的計算過程 (加、減、乘、除)。

(續下頁)

進階層次
(reading beyond the data)

能根據統計圖的表徵進行擴展、預測或推斷以回答問題。做此推論前，讀圖者須具備統計圖呈現之結果與問題的背景知識。

根據 Curcio 的統計圖理解三層次，學生大多可達到初階與中階的層次，較不易達到進階層次所要求的能力，同時國內教科書也較少編排屬於此層次的學習內容，大多將教材內容停留在基本運算能力、繪製統計圖表，相對缺少推論、分析、預測統計圖所呈現的數據之練習機會。

Friel 後於 2001 年提出統計圖理解能力的定義，指的是從他人或自己的圖中取得有意義的資訊，接著與其他研究學者共同提出六種與統計圖表理解的相關能力（表 15），給予圖表能力更具體的說明。另外，提出圖感之定義，即為能夠繪製圖像，並透過圖像來理解各問題情境中數據意義的能力。本研究使用 Friel、Curcio 與 Bright（2001）提出的圖感概念，以及李健恆與楊凱琳（2012）統整出的圖表理解類目作為研究工具之一，其分類為：(1) 認識圖像的元素；(2) 講述圖表所呈現的現象；(3) 理解圖表、圖像和被分析數據之間的關係；(4) 解釋圖像所呈現的資訊；(5) 判別使用合適的圖像來表達數據；(6) 避免只依個人主觀解讀圖表。

表 15

Friel 六種圖感能力

能力	關注重點
1. 認識圖像中的元素、元素間的相互關係，以及這些元素在圖像中所呈現的資訊	圖表能明確顯示出各層次細節中的數量、類別訊息。 數據整理包刮將含有原始數據的表格轉換為已分組數據。

(續下頁)

<p>2. 推理以圖像形式呈現的資訊時，能講述特定圖像中的語言。</p>	<p>透過溝通統計思想的語言，認識各種圖像結構的元素，並與內容相關的訊息進行互動。</p> <p>每一種圖像都具有其各自語言，可用於討論圖像所呈現的數據。</p>
<p>3. 理解表格、圖像與數據間的關係。</p>	<p>閱讀者需要明白符號任務和空間任務，以及哪些表格和圖像能幫助處理這些任務的方法。</p>
<p>4. 瞭解並回答有關圖像理解的 3 個層次問題：直接讀取數據的資料、讀取數據之間的資訊、讀取數據以外的資訊；或更一般地說，能夠解釋圖像所呈現的資訊。</p>	<p>此三個提問的層次涉及從圖像中提取數據、發現圖像中數據間的關係、推斷數據與圖像呈現結果之關係。</p>
<p>5. 基於判斷所涉及任務和所表達數據，辨別出比其他圖像更有效用的圖像。</p>	<p>考慮數據的本質與分析目的，判斷哪種圖像呈現一組數據較有效、合適。</p>
<p>6. 以理解數據所呈現的圖像為解釋的目標，避免只依個人主觀解讀圖表。</p>	<p>先備知識亦可能產生圖像資訊的誤讀，個人的主觀意識亦會影響對任務的目標和策略的解釋。</p>

資料來源：Friel et al (2001: 146)

綜合上述學習統計圖表所需的理解能力，除了根據統計圖表上的資訊進行報讀與解讀外，還應包含統計圖的建構，甚至是自行選擇統計圖表以表達結果。然而臺灣的教科書多將學習重心放置於基本的統計圖繪製，或是單純從統計圖表中讀出資訊，未進一步要求學生利用統計圖上呈現的資訊進行推論或預測，以及評估已構建好的統計圖表之正確性。

對大多學生來說，報讀統計圖表、解讀與計算統計量、直接繪製統計圖表是容易達

成的學習目標，而透過推理來提取資訊或判斷的問題相對不易，例如：預測折線圖的發展趨勢、判斷製圖者選擇某一統計圖呈現數據的目的等。事實上，根據國內學者研究，中學學生於學習統計圖表的繪製時仍有不少待加強的部分，例如：超過五成的學生不瞭解名義變數（性別、座號、興趣等）不適用於折線圖的分類變項；有三成的學生不曉得若要呈現數據的預測結果，使用折線圖進行繪製優於長條圖；只有兩成的學生能正確繪製出無刻度表示的圓形圖，但若題目給予刻度表示正確率就提高不少（張少同，2014）。因此針對學生學習統計圖表時易產生的問題，教材設計者應提供練習機會讓學生減少此方面的錯誤。

第三章 研究方法與實施

本章分為研究流程、研究對象、研究工具，以及資料處理及分析的過程共四節。

教科書文本分析需要量化的數據與質性的研究以呈現結果，因此本研究採用古典內容分析法，說明德國教科書統計內容所占比例與教材編排之脈絡。國內學者張芬芬（2012）指出文本分析法共有四種：古典內容分析法、故事分析法、論述分析法與論辯分析法，其中古典內容分析法主要以量化處理數據與呈現資料，並用質性的內容分析輔以說明。內容分析法的定義為：「透過量化的技巧以及質的分析，以客觀及系統的態度，對文件內容進行研究與分析，藉以推論產生該文件內容的環境背景及其意義的一種研究法。」（歐用生，2005）。

利用內容分析法對教科書進行研究分析有幾個優點，包括能夠瞭解教科書的內容變遷或發展趨勢、比較各國教科書的編寫差異、亦可利用結構圖呈現單元間的編排脈絡（Krippendaff, 1980; 羅世宏譯，2008）。另外，可以利用內容分析法的特點對教科書做純描述性的研究，也就是計算文本中各類目出現的次數或百分比；以及規範性分析，即用某些標準對文本做評斷（羅世宏譯，2008）。

而教科書在古典內容分析法中被視為是「溝通媒介」的物件，是老師向學生傳道、授業、解惑所用的溝通工具（張芬芬，2012）。因此若對教科書中出現的文字、圖片、圖表等進行分析，更能瞭解此溝通工具中有哪些內容，並知悉教科書是如何達成傳達知識等教化功能。

第一節 研究流程

本研究選擇德國數學教科書為研究對象，針對教科書中統計相關單元，將課文內容與例題翻譯成中文。接著閱讀相關文獻資料並選擇研究工具，利用李健恆與楊凱琳建構之雙向細目表進行題目歸類，在分類與分析過程中與教授、評分員進行討論，以增加研究之信效度。最後，利用量化之數據呈現題目分類結果，並根據結果整理德國統計課程

的學習歷程與教材編排之脈絡，綜合結論與撰寫研究報告。上述執行過程以研究流程圖呈現，如圖 9 所示。

第二節 研究對象

一、德國 Lambacher Schweizer Mathematik 數學教科書

本研究的分析對象為德國 Lambacher Schweizer Mathematik 6、Lambacher Schweizer Mathematik 7 數學教科書（2003 年巴伐利亞版），為德國基礎學校「實用課程」課程標準中選用書籍，研究範圍為六、七年級共兩冊，每年級使用一冊教科書，不包含其他學習教材及習作本，僅針對「統計」相關單元內容及例題進行分析。

德國的數學教科書 Lambacher Schweizer Mathematik（以下簡稱 LSM 版），由德國數學教育家 Theophil Lambacher 與 Wilhelm Schweizer 共同編輯。Lambacher 生於 1899 年，於 1925 年至 1927 年在德國的一間私立學校擔任教師，隔幾年後擔任文化部部长，同時也是德國數學和科學教育促進協會（Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterrichts, MNU）下「數學和科學教育雜誌」的數學編輯。Schweizer 生於 1901 年，同樣曾擔任過高中數學教師，1946 年開始在蒂賓根大學（Eberhard KarLSM Universität in Tübingen）擔任教授，並開設與數學教學相關的課程。兩位教育學者皆具有多年中學教學經驗，因此能以專業的角度撰寫教科書，也清楚掌握學生在學習數學上的種種迷思。

LSM 版教科書的出版社為 Ernst Klett Verlag GmbH 於 1947 年建立，為德國歷史悠久且具代表性之出版商。由於德國的教科書必須經過各邦文化教育部審核通過，才能成為各校選用之教材，在層層把關的篩選之下，LSM 版教科書成為德國多個聯邦州所使用的圖書，多所學校甚至使用該版教科書長達十幾年之久，此本教科書亦是德國當地書局銷售率最高之教科書。

另外，經研究者調查，該版教科書正為臺北歐洲學校（Taipei European School, TES）德國部中學選用之教材。臺北歐洲學校於 1990 年成立，位於臺北市士林區，共分為法

國部、德國部、英國小學部與國高中部，其中德國部提供符合德國教育標準的課程，讓出身於臺灣的學子也有機會接受德國教育，該校學生年齡範圍從幼稚園至高中部，具備完整德國體制規劃下的課程。

二、研究範圍

本研究將德國教科書 Lambacher Schweizer Mathematik 6（以下簡稱 LSM 版第 6 冊）、Lambacher Schweizer Mathematik 7（以下簡稱 LSM 版第 7 冊）中與統計相關的單元抽取出來，共計 3 個單元、6 個小節，各年級之單元與小節名稱、單元數、小節數與頁數之百分比整理如下（表 16）。

表 16

研究對象之範圍統整表

教科書	單元	單元數 (比例)	小節	小節數 (比 例)	頁數 (比例)
Lambacher Schweizer Mathematik 6	II 相對頻率	2/8 (25%)	2 收集與評估 數據	3/45 (7%)	3/147 (2%)
	VIII 百分比 計算與圖表		6 表示變量之 間的關係		2/147 (1%)
Lambacher Schweizer Mathematik 7	VI 數據、 圖表與百分 比計算	1/8 (13%)	1 分析圖表上 的數據	3/37 (8%)	5/141 (4%)
			2 算術平均數		3/141 (2%)
			3 百分比計算 的基本公式		4/141 (3%)

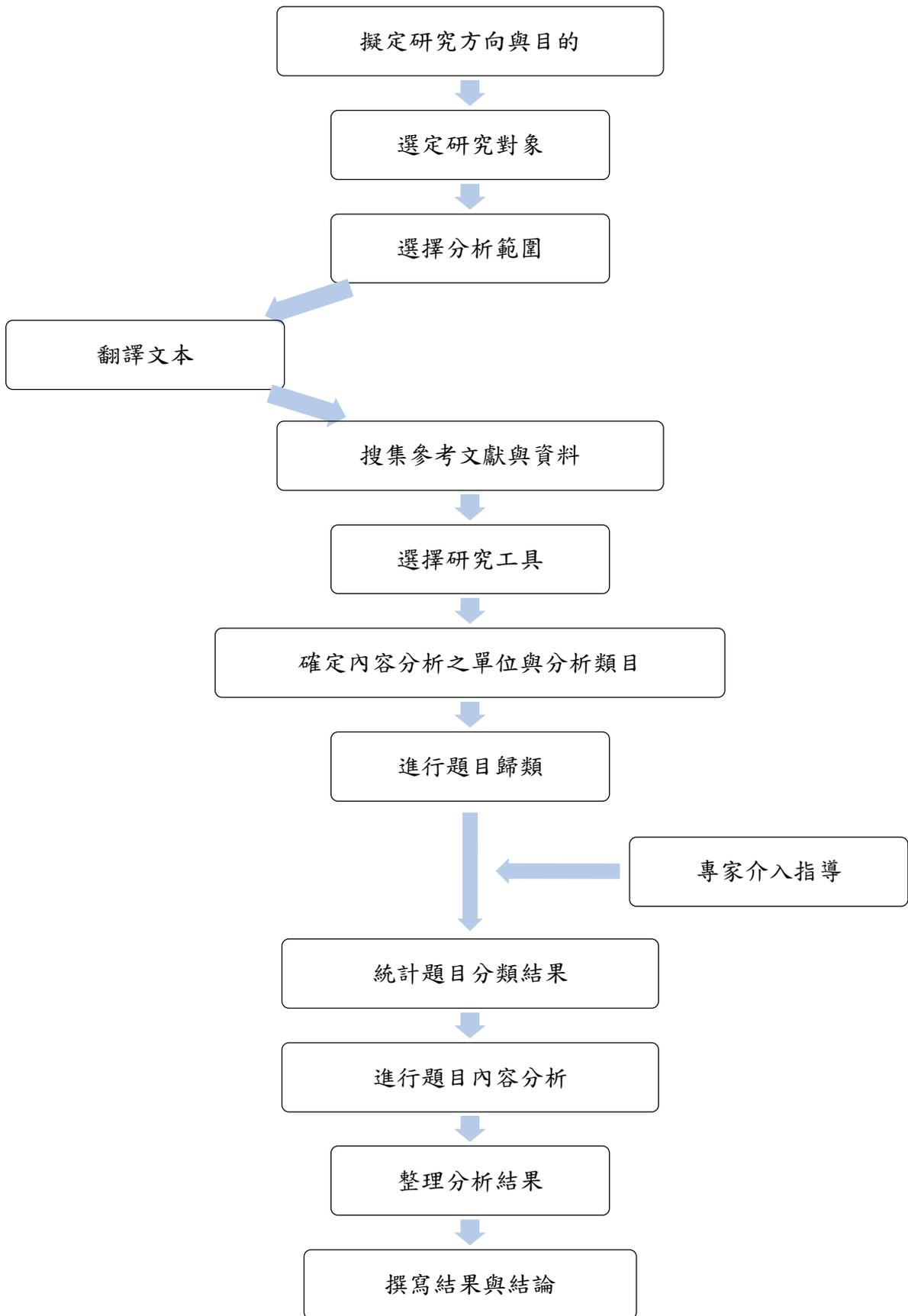


圖 9 研究流程圖

第三節 研究工具

本研究依據 Garfield 等人(2003)所整理出的「統計認知分類」,與 Friel 等人(2001)所提出的「圖感概念」,並參照國內學者李健恆與楊凱琳(2012)所統整的「圖表理解類別」進行題目上的分析。所有題目皆須經過統計認知表歸類,其中含有統計圖表的例題再透過圖表理解表進行分類,因此同一道例題可能會有兩個以上的分類項目。

一、統計認知分析表

本研究參考 Garfield 等人(2003)提出的統計認知分類細目,與李健恆與楊凱琳(2012)所訂定之統計認知類別,以分析德國教科書中的例題。下方表格(表 17)整理出統計知識、統計推理、統計思考三大統計認知主類別,並詳細列出各次類別之說明。

表 17

統計認知分析表

統計認知分析表	
L. 統計知識 (Literacy)	
次類別	說明
L1：分組計次	將原始數據事件做特定排序計次與分組，並整理成表格的形式。
L2：表格轉換	使用不同表格呈現數據，例如數據的次數、累積次數、相對次數和相對累積次數。
L3：代數計算	利用平均數、中位數、百分位數等與統計量有關的公式進行計算。
L4：計算簡化	瞭解調整原始數據後對各概念的影響，以簡化相關概念的計算。
L5：概念判斷	根據理解之概念，判斷陳述句子的是非。
L6：設計數據	設計與題目條件吻合的資料與數據。
L7：繪製圖像	依照題目條件繪製呈現數據的統計圖表。
L8：報讀圖表	讀取統計圖表上的資料，並表達數據。
L9：解讀圖表	依據圖表資訊進行統計量數值運算。
R. 統計推理 (Reasoning)	
次類別	說明
R1：解釋 (1)	認識各種工具對數據的集中與分散情形所代表的意義，並依據結果解釋數據所代表的現象。

(續下頁)

R2：解釋（2）	依題目條件選擇適當的分析工具，並根據結果解釋數據所代表的現象。
R3：預測	根據理解認知預測數據或圖表呈現之現象。
R4：推理	利用理解之統計概念，從數據的集中或分散情形進行推論。

T. 統計思考（Thinking）

次類別	說明
T1：形成問題	從日常現象主動轉換成可探討的問題。
T2：收集數據	舉出解決問題的數據收集方式及理由。
T3：選擇分析方法	選擇與題目之整體數據匹配的分析方法。
T4：批判和評估	根據已解決問題或統計研究的結果做批判或評估。

資料來源：李健恆、楊凱琳（2012）。從統計認知面向與圖表理解角度分析國中數學教科書的統計內容。*教科書研究*，5（2），31-72。

參照教育部於 107 年 7 月 26 日訂定發布的「十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校-數學領域」，正是以「知、行、識」作為課程設計的架構。「知」在字面上的意思就是知道是什麼、理解是什麼，即學生能從腦海中提取訊息，對事物能產生認識的動作；而「行」是具備操作技能，但教師除了進行操作程序上的示範，更應讓學生知曉「做什麼」；「識」則是開始思考自己記憶、計算等認知的過程，即是「為什麼」、「為什麼要這樣」、「為什麼是這樣」等，而透過讓學生瞭解「為什麼」的這段過程，可以使其學習內容產生意義，甚至能夠對數學以外的學習內容形成連結，進一步認為數學是一門有價值的學科（單維彰，2018）。

將「知、行、識」三大項能力對照 Garfield 的統計認知分類，可以發現統計知識為知、行並重的能力，統計推理著重行的層面，而統計思考則強調於識的層面。由此可見，Garfield 將統計知識、統計推理、統計思考這三大項能力列入統計認知中，應是希望課程設計者或教師不僅僅於提供「能瞭解」和「會操作」兩種學習目標的內容，還要包含覺察、辨認等較高認知層次，乃至開始欣賞統計在生活上的應用價值，最後培養具有統計素養的學生。

為了更清楚辨別統計知識、統計推理、統計思考三大認知層面，以下提供德國教科書之例題，以說明各類別之判斷準則。在實際進行題目歸類時，部分題目包含兩種或兩種以上的統計能力，因此一個分析單位中可能會被分類至一項以上的統計認知次類別。

1. 統計知識 (Literacy)

Speed Range (km/h)	Number of Cars
bis 75	65
>75-80	155
>80-85	170
>85-90	145
>90-95	80
>95-100	45
über 100	55

2
In dem Diagramm ist dargestellt, wie schnell bei einer Radarkontrolle im Baustellenbereich (Tempo 80) gefahren wurde. Lies ab und ermittle:

- Wie viele Autos fuhren über 75 und höchstens 80 km/h?
- Wie viele Autos fuhren zu schnell?
- Wie viel Prozent der Autos waren mit über 100 km/h unterwegs?
- Wie viel Prozent der Autos fuhren über 80 und höchstens 90 km/h?

範例 1：

左圖為測速器紀錄車輛經過的速率，根據統計圖呈現的結果，回答下列問題：

- 有多少輛車行駛速率超過 75 (公里/小時) 但不超過 80 (公里/小時)？
- 有多少輛車速率過快？(過快的定義為速率超過 80 (公里/小時))
- 有多少百分比的車輛速率超過 100 (公里/小時)？
- 有多少百分比的車輛速率超過 80 (公里/小時) 但不超過 90 (公里/小時)？

資料來源：Lambacher Schweizer Mathematik 7 (p.118) by August Schmid and Dr. Ingo Weidig, 2003. Ernst Klett Verlag GmbH.

此題前兩項題幹要求學生讀取直方圖呈現的資訊，將圖上的數據直接回答出來，此部分屬於報讀圖表的認知層次；在回答後兩項的問題時，需要透過直方圖上的數值做百分比運算，即為解讀圖表的認知層次，因此該題屬於統計知識的內容。

2. 統計推理 (Reasoning)



1
Vergleiche die Angebote der beiden Eisdiensten und die ermittelten Massen der Testkugeln.
Wo würdest du dein Eis kaufen, wenn die Qualität bei beiden gleich gut ist?

Masse von jeweils 10 „Testkugeln“:
 Venezia: 41 g; 36 g; 43 g; 40 g; 37 g;
 38 g; 39 g; 36 g; 38 g; 40 g
 Dolomiti: 78 g; 83 g; 84 g; 78 g; 79 g;
 81 g; 79 g; 85 g; 81 g; 82 g

範例 2：

右方表格為兩家冰淇淋店「一球」冰淇淋的重量，左方為販售價目表，其中 Venezia (店名) 標價一球冰淇淋 50 歐分，Dolomiti (店名) 一球冰淇淋 1 歐元。

(1) 根據以上資訊，比較兩家冰淇淋店的售價與重量。

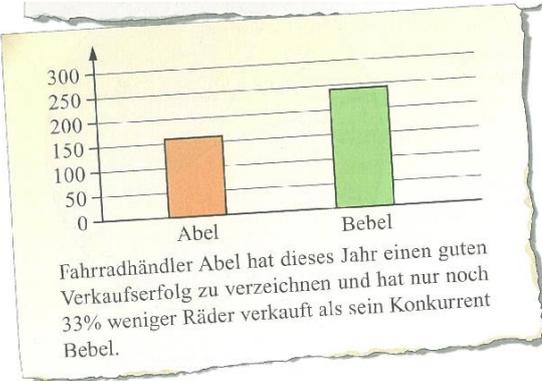
(2) 如果兩家店的冰淇淋重量相同，則你會在哪一家店購買冰淇淋？

資料來源： Lambacher Schweizer Mathematik 7 (p.123) by August Schmid and Dr. Ingo Weidig, 2003. Ernst Klett Verlag GmbH.

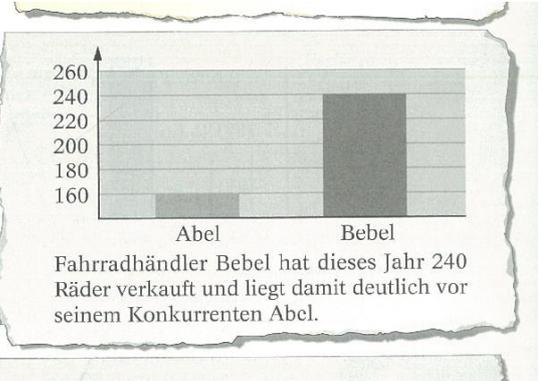
該題首先可先計算出兩家店的冰淇淋平均重量，分別為 Venezia : 38.8g、Dolomiti : 81g，並根據售價推論購買相同重量的冰淇淋，哪一家店的價格較划算，因此範例 2 符合「R2：解釋 (2)」，運用統計知識與技能，根據題目條件選取合適的工具進行分析，並從分析結果來解釋數據所代表的現象。

3. 統計思考 (Thinking)

1
Lies die einzelnen Zeitungsausschnitte. Wo sind Fehler enthalten? Wo entsteht ein falscher Eindruck?



Fahrradhändler Abel hat dieses Jahr einen guten Verkaufserfolg zu verzeichnen und hat nur noch 33% weniger Räder verkauft als sein Konkurrent Bebel.



Fahrradhändler Bebel hat dieses Jahr 240 Räder verkauft und liegt damit deutlich vor seinem Konkurrenten Abel.

範例 3：

閱讀下列兩則報導內容，找出錯誤的資訊在哪裡。

(左圖)今年 Abel 自行車零售商有良好的銷售業績，其銷售量僅比競爭對手 Bebel 零售商少 33%。

(右圖)今年 Bebel 零售商已經賣出 240 個自行車輪胎，遙遙領先於其競爭對手 Abel。

資料來源：Lambacher Schweizer Mathematik 6 (p.184) by August Schmid and Dr. Ingo Weidig, 2003. Ernst Klett Verlag GmbH.

此題要求學生對報紙提供的統計資訊作出評斷與批判，思考由統計圖推論出來的結果是否合理，培養學生閱讀含有統計訊息的內容應判斷其正確性。無論是長條圖或是折線圖等圖象，其 Y 軸皆應從 0 開始，並選定一致的刻度間隔往上累加。但此題目刻意採用不同間隔的範圍，誇大數據的變化程度，使兩種數據完全相同的資料，在統計圖上呈現出來的結果卻截然不同。因此該題屬於統計思考的認知層次，可讓學生釐清迷思概念，增加統計資訊之正確性辨別能力。

事實上，日常生活中仍存在許多統計圖表的誤用，德國教科書中出現不少類似題型，提供避免錯誤解讀的練習機會，完整的題型分析會在第四章詳細說明。

二、圖像理解分析表

根據 Friel 等人 (2001) 所提出的圖感概念、李健恆與楊凱琳 (2012) 翻譯整理而成的圖表理解分析表，針對含有統計圖表的例題進一步分類。下方表格 (表 18) 整理出圖表理解分析的六項類別，並詳細列出各類目之說明。

表 18

圖表理解分析表

圖表理解分析表	
G. 圖表理解 (GRAPH)	
次類別	說明
G1：認識圖像的元素	(1) 瞭解統計圖橫軸和縱軸所代表數據的意義，例如：次數和相對次數表所代表的意義
	(2) 透過調整兩軸的比例以適當表達數據的情況
	(3) 把原始數據（圖像）轉換成分組數據（圖像），或依題目所給定的數據繪製出指定的圖像
G2：講述圖表所呈現的現象	(1) 能從圖表所給予的資訊讀出相應的數值
	(2) 正確讀出圖像中的數值，並根據各種統計量的定義進行計算
	(3) 透過圖像所呈現的數值，比較其中兩個或以上的數據
G3：理解圖表、圖像和被分析數據之間的關係	(1) 選擇適當的比例在圖像中表達數據
	(2) 把原始或已分組數據轉換成指定圖像，並透過圖像來對數據進行分析
G4：解釋圖像所呈現的資訊	(1) 根據圖像說明相關的內容或解釋發展趨勢
	(2) 利用圖像所呈現的趨勢做判斷
G5：判別使用合適的圖像來表達數據	(1) 能夠判斷並以合適的圖像來表達數據
	(2) 能夠瞭解並應用不同的圖像來表達相同數據的意義
G6：避免只依個人主觀解讀圖表	(1) 能夠透過圖像客觀地判斷事實
	(2) 能夠瞭解圖像使用者的目的，從而避免各種誤讀的情況

資料來源：李健恆、楊凱琳（2012）。從統計認知面向與圖表理解角度分析國中數學教科書的統計內容。《教科書研究》，5（2），31-72。

以下利用李健恆與楊凱琳（2012）所整理出的圖表理解分析表，提供德國教科書中的例題，以說明圖表理解的6項類目，並簡述分類之準則。同樣地，一個分析單位中可

能包含兩種或以上的圖表理解次類別。

1. 認識圖像的元素

Beispiel 1

Frisch geerntete Kartoffeln enthalten 78 % Wasser, 18 % Stärke und 2 % Protein.

a) Stelle die Angaben in einem Kreisdiagramm dar.

範例 4：

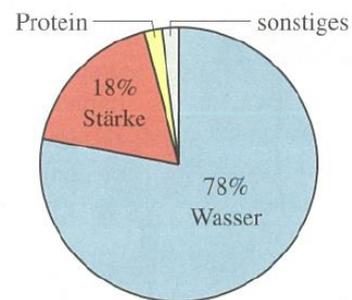
新鮮的馬鈴薯中含有 78%的水份，18%的澱粉和 2%的蛋白質（剩下 2%為其他物質）。

(a) 根據以上數據完成圓形圖。

資料來源：Lambacher Schweizer Mathematik 7 (p.127) by August Schmid and Dr. Ingo Weidig, 2003. Ernst Klett Verlag GmbH.

Lösung:

a)

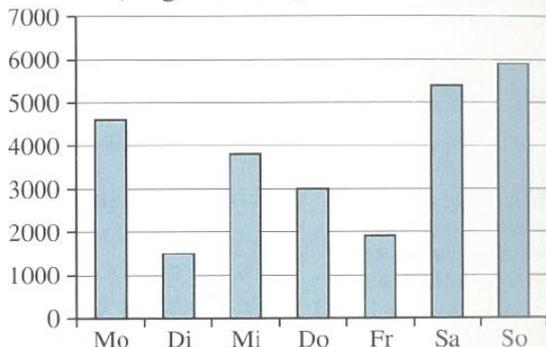


此題目提供原始數據，要求學生畫出指定的統計圖。該題亦點出圓形圖的特性，當數據用百分比呈現時，用圓形圖表示更能看出數據占整體比例之大小。另外，圓形圖整體數據相加要為 100%，該題目刻意未將全體數據完整列出，即是要學生瞭解此特性，以求出馬鈴薯中「其他」的比例。

2. 講述圖表所呈現的現象

Beispiel 2

Ermittle den mittleren Umsatz der Eisdiele Venezia (Angaben in €).



Lösung:

$4600 + 1500 + 3800 + 3000 + 1900 + 5400 + 5800 = 26000$; $26000 : 7 \approx 3700$
Der mittlere Tagesumsatz betrug etwa 3700€.

範例 5：

下圖顯示 Venezia 冰淇淋店的每日營業額，求該店的每日平均營業額為多少（歐元）？

解法： $4600+1500+3800+3000+1900+5400+5800=26000$

$26000 : 7 \approx 3700$ （歐元）

資料來源：Lambacher Schweizer Mathematik 7 (p.124) by August Schmid and Dr. Ingo Weidig, 2003. Ernst Klett Verlag GmbH.

此題要求學生從統計圖表中讀取相對應的數據，並根據統計量的定義計算平均數之值。由長條圖呈現該筆資料，更能看出並不是每筆資料都適合用平均數當作代表數據，尤其是有極端值出現時，整筆數據便不能用平均值客觀呈現。

3. 理解圖表、圖像和被分析數據之間的關係



5

Bei einem Zufallsexperiment werden zwei Würfel gleichzeitig geworfen und als Ergebnis die Summe der beiden Augenzahlen notiert.

- Welche Ergebnisse sind bei einem Wurf möglich?
- Führe das Experiment 100-mal durch und notiere die Ergebnisse.

- Erstelle eine Tabelle mit den absoluten und den relativen Häufigkeiten der Ergebnisse.
- Zeichne ein Säulendiagramm mit den relativen Häufigkeiten der Ergebnisse.
- Fällt dir bei der Auswertung des Zufallsexperimentes etwas auf? Versuche deine Beobachtungen zu erklären.

範例 6：

在一隨機實驗中，同時投擲兩粒相同的骰子，並記錄骰子上的點數和。

- 有哪幾種可能的點數和？
- 投擲兩粒骰子 100 次並將結果記錄下來。
- 計算出現點數和的絕對頻率與相對頻率，將結果整理成表格。
- 用長條圖表示出現點數和的相對頻率。
- 在此隨機實驗的評估中你注意到什麼，試著解釋你所觀察到的現象。

資料來源：Lambacher Schweizer Mathematik 6 (p.51) by August Schmid and Dr. Ingo Weidig, 2003. Ernst Klett Verlag GmbH.

該題僅有 (c)、(d) 與 (e) 三個選項須分類，其中選項 (d) 跟 (e) 要求學生將相

對頻率的數據轉換成長條圖，透過長條圖上提供的訊息描述點數和分布情形，並闡述從長條圖中所看到的現象。學生應該會得到點數和為 7 的相對頻率最大，點數和為 2 與 12 的相對頻率最小，且長條圖的分布情形應接近鐘形曲線，因此推斷隨機投擲兩粒骰子出現的點數和機率為多少。

4. 解釋圖像所呈現的資訊

Anzahl der Würfe	Einser	Zweier	Dreier	Vierer	Fünfer	Sechser
50	0.16	0.22	0.10	0.14	0.08	0.18
150	0.17	0.22	0.12	0.17	0.13	0.18
250	0.19	0.21	0.10	0.17	0.16	0.17
350	0.19	0.19	0.10	0.17	0.17	0.17
450	0.19	0.18	0.10	0.17	0.18	0.17
550	0.18	0.17	0.12	0.17	0.18	0.17
650	0.17	0.17	0.14	0.17	0.18	0.17
750	0.17	0.16	0.15	0.17	0.19	0.17
850	0.17	0.15	0.15	0.17	0.18	0.17
950	0.17	0.15	0.15	0.17	0.18	0.17
1050	0.17	0.15	0.15	0.17	0.18	0.17

4

Das nebenstehende Diagramm zeigt das Ergebnis einer Computersimulation für das 1050-malige Werfen eines Würfels. Dabei hat der Computer mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogrammes die relativen Häufigkeiten für $n = 50, 150, \dots, 1050$ berechnet und in das Diagramm eingetragen. Zur besseren Übersichtlichkeit wurden für jede Augenzahl die einzelnen Punkte durch Strecken verbunden.

- Beschreibe, wie sich die relative Häufigkeit bei zunehmender Wurfzahl für die Augenzahlen 2, 3 und 4 ändert.
- Welche relativen Häufigkeiten würdest du für noch wesentlich größere Wurfzahlen erwarten?
- Überprüfe deine Vermutung aus b) mit einem geeigneten Simulationsprogramm.

範例 7：

利用電腦模擬投擲一粒骰子達 1050 次，分別計算出各面骰子投擲次數 $n=50,150,\dots,1050$ 的相對頻率，再將結果值輸入圖表中，如左圖所示。

為了清楚呈現各點數出現的相對頻率，將每個結果透過直線連接起來。

(b) 根據左方統計圖形，你認為每面骰子出現的頻率大約是多少？

資料來源：Lambacher Schweizer Mathematik 6 (p.57) by August Schmid and Dr. Ingo Weidig, 2003. Ernst Klett Verlag GmbH.

此題目結合機率單元的內容，利用折線圖呈現投擲骰子的相對頻率之結果，透過折線圖的發展趨勢，學生可以預測當投擲次數越來越大時，每面骰子出現的相對頻率會接近一定的值，進而得到每面骰子出現的機率值。德國教科書中出現不少統計圖與其他單元結合的題型，完整的題型分類會在第四章詳細列出。

5. 判別使用合適的圖像來表達數據

Beispiel 1

Lies aus dem Säulendiagramm die Flächen von Oberbayern und von Mittelfranken ab. Wie viel Prozent der Gesamtfläche Bayerns sind das jeweils? Erstelle ein Diagramm, das die beiden Anteile gut darstellt.

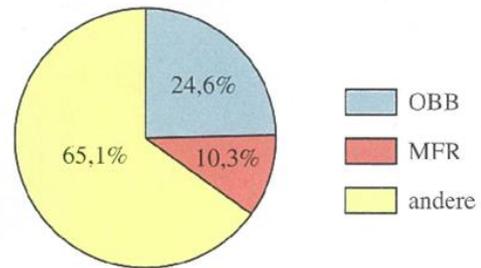
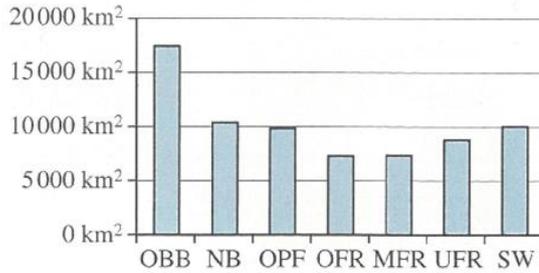
Lösung:

Oberbayern (OBB): ca. 17 500 km²

Mittelfranken (MFR): ca. 7 300 km²

Insgesamt: ca. 71 000 km²

OBB: 24,6% MFR: 10,3%



範例 8：

下方長條圖顯示巴伐利亞州各個行政區的面積。

(1) 請問上巴伐利亞行政區 (OBB) 與中弗蘭肯行政區 (MFR) 的面積占整個巴伐利亞州的百分比為多少？

(2) 選擇合適的統計圖呈現巴伐利亞行政區和中弗蘭肯行政區的百分比。

解法：

上巴伐利亞行政區 (OBB)：約 17500 公里

中弗蘭肯行政區 (MFR)：約 7300 公里

總計 (巴伐利亞州)：約 71000 公里

OBB：24.6% MFR：10.3%

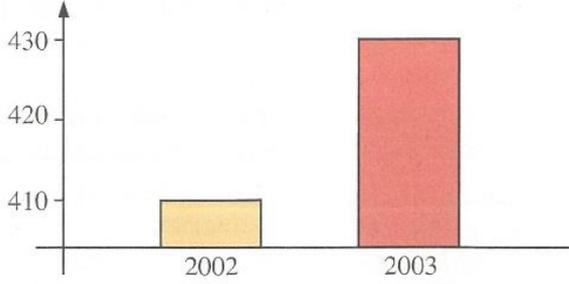
資料來源：Lambacher Schweizer Mathematik 7 (p.119) by August Schmid and Dr. Ingo Weidig, 2003. Ernst Klett Verlag GmbH.

在面對此題目時，學生必須自行選擇合適的統計圖形以表達數據，並瞭解用長條圖與圓形圖表達相同數據時有何差異。長條圖注重各個組成部分間的差異，藉由對圖形長度的感受，很容易就能看出數據間的差；而利用圓形圖呈現的資料應為百分比的數值，且所有數據相加應為 100%，再配合圓形圖上線條所呈現的角度，立即就能看出各部分

在整體資料中的組成與比例。因此想知道數據間的差異適合用長條圖，想瞭解各部分占整體多少比例適用於圓形圖。

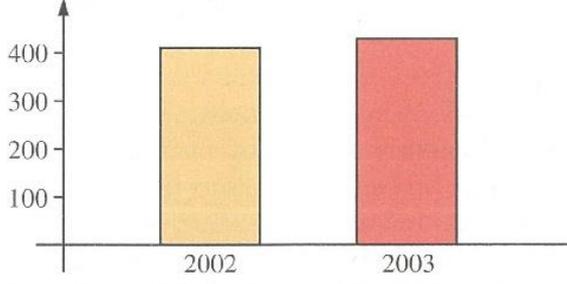
6. 避免只依個人主觀解讀圖表

Beispiel:
Die Kriminalpolizei meldet: Die Zahl der Raubüberfälle ist im vergangenen Jahr drastisch angestiegen.



Nimm zu der Aussage und dem Diagramm Stellung. Zeichne selbst ein Diagramm und gib den prozentualen Zuwachs an.

Lösung:
Die Zahl der Raubüberfälle hat tatsächlich zugenommen. Das Diagramm gibt aber einen deutlich überzeichneten Eindruck.



Der Unterschied wirkt hier deutlich geringer.
 $20 : 410 = 0,0487... \approx 4,9\%$
Der Anstieg der Überfälle beträgt 4,8%.

範例 9：

刑事調查部的報告指出：在過去一年裡，搶劫案件的數量急遽上升。

對上述資訊與下方的統計圖表提出你的看法，指出是否誤用統計圖，並重新繪製合理的統計圖，計算出搶劫案件的增加率。

解法：

搶劫案件的數量實際上確實有所增加，但是，下方統計圖刻意誇大其增加的變化量，事實上兩年的搶劫案數量差異不大： $20 : 410 = 0.0487... \approx 4.9\%$ 。

因此，搶劫案的增加率為 4.8%。

資料來源：Lambacher Schweizer Mathematik 6 (p.185) by August Schmid and Dr. Ingo Weidig, 2003. Ernst Klett Verlag GmbH.

此題再次強調長條圖的縱軸上應從 0 開始，並要求學生畫出正確的統計圖，另外，根據統計量的定義計算出增加率之值。此種類似題型一再出現，目的在於希望學生透過學過的統計知識，對統計圖所呈現的結果做出正確的判斷，避免產生錯誤的解讀。

第四節 資料處理及分析

本節將說明對所蒐集的資料之分析過程，包括分析資料之單位與編碼原則，以及本研究之信效度考驗。為了將德國與臺灣教科書的分析結果進行比較，引用李健恆與楊凱琳（2012）對臺灣國中教科書的分析結果，以下簡述其分析過程。

臺灣教科書版本 A、版本 B 信度分析流程與本研究相同，先選取臺灣教科書中與統計相關單元的例題，再依照統計知識與圖表理解各類別定義歸類，最後進行信度計算與分析。兩版本教科書的分析單位為附有解題說明的例題、學生自行操作的練習題，包括隨堂練習、動動腦、自我評量、基礎評量、進階評量的部分。因此，引用此兩版本教科書在統計認知與圖表理解的分配數據，與德國教科書的分析結果進行比較並無不妥，接下來針對德國教科書的分析過程進行詳細說明。

一、 資料處理

本研究將德國教科書之內容以單元與小節作為切割，小節內除了課文內容、例題（Beispiel）與作業題（Aufgaben）外，另有專題討論（Projekt）、課題（Thema）、重點回顧（Rückblick）、作業複習題（Aufgaben zum Üben und Wiederholen）等學習內容與活動。為使研究結果更為完整，課文內容之例題與作業題、課題的例題、每小節末重點回顧接續的作業複習題皆列入分析範圍，專題討論的例題則不列入；為使題目分類過程更嚴謹，採用兩組評分員進行題目分類。

（一） 分析單位

本研究以教科書中「單元（節）」作為區分單位，並以「題」為最小分析單位。以下敘述「題」的定義：

1. 題目之敘述僅包含一個問題者，計數為一題。以下提供 LSM 版教科書中的題目為範例：

9

In den beiden Diagrammen wird jeweils die Automobilproduktion für einen Neuwagentyp in den Jahren 2003 und 2004 dargestellt. Vergleiche die beiden Diagramme und nimm insbesondere dazu Stellung, ob sie den Sachverhalt korrekt wiedergeben.

範例 10：

左方兩幅圖顯示 2003 年與 2004 年汽車的新車生產數量。

比較兩張圖，判斷哪一張圖正確地表達事實。

資料來源： Lambacher Schweizer Mathematik 7 (p.122) by August Schmid and Dr. Ingo Weidig, 2003. Ernst Klett Verlag GmbH.

2. 一個題目中包含兩個或以上問題之題組者，各小題分別計數為一題。

以下提供 LSM 版教科書中的題目為範例：

4

In dem Diagramm sind die monatlichen Niederschläge an einem mittelfränkischen Ort dargestellt. Warum werden sie bezogen auf eine Längeneinheit angegeben?

a) Berechne die mittleren monatlichen Niederschläge in den vier Vierteljahren.
b) Berechne die mittleren monatlichen Niederschläge für das Jahr.

範例 11：

左圖顯示了法蘭克中部城鎮的月降雨量，請問降雨量為什麼是以長度單位（mm）表示，而不是用容積單位？

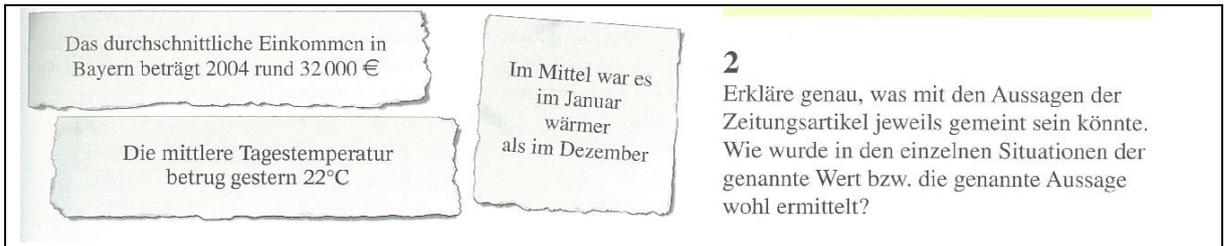
(a) 計算四個季節分別的平均月降雨量。

(b) 計算當年的月平均降雨量。

資料來源： Lambacher Schweizer Mathematik 7 (p.133) by August Schmid and Dr. Ingo Weidig, 2003. Ernst Klett Verlag GmbH.

3. 一個題目中中含有兩個或以上的報紙資訊，需要學生個別判斷，將每一

則報導視為一個題目。以下提供 LSM 版教科書中的題目為範例：



2
Erkläre genau, was mit den Aussagen der Zeitungsartikel jeweils gemeint sein könnte. Wie wurde in den einzelnen Situationen der genannte Wert bzw. die genannte Aussage wohl ermittelt?

範例 12：

左方提供三份報紙資訊，請正確地解釋報紙文章中的敘述，並說明如何確立文章中的資訊。

(左上) 2004 年巴伐利亞州人民的平均收入約為 32000 歐元。

(左下) 昨日的平均氣溫為 22 度 C。

(右) 1 月份的平均溫度比 12 月份的平均溫度溫暖。

資料來源：Lambacher Schweizer Mathematik 7 (p.123) by August Schmid and Dr. Ingo Weidig, 2003. Ernst Klett Verlag GmbH.

根據分析單位之定義，LSM 版第 6 冊與 LSM 版第 7 冊兩本教科書的題目共計 120 題，其中 33 題為課文例題，剩餘 87 題為非課文中的題目，包括作業題、專題討論的題目、每小節後的作業練習題。課文例題與非課文中的題目分別由第一組、第二組評分員負責分類。

(二) 編碼原則

為便於各評分員歸類題目，針對德國 LSM 版教科書中與統計相關單元之例題進行編碼，編碼原則詳述如下：

1. 第一碼：以 6 代表德國教科書第 6 冊用書 (Lambacher Schweizer Mathematik 6)；以 7 代表第 7 冊用書 (Lambacher Schweizer Mathematik 7)。
2. 第二碼：以數字代表第幾單元。
3. 第三碼：

- (1) 以數字代表單元中的第幾小節；
 - (2) 以字母「T」代表專題討論的題目；
 - (3) 以字母「A」代表接續於重點回顧後的作業練習題。
4. 第四碼：以數字代表第幾題。
 5. 第五碼：若該題為題組題，以原題幹編號代表第幾小題。

依據上述編碼原則，若題目編碼為「6-8-5-8(a)」，意即該題為教科書第6冊第8單元〈百分比計算與圖表〉中第5小節〈錯誤的百分比和圖表〉的第8題中的(a)小題；若題目編碼為「7-6-T-4」，意即該題為教科書第7冊第6單元〈數據、圖表與百分比計算〉中的專題討論〈中位數與盒狀圖〉的第4題。

二、信度

本研究的於統計認知、圖表理解分類後的結果，採取「評分者信度」作為信度檢驗之方法。藉由評分者信度，得到各評分員間的一致性程度與評分差異，評分員間對同單位的同意度與一致性越高，則該研究的信度越高(郭玉生, 2005)。以下說明評分員的組成與信度分之析步驟：

(一) 評分員組成

本研究的信度檢驗由兩組評分員共同參與，每組評分員包含研究者皆有三位評分員，第一組評分員負責分類課堂教學例題，第二組評分員負責分類非課堂教學例題。課文內容、例題(Beispiel)與作業題(Aufgaben)外，另有專題討論(Projekt)、課題(Thema)、重點回顧(Rückblick)、作業複習題(Aufgaben zum Üben und Wiederholen)

第一組評分員A為中央大學學習與教學研究所博士候選人，畢業於高師大數學系與臺中教育大學數學教育研究所，具備中等數學師培生資格並擁有中等教師證。曾擔任過國中學校代課教師，教學經驗豐富並熟悉小學至高中之數學

教材，在信度檢驗的過程中更擔任數學教育學者的角色。另一位評分員 B 則為中央大學數學所的學生，目前正修讀中等教育學程，對數學教材有一定的認識。

第二組評分員由 A 與另一位評分員 C 組成，評分員 C 同為中央大學學習與教學研究所博士，同時為新北市立明德高級中學退休教師，具有豐富數學教學經驗，且曾擔任康軒文教集團的教科書諮詢委員，熟悉國內教科書的編寫脈絡與教學內容，具備專業的審查觀點以分類教科書。

(二) 信度分析流程

1. 選取樣本：於德國教科書 LSM 第 6 冊、LSM 第 7 冊中選取與統計相關單元中的課本例題、作業例題、專題討論例題、作業練習題作為樣本，並進行文本翻譯。
2. 說明與解釋：將統計認知表、圖像理解分析表發給各評分員閱讀，並說明分析單位，釐清各類別之定義及分類準則。
3. 分類：研究者與評分員各自根據類別定義與分類準則，進行題目在類別上的歸類。
4. 信度計算：依照各評分員分類的結果，計算出評分員之間的相互同意值 (P_i) 與平均相互同意值 (P)，再分別帶入信度 (R) 公式計算。計算公式詳列如下：

(1) 相互同意值 (P_i)

$$P_i = \frac{M_i}{K}$$

P_i ：第 i 組相互同意值

M_i ：第 i 組兩人共同同意的題目數

K ：每位評分員評定的項目數

(2) 平均相互同意值 (P)

$$P = \frac{\sum_{i=1}^N P_i}{N}$$

N ：評分者兩兩相互比較的次數，意即 $N = C_2^n$

(3) 信度 (R)

$$R = \frac{nP}{1 + (n-1)P} \quad (\text{歐用生, 1991})$$

n ：評分員總人數

利用上述公式進行計算，將各評分員的相互同意值、平均相互同意值與信度統整如下表（表 19），依據伯格納（Gerbner）之文化指標，以 0.80 為信度係數標準。第一、二組評分員於統計認知的信度為 0.95 與 0.93，圖表理解的信度為 0.93 與 0.95，皆高於 0.80，因此具有良好的信度。

表 19

第一組、第二組評分員相互同意值表

第一組評分員相互同意值表					
統計認知分析			圖表理解分析		
	評分員 A	評分員 B		評分員 A	評分員 B
評分員 B	0.818		評分員 B	0.8	
研究者	0.848	0.939	研究者	0.8	0.95
平均相互同意值	P=0.868	R=0.95	平均相互同意值	P=0.85	R=0.94
第二組評分員相互同意值表					
統計認知分析			圖表理解分析		
	評分員 A	評分員 C		評分員 A	評分員 C
評分員 C	0.793		評分員 C	0.854	
研究者	0.873	0.804	研究者	0.909	0.89
平均相互同意值	P=0.823	R=0.93	平均相互同意值	P=0.884	R=0.95

三、效度

本研究採取專家效度，將研究工具交給相關的專家、學者，請其評估評量題目的適切性。在將課文與題目翻譯成中文時，互相參照德文、英文與中文三種語言，多次修訂文本內容或題幹敘述，並與專家討論題目內容之用字遣詞的適切性，包括語句表達的意思是否會讓讀者產生閱讀上認知的誤差，或題目陳述方式是否太過冗長等。

在分析類目表上，多次與專家、評分員討論各類別之定義，釐清會造成分類混淆的詞彙，接著再進行題目的歸類。另外，本研究採用的統計認知分析表、圖表理解分析表，為國外統計教科書採用之分析類目，在國內有許多研究學者皆採用此兩種類目表，因此具有一定的效度。

第四章 資料分析結果

本研究以「統計認知分析表」與「圖表理解分析表」為工具，分析德國教科書 LSM 版中與統計相關的教材內容，以瞭解各統計認知與圖表理解所占比例、教材編排之架構與脈絡。本章共分為四節，第一節為德國教科書統計題目分析結果，第二節為統計教材架構與編寫脈絡，第三節為題型概念分析，第四節為分析結果統整。

第一節 德國教科書統計題目分析結果

本研究以「題」為分析單位，題目來源均從教科書中選取，包含課文例題(Beispiel)、作業題 (Aufgaben)、課題 (Thema) 中的例題、作業複習題 (Aufgaben zum Üben und Wiederholen)，不包含習作或其他練習教材等。

本節將會統整出統計認知與圖表理解各類目於 LSM 版教科書中所佔題數，以瞭解教材中各認知類目所佔的百分比。統計認知與圖表理解的每項子類目均可複選，因此同一道題目可能含有兩種或兩種以上的認知或圖表類目。

另外，引用李健恆與楊凱琳於 2012 年分析國內中學數學教科書 (版本 A、版本 B) 的分析結果，以呈現臺灣與德國在學習內容上統計認知、圖表理解層次的差異，提供教科書編撰者設計教材的建議。

一、 統計認知分析結果

根據統計認知的分析結果 (表 20)，以下分別說明德國教科書於統計知識、統計推理與統計思考三認知層次的分析結果，並簡述與臺灣教科書的比例差異。

(一) 統計知識分析結果

德國 LSM 版教科書中統計知識以「L7：繪製圖像」、「L3：代數計算」、「L9：解讀圖表」占較多比例，分別為 29%、20%、15%。其中繪製圖像為依照題目指定的統計圖進行繪製；代數計算則為利用平均數、中位數、百分位數

等公式進行數值運算；解讀圖表則須根據圖表呈現的資料進行計算，包含隨時間改變而產生的變化量、計算平均數或百分比等。

將臺灣教科書版本 A、版本 B 的分析結果與德國教科書 LSM 版比較，發現台灣與德國教科書的統計知識皆以「L3：代數計算」、「L7：繪製圖像」兩類目佔整體比例較高，而「L5：概念判斷」與「L6：設計數據」佔整體比例極低，版本 A 甚至無該層次的題目，可知臺灣教科書較少設計需要判斷統計訊息之正確性的題目，或要求學生設計符合統計資訊的數據。反觀，德國 LSM 版在此兩類目的比例佔一定的比重（10%），且每個分類細目均有一定題數。

在報讀圖表與解讀圖表的認知層次上，德國 LMS 版多「L9：解讀圖表」的題目，即需要透過圖表上的數據進行運算；臺灣教科書則在「L8：報讀圖表」上佔較多比例，直接讀取圖表資訊就可回答問題。由此可知，德國教科書的題目設計朝向多元導向，題目要求亦偏重較高的統計知識層次。

（二） 統計推理分析結果

德國 LSM 版教科書於統計推理中以「解釋（2）」、「推理」兩層次佔較高比例，分別為 40%與 30%，此兩項能力包括自行選擇適合的工具對題目進行分析，且從分析的結果中解釋數據所代表的現象，或是利用理解的統計概念，根據數據的集中或分散情形進一步推論。

臺灣教科書版本 A 與版本 B 則完全無屬於該層次的題目，整體來看（表 21），兩版本於統計推理的題目數量明顯不足，只有少數比例的題目需要藉不同工具分析數據的集中和分散情形，並瞭解其意義，或是透過理解的統計概念進行預測。

（三） 統計思考分析結果

德國教科書在統計思考的認知層次屬「批判和評估」佔最高，其比例為 47%，

估整體統計思考層次將近一半的比例，可見其重視於培養學生批判與評估的認知能力，提供有待評估的統計資訊或數據，讓學生養成質疑批判的統計學習態度，積極設計屬於統計素養的教學內容。

臺灣兩版本之教科書完全忽略統計思考的認知層次，均無提供屬於該層次的教學情境或題目給學生，包括由日常生活現象中主動形成可探討的問題、提出解答問題的收集方式及理由、選擇合適的分析方法以回答問題，以及對已建構好的統計資訊或結果進行批判或評估等例題。

表 20
德國與臺灣教科書之統計認知分析比例表

主類目	次類目	德國 LSM 版	臺灣版本 A	臺灣版本 B
L. 統計知識 (Literacy)	L1：分組計次	4 (3%)	2 (2%)	6 (9%)
	L2：表格轉換	7 (5%)	10 (10%)	13 (19%)
	L3：代數計算	28 (20%)	26 (27%)	20 (29%)
	L4：計算簡化	17 (12%)	1 (1%)	10 (14%)
	L5：概念判斷	9 (6%)	0 (0%)	2 (3%)
	L6：設計數據	5 (4%)	0 (0%)	1 (2%)
	L7：繪製圖像	21 (15%)	16 (16%)	12 (17%)
	L8：報讀圖表	9 (6%)	24 (25%)	2 (3%)
	L9：解讀圖表	40 (29%)	18 (19%)	3 (4%)
R. 統計推理 (Reasoning)	R1：解釋 (1)	1 (5%)	4 (67%)	4 (100%)
	R2：解釋 (2)	8 (40%)	0 (0%)	0 (0%)
	R3：預測	5 (25%)	2 (33%)	0 (0%)
	R4：推理	6 (30%)	0 (0%)	0 (0%)
T. 統計思考 (Thinking)	T1：形成問題	4 (11%)	0 (0%)	0 (0%)

(續下頁)

T2：收集數據	12 (31%)	0 (0%)	0 (0%)
T3：選擇分析方 法	4 (11%)	0 (0%)	0 (0%)
T4：批判和評估	18 (47%)	0 (0%)	0 (0%)

(四) 整體統計認知分析結果

根據整體的統計認知分析結果，德國 LSM 版教科書「統計知識」佔統計認知層次中最多比例，此部分與臺灣兩個版本的教科書相同，但是將 LSM 版於「統計推理」與「統計思考」所占之百分比相加，發現佔整體統計認知層次將近 $\frac{1}{3}$ （可見圖 10）。德國教科書雖以統計知識為主要認知層次，但在另外兩個層次仍有一定比例的題目，並無完全偏重於統計知識。

反觀臺灣教科書於統計推理與統計思考兩層次明顯內容不足，題目設計完全偏重於統計知識，兩版本於該層次的比例皆高達九成以上。版本 A 與版本 B 於「統計推理」的題目設計比例偏低，關於「統計思考」的認知層次甚至無提供任何學習內容，由此可知臺灣教科書著重於熟練基本的統計能力。

表 21
德國與臺灣教科書之統計認知三層次比例分配表

	德國 LSM 版	臺灣版本 A	臺灣版本 B
L. 統計知識	140 (71%)	97 (94%)	69 (95%)
R. 統計推理	20 (10%)	6 (6%)	4 (5%)
T. 統計思考	38 (19%)	0 (0%)	0 (0%)

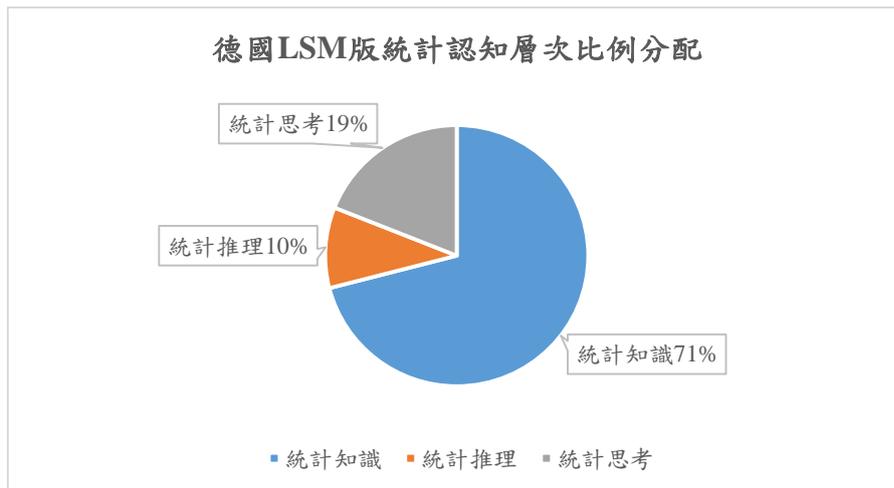


圖 10 德國 LSM 版統計認知層次比例分配圓形圖

二、圖表理解分析結果

針對教科書中含有統計圖表或題幹敘述要求學生畫出統計圖表的題目，進行圖表理解分析表的歸類，此處提到的統計圖表包含一維表格、二維表格(如：列聯表)、長條圖、直方圖、折線圖、圓形圖、盒狀圖。每一道題目均有可能具有兩種或兩種以上的圖表理解層次，但此種題型較少。

根據圖表理解分析的結果(表 22)，德國教科書於圖表理解分析的比例屬「G2：講述圖表所呈現的現象」最高，大多題目需透過統計圖表給予的資訊以讀取相應的數值，或利用圖表上的數值進行統計量的計算。再將圖表理解較高層次「G5：判別使用合適的圖像來表達數據統計推理」與「G6：避免只依個人主觀解讀圖表統計思考」所占百分比相加，則發現佔整體圖表理解層次將近 $\frac{1}{4}$ (圖 11)。根據題目分析，LSM 版教科書除了讓學生繪製指定的統計圖，還須學生自行判斷合適的統計圖來表達數據，且要瞭解同一筆數據以不同統計圖呈現的意義；針對統計圖表的批判思考能力，提供以錯誤思維建構而成的圖表，激發學生思考如何改以正確觀念繪製統計圖表或讀取資訊。

臺灣教科書於 G5、G6 兩層次的題目比例佔極少數，題目大多著重基本統計圖的繪製、從圖表中讀取出題目所需答案，或利用已知的統計概念說明圖像所表達的數據。相對較少屬於圖表理解高層次的教學內容，兩版本皆較不注重對圖像資訊進行推論，也較

少設計須學生自行選擇統計圖呈現數據的題目，且完全無提供「該如何避免誤讀統計圖表」的教學內容。

表 22

德國與臺灣教科書之圖表理解分析比例表

次類目	德國 LSM 版	臺灣版本 A	臺灣版本 B
G1：認識圖像的元素	20 (24%)	7 (17%)	7 (47%)
G2：講述圖表所呈現的現象	36 (44%)	21 (50%)	5 (32%)
G3：理解圖表、圖像和被分析數據之間的關係	1 (1%)	11 (21%)	1 (7%)
G4：解釋圖像所呈現的資訊	6 (7%)	3 (7%)	1 (7%)
G5：判別使用合適的圖像來表達數據	12 (15%)	2 (5%)	1 (7%)
G6：避免只依個人主觀解讀圖表	7 (9%)	0 (0%)	0 (0%)

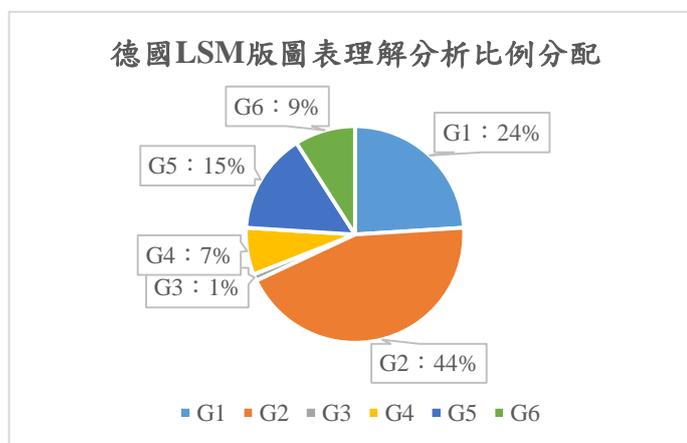


圖 11 德國 LSM 版圖表理解分析比例分配圓形圖

三、 綜合討論

綜合上述分析，德國教科書的統計知識著重於代數計算、繪製圖像與「解讀圖表」，臺灣教科書重視的層次則是代數計算、繪製圖像與「報讀圖表」，其中報讀與解讀的差異在於，報讀單純要求學生讀取出統計圖表上的資訊，只瞭解圖表上表面的數值，未深入探討圖表深層意義，而解讀除了讀取數據外還需要作一些簡單的運算。

針對統計推理與思考能力，德國 LSM 版的題目包含瞭解數據的集中和分散情形、從分析結果解釋數據代表的意義，與根據圖表上的資訊預測未來發展等內容，額外強調統計訊息與圖表的反思能力，包括判斷統計概念的正確性、認識並避免統計圖表的主觀誤讀，可見其重視迷思概念的釐清，以培養學生具備批判性思維。

而在圖表理解分析表的類別中，LSM 版教科書除了納入「繪製統計圖表」、「從圖表上讀取出數據」的題目外，另外將「圖像預測發展趨勢」以及「自行選擇統計圖進行繪製」等學習內容列入教材設計中，加上圖表理解的「避免只依個人主觀解讀圖表」與統計知識的「批判與評估」的層次均有不少比例的題目，由此可知德國積極培養學生具備批判質疑的態度，以因應國民的統計素養教育。

總體來說，LSM 版教科書的統計學習內容雖著重於統計知識，但統計推論與統計思考仍佔有一定的題目比例，並未將統計認知完全集中於統計知識。對比於國內教科書，著重於熟練統計知識的學習目標，絕大部分的題目利用基本的統計觀念即可回答，完全缺乏屬於統計思考層次的教材內容，也無提供學生對統計結果之背後意義進行探討的機會。關於圖表理解的分析，只要求學生透過圖表的資訊進行基本統計量計算，例如：平均數、百分比等，或是直接讀取圖表上的數據以回答問題，未要求其根據圖像呈現的趨勢作出判斷與預測，亦較少提供自行選擇圖表繪製的機會，甚至完全忽略認識與避免統計圖表的誤讀情形。

第二節 統計教材架構與編寫脈絡

本節將會整理 LSM 版第 6 冊、LSM 版第 7 冊中統計相關單元之編排順序，繪製出教學架構圖，以瞭解教材編寫之脈絡與教學流程。透過統整教材編寫脈絡，可以瞭解該教科書於統計單元中，期許學生應具備的起點行為與學習目標。

一、德國教科書 **Lambacher Schweizer Mathematik** 教材架構圖

此處以教材架構圖列出各單元與各小節的名稱，與教科書中統計單元的教材內容，

包括學習內容、Aufgaben (作業題)。接著呈現 LSM 版第 6 冊、LSM 版第 7 冊的教材脈絡圖，並簡述教學內容與作業題。

(一) Lambacher Schweizer Mathematik 6 教材架構圖

在德國教科書六年級的教材內容中，於單元二「相對頻率」中正式出現與統計相關的課程。在正式導入收集與評估數據的課程之前，利用擲骰子的活動將結果用一維表格記錄下來 (如圖 12)，接著提高擲骰子次數並搭配頻率機率主題，將絕對與相對頻率的計算填入表格 (如圖 13)。

Augenzahl	1	2	3	4	5	6

圖 12 骰子投擲結果紀錄表

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit	7	6	10	9	8	10
relative Häufigkeit	$\frac{7}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{10}{50}$

圖 13 絕對與相對頻率統計表

第二小節「收集與評估數據」，首先利用問卷調查某班級最喜歡的顏色、動物與運動，利用表格呈現統計結果的絕對與相對頻率，並繪製出長條圖。再透過長條圖呈現的數據，判斷該班最多人喜歡的顏色、動物等問題，以及要求學生主動聯想是否還有更多可調查的問題。為方便統計調查結果次數，可利用計數符號「冊」快速收集數據，接著介紹如何正確評估數據，當我們談及「男生與女生誰較喜歡某種動物時」，應參考相對頻率之值，而非只考慮絕對頻率之結果。

在第二小節最後的部分，介紹可同時呈現兩種類別資料的工具—列聯表，此處採取兩個類別變項之間的關係進行討論 (例如：喜歡的動物與性別之間的關係，橫列類別項目為喜歡貓、喜歡其他動物，直欄類別項目為男生、女生。)，表格內可填入絕對與相對頻率之值。最後搭配例題說明，將看似不完整的資料填入列聯表，透過同行或同列兩個已知數求得未知的第三項數值，例如：調查

班上男生與女生同學的居住地，已知有 30%的同學與 10%的女生同學來自非學校所在城市、班上有 60%的男生，要求學生推論出居住於該城市之女生同學的比例。該題利用列聯表（如圖 14）將已知數據列出（紅色部分），並利用橫列或縱行的兩類別項目之相對次數和皆為 100%，便可從已知比例計算出題目所需答案。

	Junge	Mädchen	
auswärtig	20%	10%	30%
einheimisch	40%	30%	70%
	60%	40%	100%

圖 14 性別與居住地關係表

第八單元第五小節為「百分比計算與圖表」，首先例題列出幾個日常生活中會看到的統計語言，包括漲跌率、平均坡度、離婚率與選票率的定義，以及呈現繪製統計圖表時會有的錯誤概念，從生活經驗中找出與統計有關的連結，並提醒學生避免過度主觀判斷報章雜誌資訊。

第六小節為「表示變量之間的關係」，通常我們會以折線圖呈現類別項目間的關係，例如：年代與銷售量，再將每個節點予以直線相連，僅有各節點具有數據意義，若欲呈現兩類別項目的「連續變化量」則應以函數圖形呈現。該節主要以函數圖形來呈現兩個變量間的變化關係，並讀取函數圖形上的數據，將原始數據轉換至一維表格上，例如：每小時的溫度變化圖、每年的身高成長圖、重量與價格的關係圖。最後搭配速率主題，將速率與時間的變化以函數圖形呈現，並判讀函數圖形各節點之間的關係，例如：用函數圖形呈現上學路線，藉由時間與位移之間的關係，得知到學校中哪段時間是乘坐地鐵是步行。上述說明簡列於 LSM 第六冊教材架構圖（圖 15）。



圖 15 Lambacher Schweizer Mathematik 6 教材架構圖

(二) Lambacher Schweizer Mathematik 7 教材架構圖

七年級教科書的第六單元為「數據、圖表與百分比計算」，第一小節為分析圖表上的數據。首先，利用調查班上學生的出生季節，將結果以統計圖呈現，此處要求學生自行選取收集數據的方式，並選擇合適的統計圖以表達數據。接著，利用直方圖呈現道路測速器之統計結果（如圖 16），讀取直方圖上的數據回答相關問題，並利用數據計算超速車輛占整體車輛數的百分比。該題直方圖的類別項目為連續型資料（組距為時速幾公里至幾公里），但與常見的直方圖有些微差距，即各相鄰長條間彼此不相連。

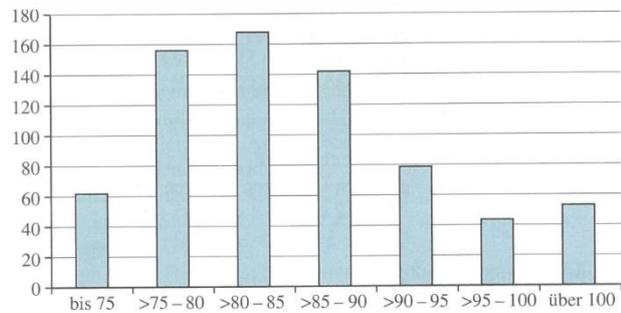


圖 16 測速結果統計圖

課文正式介紹圓形圖、直長條圖與橫長條圖，並說明各個統計圖的使用時機，目的在於使學生瞭解利用不同統計圖來表達同一筆數據的差異為何，例如：利用圓形圖呈現數據可方便直接看出資料占整體的比例，其重視的是每塊扇形的相對大小，至於每塊扇形和整個圓的實際大小並不重要。另外，各分類之百分比即為扇形角度，並強調在圓形圖上的百分比數據相加起來應為 100%。而直長條圖與橫長條圖的特性在於可藉由橫列或直條之長度，立即看出整體數據的最大或最小值，且大部分的數據皆可利用長條圖呈現結果，使用普遍率極高。

接著課文提到有關圖片搭配統計數據時易產生的錯誤概念，當用圖片表達數據的大小差異時，時常會誇大數字原本的差距，例如：用兩張一大一小的水杯圖片分別表達 200 毫升與 100 毫升的水量（如圖 17），針對圖片的尺寸來說，大水杯的高為小水杯的兩倍、寬同樣亦為兩倍，因此實際圖片尺寸的比例是四

比一，並非如數字所呈現的比例二比一。同樣相差一倍的水量 550 毫升與 1100 毫升，使用右邊的水杯圖片（如圖 17）以表達水量的大小差異較為恰當。



圖 17 水杯示意圖

接續 LSM 版第 6 冊第六小節「表示變量之間的關係」中提到的折線圖，並再次複習其用途：可用來表達兩類別項目之間變化的關係，此處與函數圖形的繪製過程做比較，特別提出函數圖形上每個節點皆為一組輸入與輸出值所組成。例如：一個面積固定為 40 平方公分的長方形，當指定一邊的長度為 1 公分，另一邊的長度值即為 40 公分，以此類推。因此且當兩類別之間的關係成正比或反比時，可藉由函數圖形呈現兩變量之間的關係（如圖 18）。

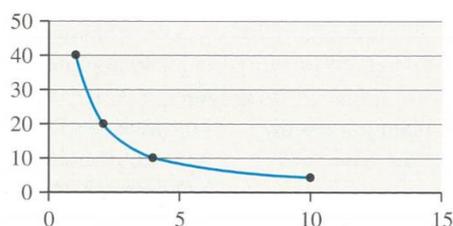


圖 18 長方形邊長與面積關係圖

課文最後的部分，介紹一種整理數據的工具—莖葉圖，課本提供的例子為 17 位同學的身高數據，落在 130 公分至 170 公分之間，因此在主幹（莖）的部分會依序從上到下填上 13 至 17 的數字，接著再將屬於各主幹的個位數字依大小排序填上分支（葉）的部分。當我們面對一筆數字量不小的數據時，莖葉圖便於整理數據與呈現資料的分布情形，且能讀出原始數據。

最後，課本例題提供「巴伐利亞洲」各行政區面積的長條圖，要求學生從長條圖上讀取某兩個行政區的面積，以計算此兩個行政區佔整個洲的百分比，並自行選取合適的統計圖呈現結果。解答期許學生利用圓形圖呈現該題統計結

果，再度強調圓形圖的特性在於可呈現百分比的數據。接著，搭配頻率機率主題，要求學生投擲兩粒骰子 50 次並記錄點數和，繪製合適的統計圖以表達點數和出現次數，並針對出現次數最多的點數和，計算出現次數之相對頻率。

第二小節為算術平均數，在進入課文內容之前，利用例題提供購買同樣重量但不同價格冰淇淋的情境，讓學生思考在哪一家店購買冰淇淋划算。第二題要求學生解釋報章雜誌中常見的平均統計量之意義，例如：平均收入、平均氣溫，學生須解釋該如何得到平均收入此數據，或昨日的平均溫度是如何測得等。

課文提供兩組球隊各五名球員的身高，介紹比較兩筆數據的方式。比較這十名球員的身高方式可以有很多種，可針對最小或最大的身高值作比較，亦可比較兩隊球員的平均身高，或可對全部的球員做大小排序，第一高的球員編號為 1，第二高的球員編號為 2...以此類推，最後再將兩隊球員所得編號相加，例如：B 球隊球員拿到 3、6、1、8 和 9 的編號，編號相加為 27，W 球隊球員拿到 4、9、5、2 和 7 的編號，相加亦為 27，因此兩隊的身高在此種比較方式下並無差異。四種比較數據的方式下，稍能精確的表達數據大小的代表值為算術平均數，因為它包含全體的數據，但當數據存在離群值時，使用平均數表達整體數據便會縮小原始數據間的差異，該節的作業題便要學生判斷有離群值的數據適不適合使用平均數代表整筆資料。

接著導入算術平均數的定義，並再次複習平均坡度與平均速率的定義。課本例題列出十月份某兩天的溫度紀錄，分別測量 8 點、10 點、12 點、14 點、16 點和 18 點的溫度，要求學生計算兩天的平均溫度，並簡述兩天的天氣。兩天的平均溫度只相差 1°C ，但實際上兩日的氣溫分布卻不相同，因此不應以平均溫度代表兩天的氣溫，也提醒學生在比較兩筆數據時，不應只關注平均數，還需考量原始數據的分布。最後，以長條圖呈現冰淇淋店一週的營業額，並計算該週的平均營業額之值。

第三小節為「百分比計算的基本公式」，此小節與統計相關的內容只在於利用百分比畫出圓形圖。課文例題提供非完整數據的圓形圖，學生必須透過與百分比相對應的實際數據，完成圓形圖的繪製，例如：圓形圖呈現學生選擇三種外語課程的比例，其中 $\frac{1}{4}$ 的扇形並未寫上實際數據，另一塊扇形上顯示 35% 的百分比，剩下 40% 的扇形對應到實際數值為 72 個人，因此求得總人數為 180 人。

另外一則例題列出馬鈴薯的含量：78% 的水、18% 的澱粉、2% 的蛋白質與 2% 的其他物質，要求學生將數據轉換成圓形圖（如圖 19），並透過比例關係求出 2.5 公斤的馬鈴薯中含有多少的澱粉。

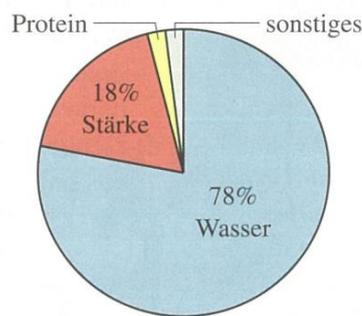


圖 19 馬鈴薯含量圓形圖

第六單元的專題為中位數與盒狀圖，課文利用表格列出兩組足球隊（B 隊、N 隊）球員的年齡，搭配莖葉圖呈現球員的年齡分布，並在莖葉圖上標示出中位數、第 1 與第 3 四分位數，以說明四分位數的定義。接著找出年齡最大與最小值，搭配四分位數以盒狀圖表示年齡分布（如圖 20），兩組球隊成員的年齡介於 18 至 35 歲之間，根據 B 隊的盒狀圖顯示，約有 25% 球員的年齡是介於 23 至 26 歲，另約有 25% 的資料介於 30 至 35 歲之間，因此約有一半的球員年齡介於 26 至 30 之間，年輕球員的分布較集中；C 隊的盒狀圖則顯示約有 25% 球員的年齡是介於 19 至 24 歲，另約有 25% 的資料介於 29 至 32 歲之間，因此約有一半的球員年齡介於 24 至 29 之間，年輕球員的分布較分散。

Bayern München	1. FC Nürnberg
3 0 4 4 5	3 0 1 2
2 3 3 4 6 6 7 8 8 9	2 2 2 4 4 7 7 8 8 9
1	1 9
Median: 28	Median: 27
Unteres Quartil: 26	Unteres Quartil: 24
Oberes Quartil: 30	Oberes Quartil: 29

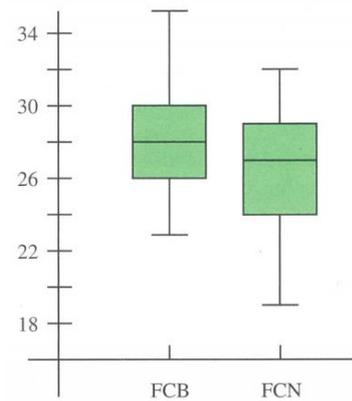


圖 20 球員年齡盒狀圖

例題提供另外兩組足球隊（D 隊、L 隊）的球員年齡，要求學生計算球員年齡的中位數、第 1 與第 3 四分位數，並繪製兩組球隊的年齡盒狀圖，並與前兩組球隊球員的年齡做比較。透過盒狀圖的呈現可以比較四組球隊的年齡分布，B 隊球員年齡分布與 L 隊較相似，年齡範圍落在 23 歲至 34 歲，大部分球員年齡集中於 26 歲至 30 歲；而 N 隊球員年齡分布與 D 隊較相似，年齡範圍落在 19 歲至 32 歲，大部分球員年齡集中於 22 歲至 28 歲。

最後，教材搭配盒狀圖呈現某小島每月白天的氣溫（如圖 21），其中特別將極端值表示出來，要求學生說明每個月份的溫度差異。透過盒狀圖可以看到 10 月至 2 月溫差較大，白天的溫差大約有 7°C，3 月至 9 月份的溫差較小，溫差大約為 3°C 至 5°C，藉由盒狀圖的分布可看到從 5 月份白天的溫度逐漸升高，至 9 月份溫度皆落在 12°C 到 18°C 左右，甚至有幾個月份有接近或超過 20°C 的離群溫度，10 月份至 2 月份溫度較低，溫度範圍大約為 7°C 至零下 2°C。上述教學內容與題目簡述於 LSM 第 7 冊之教材架構圖（圖 22）。

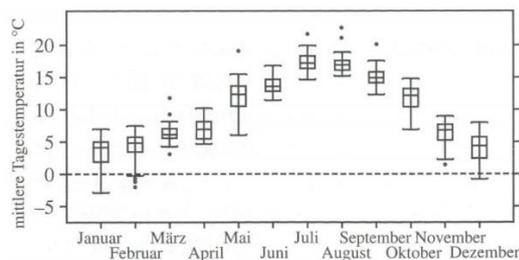


圖 21 小島氣溫盒狀圖



圖 22 Lambacher Schweizer Mathematik 7 教材架構圖

第三節 題型概念分析

本節將會統整德國教科書中的特殊題型，分為與數學內容相關題型、跨領域思維相關題型、統計素養相關題型。

一、數學內容相關題型

(一) 機率主題

德國數學教育下的統計與機率是密不可分的關係，因此在教科書中常不斷看到機率主題搭配統計課程的內容，例如：利用表格呈現投擲骰子的點數結果、利用長條圖呈現骰子出現的點數、根據骰子投擲結果的長條圖計算某點出現的相對頻率等。

在機率為主角的課程下，統計變相成為一種教學工具，用以呈現事件的結果或表達事件發生的頻率與趨勢，而長條圖大多用於呈現結果分布情形，折線圖則可表達事件發展的趨勢。

下方提供教科書中與機率主題相關的例題，可看出題目大多要求學生將事件發生結果整理成表格，用長條圖呈現每一種可能發生的事件之相對頻率，或藉由折線圖說明或預測該事件發生的機率等。例如：同時投擲兩粒相同的骰子 100 次，計算出現點數和的絕對頻率與相對頻率，將結果整理成表格，並用長條圖表示出現點數和的相對頻率。透過長條圖的呈現，可得到各點數和出現的次數會接近常態分佈。

再將頻率機率的概念引導至古典機率，要學生認知經由多數次實驗的結果，某些事件會有的固定機率值，例如：利用電腦模擬投擲骰子 50 次、150 次...、1050 次，並輸出折線圖以呈現各面骰子投擲次數的相對頻率（如圖 23）。透過折線圖的顯示結果，可說明當骰子投擲次數高達 850 次以上時，各面骰子出現的相對頻率大約落在 0.15 至 0.18，因此根據折線圖所呈現的趨勢，判斷出各面

骰子出現的機率會接近某一定值。

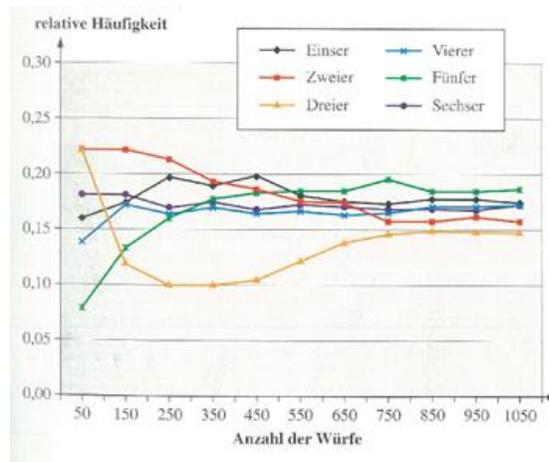


圖 23 骰子出現的相對頻率折線圖

除了知道骰子每面出現機率皆為 $\frac{1}{6}$ 外，教科書還提供電腦模擬投擲骰子 100 次的結果（如圖 24），針對點數 6 分別在 20 次、50 次、80 次、100 次出現的相對頻率，以長條圖呈現計算結果。根據表格呈現的投擲結果得到，點數 6 在 20 次、50 次、80 次、100 次出現的相對頻率分別為 0%、12%、11.3%、14%，與上方折線圖（圖 23）呈現結果大致相符。利用長條圖呈現四個相對頻率的數值，也可清楚呈現當投擲次數越多時，骰子出現點數機率會接近 $\frac{1}{6}$ 。另外，該題將 100 次投擲結果全部列出來（圖 24），也提供了主觀機率迷思的最佳範本，當骰子出現點數 6 的機率為 $\frac{1}{6}$ 時，投擲 6 次一定會有一次出現點數 6 嗎？

3

In der folgenden Auflistung sind die Ergebnisse einer Simulation „100-maliges Werfen eines Würfels“ zu sehen.

Wurf Nr.	Augen-zahl								
1	5	21	5	41	5	61	1	81	4
2	2	22	5	42	6	62	4	82	2
3	3	23	3	43	6	63	2	83	6
4	4	24	2	44	6	64	3	84	3
5	3	25	2	45	5	65	5	85	4
6	4	26	6	46	4	66	1	86	4
7	4	27	5	47	5	67	5	87	5
8	2	28	4	48	2	68	5	88	6
9	1	29	5	49	6	69	4	89	5
10	2	30	4	50	4	70	6	90	5
11	3	31	2	51	6	71	6	91	2
12	2	32	2	52	1	72	5	92	6
13	1	33	4	53	2	73	4	93	2
14	5	34	3	54	4	74	2	94	5
15	4	35	2	55	3	75	4	95	2
16	3	36	2	56	2	76	5	96	2
17	5	37	4	57	3	77	4	97	6
18	5	38	3	58	4	78	1	98	6
19	1	39	4	59	3	79	4	99	5
20	2	40	6	60	3	80	5	100	5

圖 24 投擲骰子結果表

在 LSM 版第 7 冊的統計教材中再度看到統計圖搭配機率主題的內容，例如：投擲兩粒或三粒骰子 50 次，繪製統計圖呈現出現點數和的相對頻率，該題解答利用長條圖（如圖 25）表達投擲兩粒骰子各點數和出現的次數。此處可以發現無論是投擲兩粒或是三粒骰子，當投擲次數越多，點數和呈現的結果會接近常態分佈，利用長條圖繪製結果便可清楚呈現點數和分布情形。

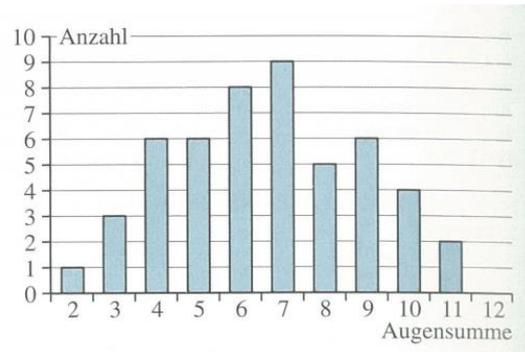


圖 25 骰子點數和長條圖

(二) 函數圖形

德國教科書利用折線圖與函數圖形的差異性以產生學習上的連結，折線圖所呈現的數據為離散型的資料，每個節點之間沒有任何關係，因此以直線直接連接而成。而座標平面上函數圖形呈現的為連續型的資料，圖形上每個點座標皆有其代表的數據，將所有點相連可能會繪製出含有曲線的圖形，因此無論數據的變化趨勢為遞增、遞減或是維持一定的規律，都可以藉由函數圖形清楚呈現。

在 LSM 第 6 冊中的第六小節「表示變量之間的關係」，大量運用函數圖形達兩類別項目之間的變化關係，此處與速率主題結合，類別項目變為時間與距離，例如：Klaus 平常走路步行與搭乘地鐵前往學校上課，下圖（圖 26）為他前往學校路上時間與距離的關係圖。藉由函數圖形的呈現得知 Klaus 在一定時間內距離上的變化，當函數圖形出現急遽上升或是平緩的線段，便可說明當時 Klaus 運動的快慢程度，以此推測他在哪段時間是搭乘地鐵、哪段時間是走路

步行。

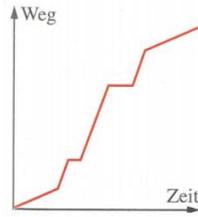


圖 26 時間與距離關係圖

課本除了提供時間與距離的關係圖，將兩類別變項距離改為速率與距離，例如：下方左圖（圖 27 左）為雲霄飛車行經的路線，其速率隨著距離而變化，搭配軌道路線圖選擇正確的速率變化圖。透過函數圖呈現的趨勢，當雲霄飛車往下俯衝時速率會逐漸上升，到達軌道最低點時速率來到最大值，往上行駛後速率會越來越低。另一則類似的例題則是要求學生根據汽車行車路線（圖 27 右），選擇相符的時間與速率變化之關係圖。

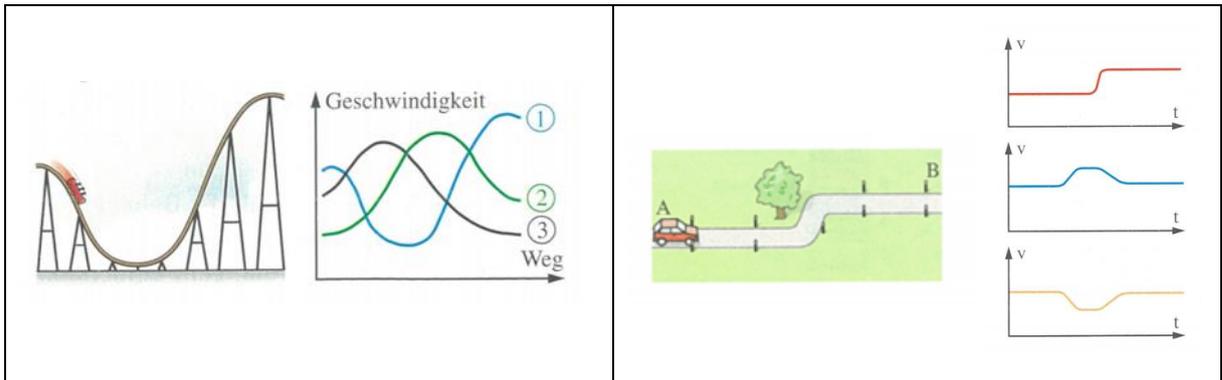


圖 27 速率與時間變化圖

上述例題皆未讀取速率變化圖上的數據，因此只能判斷速率的快或慢，未有實際的速率值，另一例題則須解讀速率-距離圖上的數據。已知一輪賽道的距離為 2.9 公里，藉由關係圖（圖 28）的呈現，得知賽車最低速率大約在 2.25 公里處，且在 2.25 公里至 2.8 公里速率的變化急遽上升，並根據一定距離內速率的變化，推論出與此變化圖相符的賽道。

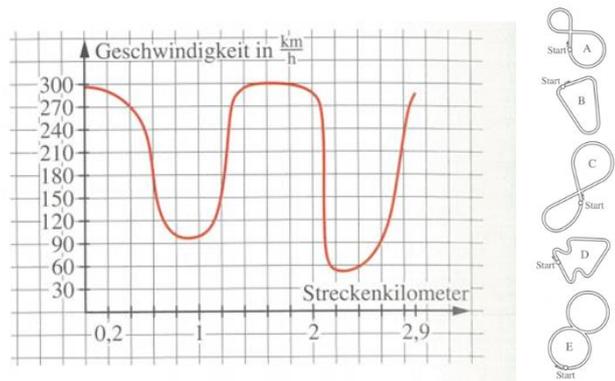


圖 28 速率與距離關係圖

另外，題目還要求學生自行繪製距離與時間的關係圖（圖 29），根據高速火車 ICE 1510 於慕尼黑火車總站開始行駛的時間，與到達各個火車站的時間，加上每個停靠站相差的距離，以函數圖形呈現火車在距離與時間上的變化。



圖 29 火車行駛距離與時間關係圖

除了利用統計概念思考日常情境，教科書也搭配函數圖形呈現生活中會遇到的現象，例如當電視開始轉播足球隊比賽時，利用折線圖（如圖 30）呈現某小鎮用水量與時間的關係，根據函數圖形之峰值出現的時間點推斷，上半場比賽在 21：00 至 21：15 左右結束，完整比賽在 22：00 結束。

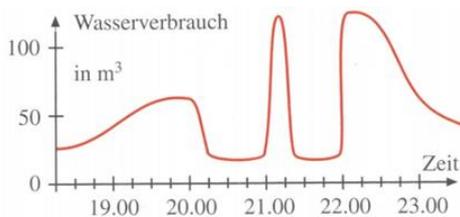


圖 30 小鎮用水量折線圖

另外，教科書也提供資訊要求學生畫出函數圖，某電信業者提供通話優惠方案：每個月通話的前 70 分鐘，每 10 分鐘以 1.60 歐元計費，接下來通話都是免費的，除非通話時間超過 100 分鐘，超過的話以每 10 分鐘 2.80 歐元計費。學生必須根據此方案畫出通話時間跟計費的關係圖，應用函數圖形來呈現此優惠方案，前 70 分鐘的通話時間以 1.6 歐元的差距穩定上升，70 分鐘開始至 100 分鐘無須有累加的金額，100 分鐘後再以 2.80 歐元的差距往上延伸。

另一例題則是要學生自行填上函數圖兩軸的類別項目（如圖 31），並構思一個符合此圖形的描述，此題並沒有標準答案，但可與速率主題結合，橫軸與縱軸的類別項目分別標示為時間與速率，再補述符合函數圖趨勢的內容。

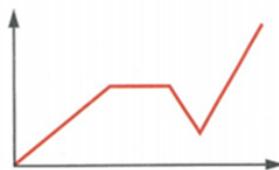


圖 31 關係圖

（三）百分比

長條圖或折線圖除了可呈現數據的次數，也可呈現百分比數值。圖 32 顯示了 1998 年至 2002 年手機用戶數的百分比，可以看到每年手機用戶人數為持續增加的趨勢，但是該如何表達增加量的多寡，可利用百分比的差距或是百分比的比例關係以呈現數量上的變化。

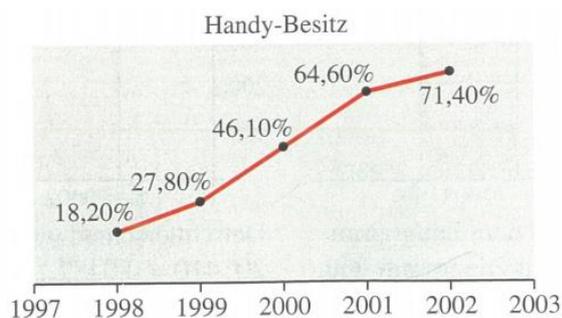


圖 32 手機用戶數折線圖

百分比的數值差距又稱為百分點，例如：2001 年比 2002 年的手機用戶數多了 6.8 個百分點，若直接利用百分比表達其比例關係，則 2002 年比 2001 年的手機用戶數大約增加了 10.5%。百分比與百分點的差異是學習比率單元時須注意的內容，德國教科書利用兩種問答方式（增加多少百分點、比例增加了多少）來釐清學生對於百分數表達數據變化的觀念。

二、跨領域思維相關題型

統計圖作為一種工具，自然易與其他學科結合運用，此處將跨領域的題型分為自然科學領域與社會人文領域，其中自然領域包括生物、地球科學、化學等學科，社會領域則大多與公民學科相關。

（一）自然科學領域

課本例題利用函數圖呈現森林中樹木的面積與時間(年)的關係(如圖 33)，藉由圖形上尖點出現的次數，得知森林在 100 年內生長的過程中會遭受三次砍伐，且根據一定的時間可看出森林中樹木成長的速率。當樹木生長的高度逐漸上升時，水分的輸送會越來越困難，因此可以根據函數圖形呈現的趨勢（每 20 年樹木的成長高度逐漸下降），推測 100 年後樹木生長的高度會越來越低。

14

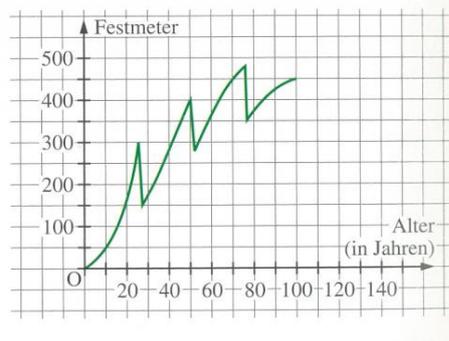


圖 33 樹林面積與時間關係圖

在 LSM 第 7 冊的第三小節「百分比的計算」，某一例題介紹太平洋的表面積以及南北長與東西寬的長度，其中表面積大約佔地球表面積的 35%。另外，介紹太平洋的平均深度為 4282 米，而最深處為馬里亞納海溝，位於海拔下 11034 米。此題要求學生計算太平洋的平均深度佔馬里亞納海溝多少百分比，除了運用百分比進行計算外，可透過平均深度與馬里亞納海溝數據上的差異，瞭解平均值與離群值的關係。

另一例題利用堆疊的橫長條圖（圖 34）呈現 2003 年德國初級能源的消耗量，類別項目包含多種初級能源：水和風力、褐煤、核能、硬煤、天然氣、礦物油等，且利用正負長條圖呈現各個能源在 2002 年的變化率。此題要求學生根據統計圖上的訊息，計算各能源消耗量的比例，並選擇合適的統計圖呈現結果。在課文內容中並未正式介紹堆疊的長條圖與正負長條圖，但透過題目的呈現，可發現堆疊長條圖與圓形圖的特性有部分相似，皆可比較部分與整體的數據，亦可看出每一區塊佔整體的相對比例，而正負長條圖則明顯呈現增加與下降量。

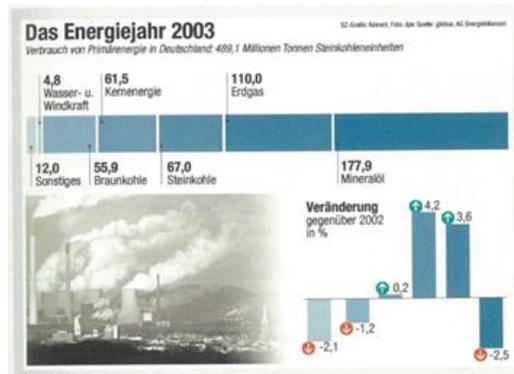


圖 34 初級能源消耗長條圖

(二) 社會人文領域

在此領域會出現的統計題型大多與選舉相關，例如：計算投票率、選民的比例等。針對美國的選舉制度，所有人民皆可投票給候選人，但候選人最後贏得勝利的關鍵卻在於選舉人團。選舉人團是由眾議員、參議員與三位代表華盛頓特區的人組成，而參議員由每州挑選兩名出來擔任，眾議員人數則是由每州人口數比例決定，因此該州人口數越多，選舉人團則由越多人組成。

如下方（圖 35），地圖上顯示各州的選舉人票數，因此可根據選舉人票數的多寡推斷哪州每平方公里的平均人口數最少或最多，以及比較幾個州每平方公里的居民人數，例如：加州人口數最多，選舉人票高達 55 張，而南達科他州、蒙大拿州、佛蒙特州人口數稀少，只有 3 張選舉人票。

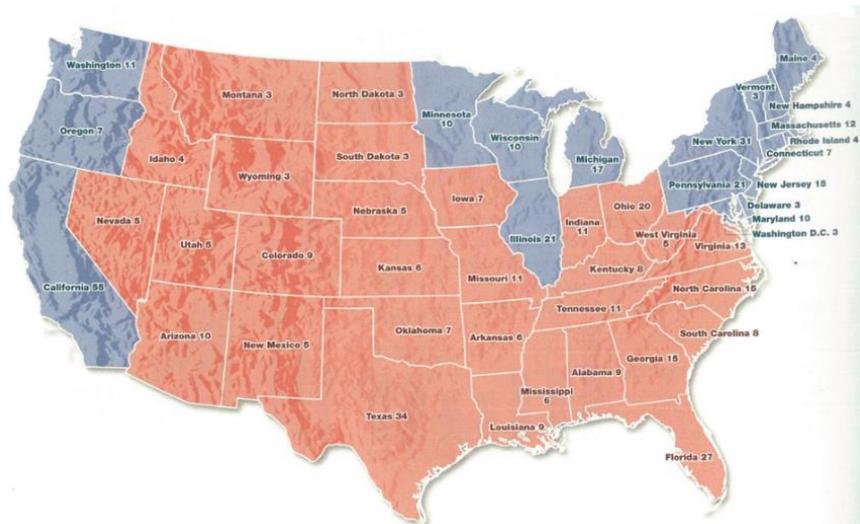


圖 35 各州選舉人數圖

另一例題同樣與選舉相關，橫長條圖（圖 36）呈現了三個主類目（性別、種族、收入）中各次類目的投票率，其中種族有白人、非裔美國人、拉丁美洲人等，並根據該州各種族人口比例，計算哪位候選人能獲得大多數的選票。

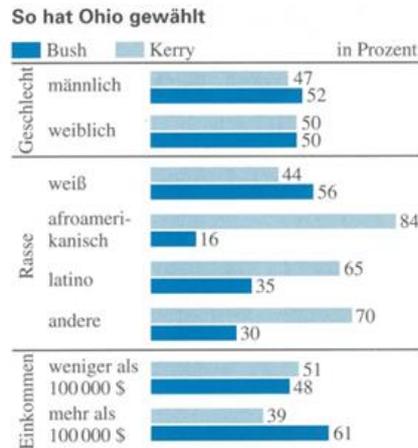


圖 36 投票率橫長條圖

除了投票選舉外的例題，教科書還利用圓形圖（圖 37）呈現 2004 年歐盟各成員國在歐洲議會的席位，特別的是，所表達的數據非百分比的形式，而是實際數值，並顯示各數值的組成單位。根據圓形圖上的數據，要求學生計算德國、法國、奧地利、盧森堡等國家在議會上席位的比例，並根據這些比例與國家的人口數進行比較，發現議會的席位會隨著各國人口數多寡而增減。但以此種圓形圖呈現數據可能會產生報讀上的錯誤，例如：英國與義大利的席位同樣都是 78 席，但在此圓形圖上呈現的視覺效果卻是英國的席位多過於義大利，若不仔細觀察實際數值，會容易被此圓形圖所誤導，此為使用統計圖表呈現結果時須具備的素養，另歸類於統計素養題型，詳細的內容與範例會在第三點說明。

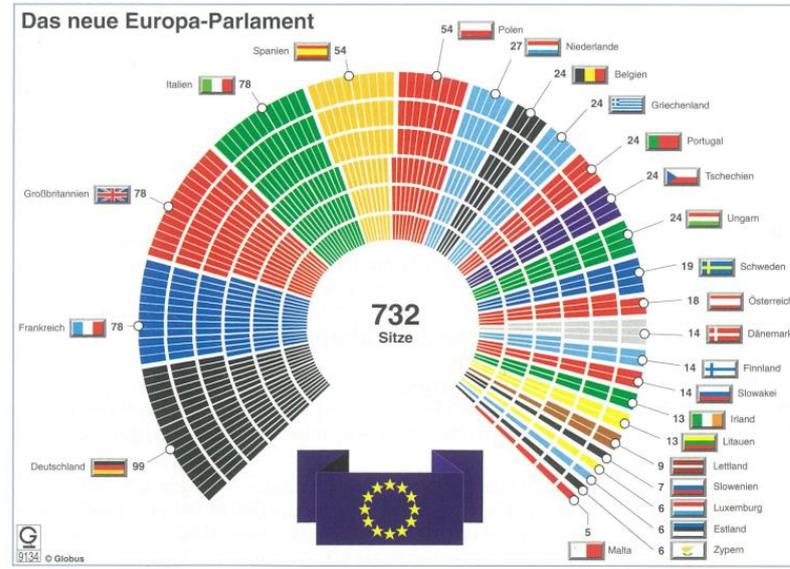


圖 37 歐洲議會席位圓形圖

三、 統計素養相關題型

根據多位學者對統計素養的定義，「具備理解日常生活統計用語」、「解讀報章雜誌等統計觀點」、「對統計相關資訊有批判性思維的能力」相對重要，統計的學習目標不應只局限於基本計算能力。以下將會列出嘗試引導學生具備統計素養的例題，包刮實際收集數據以統計調查結果、認識日常生活中出現的統計語言、思考統計調查的結果等。此部分題型將分為與統計概念相關或與統計圖相關兩類：

(一) 統計概念

(1) 算術平均數

平均數是代替整筆資料、簡化數據的工具之一，當用一個數字代替整筆資料時，若每筆數據的數值差異不大，則此平均數可適當呈現原始資料。例如：一位表現狀況穩定的籃球選手，每回合的投籃命中次數皆差異不大，則平均投籃命中數便可適當反映該選手的實際水準。反之，若此籃球選手的投籃命中次數差很大，計算平均投籃命中數以代表此選手的水準，則會得到不

正確結論，因此算術平均數可代表整體資料，但也可能會忽略實際原始數據的差異。

在 LSM 版第 7 冊的第 2 小節中，除了單純計算平均數外，更著重於平均數與整體數據的關係，例如：下表（圖 38）列出兩日分別在 8 點、10 點、12 點、14 點、16 點和 18 點的溫度，計算兩天的平均溫度為 12°C 與 11°C ，看似兩天的溫度差異不大，但題目要求學生簡述這兩日的天氣變化，即必須觀察原始數據，推估 10 月 18 日早晨的時溫度較低，中午至下午溫度偏高，日夜溫差不大；10 月 25 日整天溫度偏涼，日夜溫差變化不大。

18.10.: -2° ; 9° ; 18° ; 19° ; 17° ; 11°
25.10.: 8° ; 11° ; 13° ; 12° ; 12° ; 10°

圖 38 溫度結果表

根據研究，以算術平均數代替整體數據易產生「生態謬誤」，指的是對於群體的統計數據對所包含及下屬的個體資料做出推論，假設所有個體都和群體的性質一樣（江芳盛、李懿芳，2013），此謬誤常發生在根據總體資料對個體進行推論時。因此若資料的數目夠多，利用平均數代替整筆數據，可使每筆數據對結果的影響不大；若數據之間的差異不大，計算平均數便可降低離群值對結果的影響。

另一則例題說明 A、B、C、D 四人每人每月的零用錢為 18 歐元，但 E 每月的零用錢為 98 歐元，遠比其他人高出許多，題幹敘述「平均而言，大家拿到的零用錢為 34 歐元」，並要求學生對此陳述提出看法。就平均數的定義來看，這五人每月的零用錢確實平均為 34 歐元。上述兩則例題皆試圖以平均數代表整體數據，但若觀察原始數據的分布情形，會發現平均數與整體數據有所差異；若要以平均數代替全體數據，平均數應與原始數據相距不大，否則應用中位數描述數據的集中程度。

此題若增加題目敘述為：另外甲、乙、丙、丁每人每月的零用錢為 25，

但戊每月的零用錢為 30 歐元，則平均而言，每人的零用錢大約為 26 元。儘管第一組的平均零用錢較高，但從第二組人隨機抽取任何一人，其所得零用錢會高於第一組隨機抽出來的人，即為生態謬誤，就是誤以為你從均值較高的群體裡隨機抽取出來的人，可能會有較高的收入。

而日常生活的情境中什麼時候會用到平均數呢？教科書例題列出兩家冰淇淋店的售價：V 店為 1 球 50 歐分、D 店為一大球（大約 2 球）1 歐元，且右圖（圖 39）為兩家店挖十球冰淇淋的克數。此題目要求學生思考若要買想同重量的冰淇淋，應在哪一家店購買。若考慮兩家店平均的冰淇淋重，V 店為 38.8 克、D 店為 81 克，因此在 D 店購買冰淇淋較划算。



圖 39 冰淇淋售價圖

另外，某些統計結果的平均數看似有誤，背後卻有其成因，例如：下方橫長條圖（圖 40）呈現歐洲各國每 1000 位居民的可租用面積（單位：平方公尺），經過計算平均可租用面積為 185.4 平方公尺，但根據此橫長條圖的數據分布，尤其是挪威的可租用面積高達 713.4 平方公尺，大致可看出平均數應比 185.4 平方公尺高。事實上，針對挪威的居民雖然擁有最大的租用面積，但人口相比於其他國家來的少，對歐洲的平均租用面積貢獻不大，因此計算此平均值時，應參考各國國家人口數再進行計算。



圖 40 租用面積橫長條圖

(2) 百分點與百分比

當我們談論前年與今年的銷售率從 10%提高至 15%，更精確的說法為增加了 5 個百分點，也就是將今年的銷售率減掉前年的銷售率，或是提高了 50%；若銷售率從 15%跌至 10%，即為下降了 5 個百分點，或是下跌了大約 31%。德國教科書特別強調這兩者的差異，例如下圖（圖 41）為 1998 年至 2002 年手機用戶數的百分比，4 年內手機用戶數從 18.2%增加至 71.4%，提高了 53.2 個百分比，以基準值 18.2%來計算提高 53.2 個百分比的增加幅度為 $\frac{53.2}{18.2} \approx 2.9$ ，因此手機用戶數的比例增加了大約 3 倍，也就是 300%。

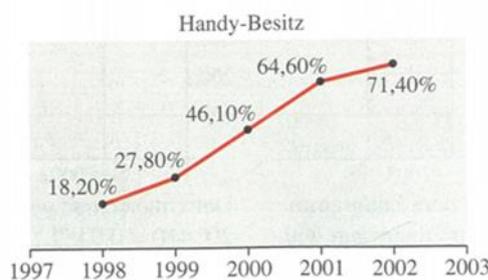


圖 41 手機用戶數折線圖

另一則例題，題幹敘述礦物油在初級能源消耗量中比例從 37.3%下降至 36.4%，但根據下方正負長條圖（圖 42）顯示，2003 年比 2002 年下降了 2.5%，並非是 $37.3\% - 36.4\% = 0.9\%$ 。此題要求學生判斷正負長條圖是否有呈

現上的錯誤，並解釋題目陳述與統計圖呈現結果相互矛盾的原因。題目計算出兩年的比例差異應為百分點，而長條圖顯示與 2002 年的比較數值應為兩年相差百分點除 2003 年的比例，即為 $0.9 \div 36.4 = 0.0247 \approx 2.5\%$ ，因此統計圖上的資訊並無錯誤。

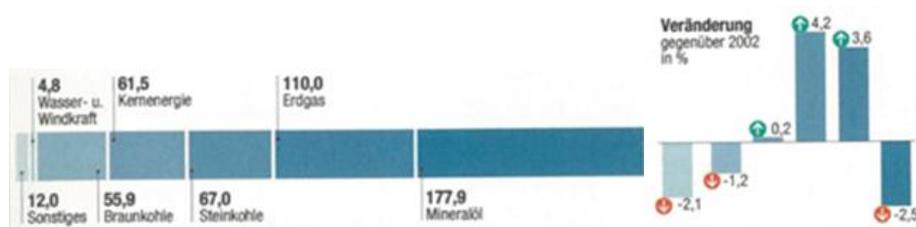


圖 42 初級能源長條圖

(3) 評估數據的方式

在 LSM 版第 6 冊第二小節「收集與評估數據」中，介紹絕對頻率與相對頻率的定義，絕對頻率即為事件出現的次數，相對頻率則為出現次數除以總次數。假設統計班上男生與女生喜歡貓的人數有多少個，調查結果顯示男生中有 5 位喜歡貓，女生則有 4 位，因此推斷班上男生喜歡貓的人數比女生多。實際上，此問題應考慮班上男生與女生的人數，進而計算相對頻率的數值：18 個男生中有 5 個喜歡貓、12 個女生中有 4 個喜歡貓，男女喜歡貓的相對頻率分別為 $\frac{5}{18}$ 、 $\frac{4}{12}$ ，因此就總數而言，班上喜歡貓的人數為女生較多。

從上述的例子中，可以看到當評估一組資料時，除了關注每筆數據出現的絕對頻率（即為次數），還應考慮相對頻率的數值，才能正確的對數據進行評估。

(4) 資訊圖片

當圖片搭配統計數據出現時，常會產生圖片上的視覺差異比原始數據來的多很多，例如將 2003 年與 2004 年的汽車生產數量用下面兩張圖（圖 43）表示，針對生產數量 2004 年大約為 2003 年的 1.7 倍，但根據圖片大小判斷，

2004 年汽車圖片長跟寬的尺寸皆放大 1.7 倍，因此實際圖片尺寸的比例大約是 2.89 : 1，並非如數字所呈現的比例 1.7 : 1。而即使闡述對象是立體圖像，教科書課本上畫的圖片皆是平面圖，若以立體圖形呈現該題的資訊，此時除了大台汽車是小台汽車的 1.7 高和 1.7 倍寬外，厚度也同時變為 1.7 倍，實際圖片尺寸的比例變為大約是 4.9 : 1，比原始數據的比例差距更大，因此以右圖的圖片呈現該題數據較為恰當。事實上，在比較圖片或物件大小時，應比較兩者的面積而非邊長。

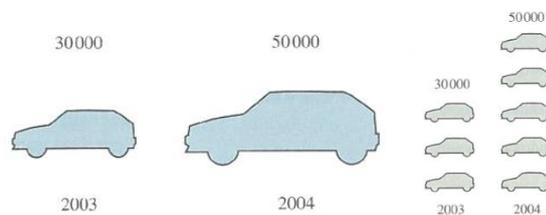


圖 43 汽車示意圖

(5) 統計語言

認識與理解生活中的統計語言也是培養統計素養的重要能力之一，德國教科書不斷出現報章雜誌或新聞媒體會使用的統計用語，包含離婚率、銷售率、道路使用率等名詞，目的在於將統計相關課程與生活產生連結。此處與百分比單元結合，大多需讀取統計圖表上的資訊計算增加或減少的比例，例如：下列表格(圖 44)整理出星期四與星期六同一時間的各交通工具的流量，此題將每種車型的流量之相對頻率轉換成百分比，作為該交通工具的道路使用率，因此兩天機車 (Radfahrer) 的道路使用率為 $\frac{170}{850} = 20\%$ 與 $\frac{216}{720} = 30\%$ 。

Tag	PKWs	Bus	LKWs	Radfahrer
Do	408	17	255	170
Sa	432	18	54	216

圖 44 交通工具流量表

而銷售率也是日常生活中常見的統計語言，下表(圖 45)呈現食品 A、

B 兩年內的銷售數據，根據銷售率的公式 = $\frac{\text{本年銷售額}-\text{上年銷售額}}{\text{上年銷售額}}$ ，因此得知食品 A 的銷售增長率為 100%、食品 B 的銷售增長率為 20%，光看兩種食品的銷售率會認為食品 A 的銷量較佳，但實際計算兩種食品的兩年內銷售量的差距，會發現食品 B 的銷售增長量幾乎是食品 A 的兩倍，因此除了關心銷售率的多寡，更應該觀察實際的銷售量。

Verkaufszahlen (Stück)	1. Jahr	2. Jahr
Lebensmittel A	50700	101400
Lebensmittel B	420000	504000

圖 45 食品銷售表

另外一種常看到的統計用語就是平均統計量，課本除了介紹平均數的定義，還會讓學生解釋如何得到平均統計量，例如：某州於 2004 年的平均收入約為 32000 歐元、昨日的平均氣溫為 22°C 等敘述。另外，課本還介紹較不常見的平均統計量——平均坡度，學生需判斷若攀岩的路線平均坡度為 100%，則路面是否幾乎是垂直的。根據課本中對坡度的定義為垂直上升的高度除以水平移動的距離，因此坡度為 100% 的路面，實際上斜面與地面的夾角為 45°，並非題目所敘述的垂直路面（圖 46）。而平均坡度是將各路段的坡度總合而成，實際的路面有起有伏，不可能完全平整，因此不能以「平均」坡度的統計量代表整體坡度的數值。

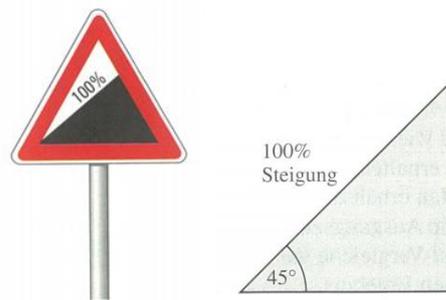


圖 46 坡度示意圖

(二) 統計圖

德國教科書除了教導學生繪製統計圖外，會針對統計圖上的類別項目做討

論，例如圖 47 左為某校六年級與十年級學生休閒活動的調查結果，橫軸的類別項目除了常見的休閒活動踢足球、玩電腦、聽音樂等，最後一項為「其他」，該題需讀取長條圖上的數據以計算各年級休閒活動的絕對頻率與相對頻率，另外特別將「其他」項提出來討論。若將學生的休閒活動在長條圖上完整呈現，可能會有很多個類別項目，加上如果某些類別項目的人數不多，此時長條圖就不易顯現出最重要的數據，因此可適切地將人數較少的類別項目歸於其他類。但若「其他」項實際的數據佔總數比例不低，此時忽略該項對其他項的影響，就容易產生誤讀統計圖的現象。

大部分教科書中所呈現的例題均是已調查且完整的統計結果，較少會要求學生對日常生活中所遇到的問題進行調查探討，進而自行收集數據，甚至選擇合適的統計圖呈現結果。德國教科書中提供學生幾個可調查的目標，例如對班上的同學進行問卷調查，調查的事項為最喜歡的顏色、動物與運動，並利用表格呈現全班同學的三個答案，除了要計算各答案的絕對與相對頻率外，接著要學生自己尋找可調查的問題。在 LSM 版第 7 冊中的題目則要求學生調查班上同學出生的季節，並自己選擇兩種統計圖呈現結果。亦有假設在不同情境時，判斷該用哪種統計圖表達數據，例如：調查統計某城市 13 歲兒童就讀的學校、測量當日每 15 分鐘的氣溫等，目的使學生瞭解同一筆數據以不同統計圖呈現的意義。

在另一例題則是利用長條圖呈現某城鎮的月降雨量（如圖 47 右），除了計算四季與每月的平均降雨量外，針對縱軸的降雨量單位進行討論。長條圖的縱軸是以長度作為降雨量的單位，而非以容積作為單位，事實上總降雨體積還需將降雨量乘上降雨範圍面積。

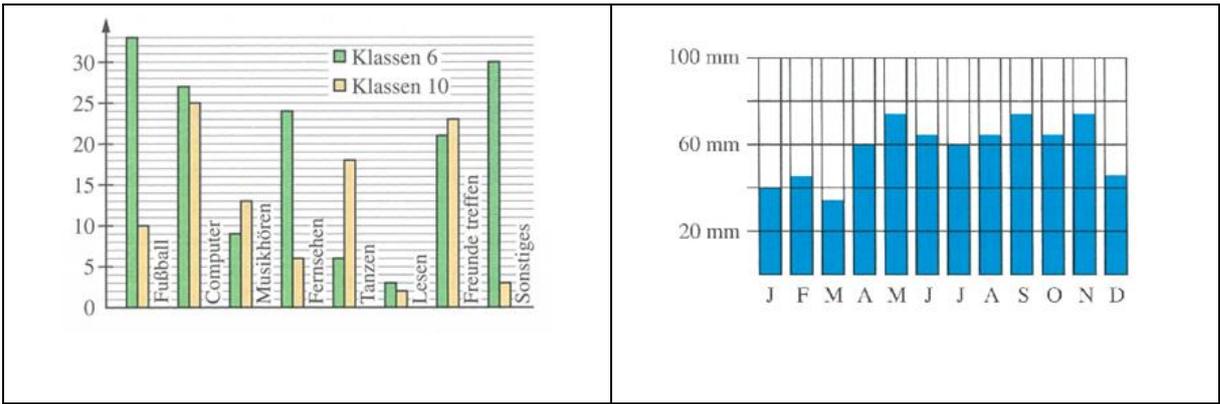


圖 47 長條圖

在 LSM 第 6 冊第五節中「錯誤的百分比與圖表」，課文利用兩種長條圖（圖 48）呈現某廠商一年內的銷售量（百萬），仔細觀察可發現右圖的縱軸起始點並非從原點開始，因此在視覺上會增加每筆數據之間的差異，造成報讀此長條圖時會產生錯誤理解。事實上，每個月分的銷售量差距皆在一百萬之間，且最左邊長條的高度約為最右邊長條的 2.7 倍，但實際檢視縱軸的範圍，發現一月與十二月的銷售量實際差異為 80%至 90%，也就是差了 12.5%（從 80%至 90%相差了 10 個百分點，也就是差了 12.5%），並非圖形上所呈現的 2.7 倍之差。

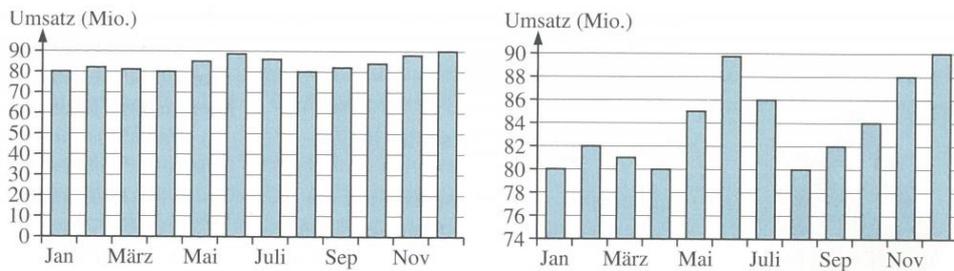


圖 48 銷售量長條圖

事實上，讀取統計圖上的數據除了關注實際數值，也應注意統計圖的比例關係，例如：刑事局調查了過去一年裡搶劫案件的數量（如圖 49），排除此統計圖嘗試誇大兩年內數量的差距，實際計算搶案的增加率僅為 $\frac{20}{410} \approx 4.9\%$ ，因此增加率與增加量都應搭配參考，才不會忽略真實的資訊。

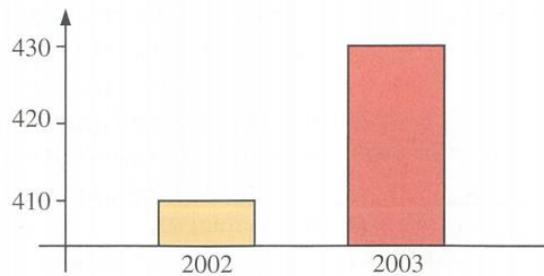


圖 49 搶案數量長條圖

另一則例題呈現呈現 5 種不同小熊軟糖的含糖量百分比（如圖 50），題幹敘述「這 5 種食品含糖量差異非常多」，要學生反思此敘述是否正確，並繪製出完整的長條圖。同樣地，此長條圖的繪製方式誇大了數據間的差異，德國教科書特別提出此種繪製方式的長條圖，目的在於使學生發現若特意縮小縱軸的範圍，便可凸顯出長條圖的上下起伏；若把縱軸的範圍擴大，便會使數據的起伏變的較平緩，端看繪圖者想要報讀圖表者得到什麼樣結論。因此正確的繪圖方式應完整呈現適當範圍內的數據，避免造成誤讀的情況發生。

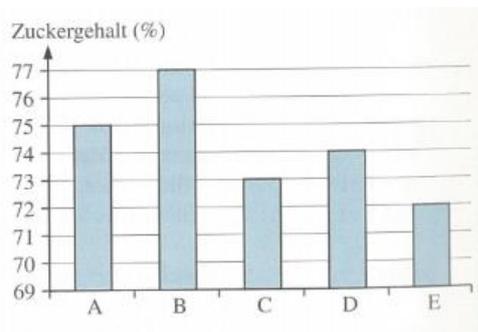


圖 50 小熊軟糖含糖量長條圖

第四節 分析結果統整

本節將統整教材與題目分析的結果，列出德國教科書於教材與題目值得探討的部分。針對教學與教材內容，將會著重於課程安排與教材上的差異進行討論，題目部分則會統整量化與質性分析結果。

一、教學與教材

（一）課程

根據德國教科書的編寫順序與內容，發現其統計課程於不同學習階段（年級）、不同單元間皆重複出現或延伸難度。

統計單元於六、七年級間均有出現，六年級的統計課程專注於收集數據與統計概念、圖表的迷思，七年級則著重於圖表上的分析與算術平均數。針對統計圖形，六年級大部分要求學生根據原始數據，利用長條圖、折線圖或圓形圖呈現結果，至七年級時除了繪製出指定的統計圖像外，還將學習目標提升至讀取統計圖上的數據，並透過統計圖像解釋相關的現象。

於六年級學過的統計圖形中，例如：長條圖、折線圖、圓形圖，至七年級會再重複出現，例如：六年級所繪製的長條圖其描述類別項目皆為離散型資料，七年級則繪製出有組距的直方圖，將橫軸類別項目變為連續型資料。在不同學習階段，提供學生重複練習的機會，加深印象與增加熟練度。此設計課程的優勢在於可將類似的統計概念與內容重複呈現，將課程內容的學習階段拉長，有助於學生的記憶與理解。

針對統計用語的教材編排，六年級介紹生活中常見的統計語言之定義，例如：漲跌率、平均坡度、離婚率與選票率等，讓學生認識網路媒體、報章雜誌中常出現的統計語言。至七年級教到算術平均數的單元時，著重於讓學生認識平均統計量的定義，例如：平均收入、平均氣溫等。除此之外，還須提出蒐集方法或解釋如何得到平均統計量的數據。

按照此編寫脈絡，學生在六年級已具備相關的統計概念與知識，至七年級時再將學習行為提升至統計推論與思考較高層次，形成新的學習目標。此課程設計亦符合 Bruner 提倡的螺旋式課程，以學生現有的統計認知與思維方式，將與統計相關的課程安排在各階段，包括六年級、七年級與十二年級，隨著年級與程度的提升，增加與延伸統計學科的知識內容。

另外，根據課文與題目的分析，可發現德國統計課程與許多單元互相連貫，

包括：機率、函數圖形、百分比，並非於一個年級中單獨呈現，或獨立於某一單元，推測教科書設計者嘗試將統計概念融入與之相關單元。針對教科書中跨領域思維的題目設計，統計概念或圖表成為不同學科整理、呈現資料的工具之一，例如：公民、生物、地球科學等科目，使各領域彼此產生關聯，以此增加學習統計相關知識的意義與活用性。因此，德國教科書無論在課文內容、例題上，其設計理念皆符合繼續性、延續性、統整性的課程組織模式，為恰當的教科書撰寫學習對象。

(二) 教材

(1) 絕對與相對頻率

根據十二年國民教育數學課綱，在統計資料處理的學習內容中會介紹次數與相對次數等統計量，德國教科書則是選用「絕對頻率 absolute häufigkeit」一詞代表特定一種事件出現的次數(例如：班上 30 位同學有幾個人喜歡打籃球)，將一種事件出現的次數除以總次數則定義為「相對頻率 relative häufigkeit」(例如：有 12 位同學喜歡打籃球，相對頻率則為 $\frac{12}{30}$)，而相對頻率轉換為百分比的數值則會常見的相對次數。在介紹絕對與相對頻率的定義時，課本特別強調若關心哪一事件最常出現，應考慮相對頻率之值。

(2) 列聯表

德國教科書除了利用一維表格包括呈現收集的數據，包括絕對或相對頻率分配表，另外加入二維表格列聯表整理數據統計的結果。列聯表與一維表格最大的不同處在於：一維表格利用一個類別變項(例如：班上同學喜歡的動物)，依照不同類別(例如：貓、狗、鳥、魚等)，將其被統計的次數在表格中標示出來，即為次數分配表；或將統計的次數轉換為百分比，繪製出相對次數分配表。

而列聯表則是將兩個類別變項的資料同時在一個表格中呈現，下表(圖 51)

包含兩個類別變項個字的次數，以及兩個變數共同發生的次數。其中縱行為「性別」，為男生與女生兩個類別項目，次數分別為 12 與 18；橫列為「喜歡的動物」，這裡分為喜歡貓及喜歡其他動物兩個項目，次數分別為 9 與 12，兩個變數同時發生的次數呈現如下。另外，列聯表裡所填入的次數也可轉換為相對次數。

	Mag Katzen	Mag anderes Tier	Zeilensumme
Mädchen	4	8	12
Junge	5	13	18
Spaltensumme	9	21	30

圖 51 性別與喜歡的動物之關係表

(3) 統計圖形

德國七年級的教科書開始出現已分組的資料（如圖 52），並使用直方圖繪製資料結果。常見的直方圖各相鄰長條間彼此相連，且每個類別項目皆是連續型的資料，若要呈現非連續型類別項目會利用長條圖呈現。依照圖 52 顯示，直方圖描述的數據雖是連續型資料，但長條間彼此不相連，並且在組距的部分特別註明「>」的符號（此處意思應為 \geq ），清楚告知學生屬於組距首端或尾端的數據，應被記錄在哪一個組距之間（例如： $>85-90$ 的組距中，85 分會被記錄在此組距，90 分會被記錄在下一個組距，即 $>90-95$ 。）。

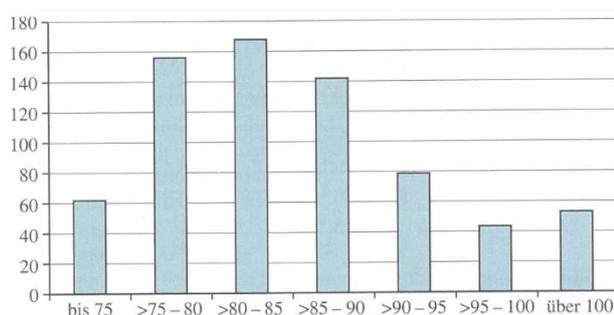


圖 52 連續型長條圖

另外，德國教科書中的長條圖與折線圖若兩軸有清楚標示出類別項目，就不會在統計圖上標示出數值，若有一軸未明確表示出其類別項目，便會在統計

圖上標示出實際數值（如圖 53）。經調查國內教科書則沒有此規則，即使兩軸都有註明類別項目，仍會在長條圖上或折線圖的節點將數值標示出來。

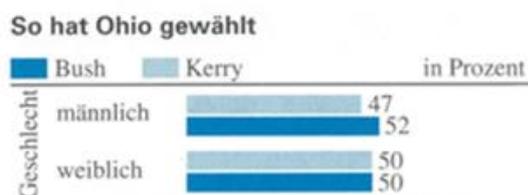


圖 53 橫長條圖

根據德國教科書的課文與作業例題，針對統計圖的選材上，除了常見的長條圖、折線圖與圓形圖外，還可以看到橫長條圖、集束橫長條圖、堆疊長條圖、正負長條圖、特殊圓形圖（圖 37），就函數圖形的選材來說，有氣溫圖（如圖 54）、距離與時間關係圖、水量與時間關係圖、速率與距離關係圖、面積與時間關係圖。無論在統計圖形或是函數圖形上，都可以看到德國教科書多元的情境設計。

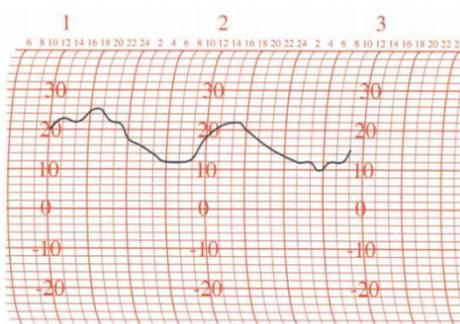


圖 54 氣溫連續變化圖

另外，教科書在介紹各統計圖形前皆會說明統計圖的特性，例如：長條圖適合呈現各數據的大小關係、圓形圖則便於看出資料占整體的比例、折線圖可觀察出兩變量之間的變化等。詳細說明各統計圖適合描述的資料，目的使學生融會貫通各統計圖形表達數據的意義，以此要求學生自行選取合適的統計圖呈現數據。

(4) 莖葉圖

根據十二年國教的數學課綱，在統計課程中並未將莖葉圖列入教學內容，德國教科書則將莖葉圖列為整理數據之工具。研究者推測教科書設計者將莖葉圖列入教學，原因可能為莖葉圖便於將一筆數據整理排序，且能直觀看出原始數據，亦可透過原始數據計算得到算術平均數、中位數和眾數等統計量。例如下方的莖葉圖（圖 55），其主幹（莖）部分即為一組組距，其中一組組距為 140 至 149，另外將莖葉圖逆時針轉 90° 後便可得到附有原始數據的直方圖，甚至比直方圖更容易看出某數據出現的次數，亦可計算該數據佔整體多少百分比。

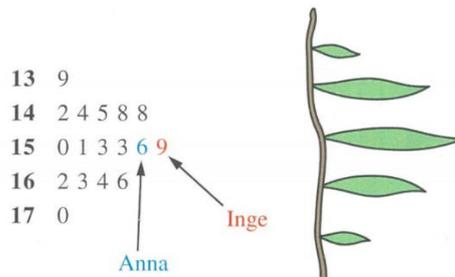


圖 55 莖葉圖

二、 題目

(一) 佈題情境

根據德國教科書的題目分析，可發現例題的情境非常多元，包括日常生活購買東西時的評估、自行對班上同學進行調查、測速器的統計結果、能源消耗量統計結果、選民比例等情境，培養學生解決真實世界中會遇到之問題的能力。受德國文化影響，與足球、賽車等相關的元素亦列入佈題情境，例如足球球員的年齡、足球球賽觀賽人數、賽車的速率、賽車跑道等。

除了本國的文化成為佈題情境，德國教科書也將國際議題之情境納入題目選材中，例如：美國的選舉制度、美國總統年齡、歐洲議會的席次、各國居民人數等，讓學生閱讀題目文本時認識跨領域的內容。以上例子，都可看出教科

書試圖與週遭的事物或環境產生連結，解決實際生活會面臨到的問題。

(二) 題目問法

德國教科書中的題幹敘述與問答方式大部分屬於開放性問法，除了給出一個標準答案，還會要求學生思考或解釋「為什麼要這樣做」、「如何得到這個結果」、「發現到什麼」、「有什麼看法」等問題，在探索原因與瞭解結論的過程中，即是培養統計素養的方式之一。

在繪製統計圖的相關單元，並不會要求學生繪製出指定的統計圖，而是要學生根據數據不同，或視題目的情況而定，自行選擇合適的統計圖進行繪製。部分題目亦要求學生畫出兩種非指定的統計圖，讓學生瞭解利用兩種統計圖表達同一筆數據的差異在哪。

綜合上述，德國教科書除了要求學生熟練基本的統計知識解題外，更培養統計推論與思考的能力，可見其重視的不只是統計相關的基本計算技能，更著重於較高層次的統計思維。反觀國內的教科書多著重於基本的統計量計算、公式的套用、圖表繪製與簡單地報讀圖表，較少設計須利用統計訊息、圖表推論或預測的解題情境，且幾乎沒有提供須從已收集好的統計資料或已建構好的統計圖表中判斷其正確性的題目，因此透過分析德國教科書中統計知識較高層次的題目，以供臺灣教科書編撰者參考。

第五章 結論與建議

本章綜合統計認知、圖表理解與題型概念分析後的結果，配合教科書編寫脈絡與題目類型，說明研究結論與提出建議。

第一節 研究結論

本節簡述統計認知類目表、圖表理解類目表之分析結果，瞭解德國 LSM 版教科書著重於哪些認知層次，加上教材的內容分析統整出德國的統計課程設計脈絡。

一、課程

透過整理德國教科書的編寫脈絡與內容，其統計課程的設計與編排符合繼續性、延續性、統整性的課程組織模式，統計單元除了安排於兩個學習階段（六、七年級），在各年級間不同單元中也重複出現，並隨著學習階段的不同加深統計認知的學習層次。

另外，德國教科書的統計內容與許多單元皆有關連，包括機率、函數圖形、百分比，教科書設計者在撰寫統計相關單元時，除了重視以統計為主的內容，也關心與統計相關的內容。由此可見，德國數學教育下的統計並非為單獨的塊狀知識，而是以統計為主體向外延伸出的網狀概念。

二、德國 LSM 版教材編寫脈絡

（一）Lambacher Schweizer Mathematik 6 教材編排順序

根據德國教科書的編排，介紹單元二第二小節「收集與評估數據」的方式之前，先利用一維表格將投擲骰子的結果記錄下來，接著正式介紹如何計算絕對、相對頻率，並將原始數據轉換為含有絕對與相對頻率數據的表格，或是繪製長條圖。接著介紹二維表格—列聯表的製作方式，並透過列聯表解決比例問題。

第五小節「百分比計算與圖表」，介紹生活中常見的百分率與統計用語，包括漲跌率、離婚率、平均坡度等，針對百分比與百分點的差異進行比較，並提供錯誤的統計圖表使學生瞭解製圖者的目的。第六小節「表示變量之間的關係」，除了利用折線圖表達兩類別之間的關係，還另外介紹描述類別為連續型的資料，利用坐標平面繪製出兩變量的函數圖形，包括速率-時間圖、溫度-時間圖等。

(二) Lambacher Schweizer Mathematik 7 教材編排順序

七年級的第六單元為數據、圖表與百分比計算，第一小節「分析圖表上的數據」，在正式介紹統計圖形之前，先讓學生調查班上同學的出生季節，自行選取合適的統計圖繪製。接著說明圓形圖、長條圖的特性，以判斷在各個情況下該繪製什麼統計圖形。最後，介紹圖片搭配統計數據時會產生的誤讀情形。

延續六年級利用函數圖形呈現兩變量之間的關係，這裡再次提及若類別項目為連續型時，可利用函數圖形表達兩變量間的關係。文末介紹國內教科書並無列入之統計內容—莖葉圖，並說明以莖葉圖呈現數據的優勢。

第二小節為「算術平均數」，課文例題提供購買冰淇淋的情境，要求學生計算冰淇淋的平均重量，以判斷在哪一家店購買較划算。接著要學生解釋與平均有關的統計量，包括平均收入、平均氣溫等，最後才列出平均數的定義。本小節的例題除了根據原始數據計算出平均數，還要求學生觀察平均數與實際數據的關係，以判斷利用平均數代表整體數據是否合適。

第三小節「百分比的計算公式」較著重於圓形圖的繪製，包括將原始數據利用圓形圖呈現，或是繪製非完整數據之圓形圖的繪製。本單元的專題為「中位數與盒狀圖」，利用莖葉圖呈現多名球員的年齡，並在莖葉圖上標示出中位數、第1與第3四分位數，搭配最大與最小值以畫出可呈現年齡分布的盒狀圖。

三、 統計認知分析結果

根據統計認知的分析結果，德國教科書的課本與作業題目佔統計認知層次的比例，分別為統計知識 71%、統計推理 10%、統計思考 19%，其中統計推論與統計思考的比例共佔約整體的 $\frac{1}{3}$ 。由此可見，德國教科書除了訓練學生具備基本的統計概念與計算能力外，另外著重於統計思考與推論的培養。無論是課文的內容或是題目的問答方式，皆要求學生透過已學過的統計概念進行推論，例如：自行選擇適合呈現該題數據的統計圖、利用折線圖的趨勢做出預測或評估、觀察統計圖的集中或分散進行推論、自行選擇統計數據的方法、判斷統計結果的正誤等。

因應統計素養的重要性逐日提升，基本的統計概念或計算能力已應付不了生活上會遇到的現象，例如對報章雜誌的統計結果做出判斷、理解繪製錯誤統計圖表的目的等，因此若要培養學生具備這些能力，應在教科書課文內容或題目中設計類似情境，並增加題目在統計推論與思考上的比例。

四、 圖表理解分析結果

依據圖表理解分析的結果，最高比例的層次為「講述圖表所呈現的現象」，佔 44%，大部分的題目可透過統計圖表上的資訊做出判斷，或利用圖表上的數據進行計算。在圖表理解的分析結果中有將近 $\frac{1}{4}$ 的題目要學生自行判斷要用哪種圖像來表達數據，以及瞭解誤讀統計圖會造成什麼樣的影響。

德國教科書中含有較高的圖表理解層次之教學與題目設計，例如：在課文中強調各統計圖的特性，對應到題目要求學生自行選擇合適的統計圖進行繪製，以此認識利用不同統計圖表達相同數據的意義；或是提供錯誤的長條圖以釐清學生的迷思概念，避免產生錯誤解讀，得到不正確的結論。因此針對統計圖表的題目設計與情境，應將統計認知層次從基本統計圖的繪製或報讀圖表，提升至根據圖表資訊進行推論的較高層次。

依循上述分析結果，德國教科書的題目除了要求學生繪製指定的統計圖、報讀統計

圖上的資訊、根據統計圖上的數據進行計算等基本能力，還需要根據對統計圖表的理解，對已呈現的統計結果進行推論，或是透過統計圖表上的資訊，預測未來發展趨勢，例如：透過折線圖的呈現推估骰子每面出現點數的機率、利用盒狀圖瞭解每個月氣溫的分布情形等。

五、 題目類型

經由題目的分析，列出德國教科書中較值得討論的例題，大致可分為與數學內容、跨領域思維、統計素養相關之題型，其中數學內容相關題型包括利用統計圖呈現機率實驗結果、利用函數圖形呈現連續型類別項目間的關係、透過折線圖上的數據計算相差的百分點；跨領域思維題型將解題情境含有自然、社會等學科的題目整理出來；統計素養相關題型則列出學生在統計概念或統計圖表上會產生的錯誤理解。

第二節 建議

本節將根據研究結論，針對臺灣的統計教材與題目設計提出建議。

一、 統計教材設計之建議

根據十二年國教的數學課綱，臺灣的統計課程原集中於九年級下學期學習，後改為分散至七、八與九年級，學習內容依序為統計圖表、統計數據、統計資料處理、統計數據的分布，由此可見，臺灣已將統計課程按難易度安排至各學習階段，但就各個年級來看，統計內容依然是獨立自成一區，並未與其他單元產生連結。

對比德國教科書在課程的編排上，統計內容與概念除了在不同學習階段出現，還能融入於相異單元中，依照如此編寫設計，學生更能將統計概念與其他知識產生連結，因此建議國內教科書撰寫者可將統計與其相關單元（例如機率、百分比）做整合，使學生能以宏觀的學習角度認識統計知識。

二、 統計題目設計之建議

綜觀臺灣各版本教科書，題目大部分要求學生熟練基本統計知識能力，包括計算統計量、繪製統計圖等，較少涉及統計推論與思考的能力，且缺乏高層次統計認知題型，因此建議教科書編輯者設計題目時，不應以統計知識為惟一學習目標，應提高學生的統計認知層次，多利用統計概念進行推論、判讀統計圖表、對統計資訊進行批判性思考等。另外在繪製統計圖的部分，應讓學生自行選擇合適的統計圖呈現數據，以瞭解各統計圖的特性，以便日後運用於真實生活情境中。

根據德國教科書的題目分析，其佈題情境相當多元，對照至十二年國教的素養命題導向，建議教科書撰寫者除融入日常生活中能看到的元素，亦可連結跨領域學科，使其與真實世界情境相符，讓學生模擬生活化的問題，藉機推論與思考問題解決方式。

因真實日常情境大多需要一個以上的領域或學科知識方能解決，因此在統計題目設計情境中應多與跨領域、跨學科的主題搭配，如選舉、環境與能源、生物等，將所學統計知識與概念應用於處理各方面的問題，訓練學生解決含有不同領域或學科的統計問題。

綜合上述，為培養學生具備統計素養能力，建議國內教科書在統計課程上應與其相關單元相連結，在佈題方式上應掌握生活情境、跨領域內容、整合統計知識與概念。

參考文獻

一、中文部分

- 丁志權 (2016)。六國教育制度分析—美德英日法中。臺北市：麗文文化。
- 王文科 (民 80)。認知發展論與教育—皮亞傑理論的應用 (第 3 版)。臺北：五南圖書出版公司。
- 江芳盛、李懿芳 (2013)。分析單位改變對跨國比較研究的影響—以 TIMSS 數學學習心理特質與學習成就之關聯性探究為例。教育學刊，41，123-154。
- 余曉雯 (2006)。德國教育行政。輯於江芳盛、鐘宜興主編：各國教育行政制度比較。臺北：五南。355-409。
- 李健恆、楊凱琳 (2012)。從統計認知面向與圖表理解角度分析國中數學教科書的統計內容。教科書研究，5，31-72。
- 周祝瑛 (民 84)。國中日常教學活動之生態研究。行政院教育改革審議委員會報告。
- 林福來 (2011)。統計教育研究：人才培育與資訊整合-總計畫。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告 (編號：NSC98-2511-S003-004-M)。
- 柯華葳、幸曼玲、林秀地 (民 84)。小學日常教學活動之生態研究。行政院教育改革審議委員會報告。
- 張少同 (2003)。青少年的數學概念學習研究-子計畫七：青少年的統計概念發展研究。行政院國家科學委員會研究報告 (NSC 91-2521-S-003-007)。
- 張芬芬 (2012)。文本分析方法論及其對教科書分析研究的啟示。載於國家教育研究院主編，開卷有益：教科書的回顧與前瞻。頁 161-197。臺北：高等教育出版社
- 張俊彥、李哲迪、任宗浩、林碧珍、張美玉、曹博盛、楊文金、張瑋寧 (2018)。國際數學與科學教育成就趨勢調查 2015 (TIMSS 2015)：臺灣精簡國家成果報告。取自 http://www.sec.ntnu.edu.tw/timss2015/downloads/T15TWNexecutive_CH.pdf
- 張炳煌 (2011)。德國教育。輯於黃文三、張炳煌主編：比較教育。臺北：高等教育。187-228。
- 張筱雲 (2002)。德國的教科書制度。人本教育札記，152，36-39。
- 教育部 (2003)。國民中小學九年一貫 92 年課程綱要數學學習領域。取自 http://teach.eje.edu.tw/9CC2/9cc_92.php
- 教育部 (2008)。國民中小學九年一貫 97 年課程綱要數學學習領域。取自 <https://cirn.moe.edu.tw/Upload/file/745/67261.pdf>
- 教育部 (2014)。十二年國民基本教育課程綱要總綱。2014 年 11 月 28 日，取自 <https://www.naer.edu.tw/files/15-1000-14113.c1174-1.php>
- 教育部 (2018)。十二年國民基本教育課程綱要-數學領域。2018 年 7 月 26 日，取自 <https://www.naer.edu.tw/files/16-1000-14113.php?Lang=zh-tw>
- 梁福鎮 (2009)。德國中等教育的現況與改革措施。教育資料集刊，42，273-296。
- 郭生玉 (2005)。心理與教育研究法。臺北：精華書局。

- 陳惠邦 (1997)。德國職業教育與職業繼續教育。臺北市：師大書苑。
- 單維彰 (2018)。論知行識作為素養培育的課程架構—以數學為例。臺灣教育評論月刊，7 (2)，101-106。
- 曾建銘、林原宏 (2016)。學生資料與可能性的能力之探究與評量。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告 (編號：MOST105-2511-S656-003)。
- 楊玲惠、翁頂升、楊德清 (2015)。發展數位教材輔助學生學習之研究—以科大學生之統計教學課程為例。臺灣數學教育期刊，2 (1)，1-22。
- 楊德清、鄭婷芸 (2015)。臺灣、美國與新加坡國中階段幾何教材內容之分析比較。教育科學研究期刊，60 (1)，33-72。
- 詹紹威 (2012)。二十一世紀德國中等教育的改革措施和成效。教育資料集刊，54，253-282。
- 臺灣 PISA 國家研究中心 (2012)。臺灣 PISA 2012 精簡報告書。擷取自 http://pisa.nutn.edu.tw/taiwan_tw_04.htm
- 劉曉樺 (譯) (2012)。教育大未來—我們需要的關鍵能力 (原作者：Trilling, B. & Fadel, C. 21st Century SkillSM: Learning for Life in Our Times)。臺北市：大雁文化。
- 歐用生 (1991)。內容分析法。載於黃光雄、簡茂發主編：教育研究法。臺北：師大書苑。P.229-254。
- 歐用生 (2005)。內容分析法及其在教科書研究上的應用。載於莊梅枝主編，教科書之旅 (149-170)。臺北：中華民國教材研究發展學會。
- 謝斐敦、張源泉 (2012)。德國教育，輯於楊深坑、王秋絨、李奉儒主編：比較與國際教育。臺北：高等教育。171-220。
- 鍾靜、林素微、魯炳寰與鄒聖馨 (2002)。國小數學教材分析—統計與機率。臺北縣：國立教育研究院籌備處。
- 羅世宏譯 (2008)。古典內容分析。載於羅世宏、蔡欣怡、薛丹琦譯 (2008)。質性資料分析 (頁 167-190) (原作者：M. W. Bauer；原編者：M. W. Bauer & G. Gaskell)。臺北：五南 (原著出版年：2000)。
- 嚴翼長 (1989)。西德課程與教科書之一般概念及其編撰原則。載於中華民國比較教育學會 (主編)，各國教科書比較研究 (457-499 頁)。臺北市：臺灣書店。

二、英文部分

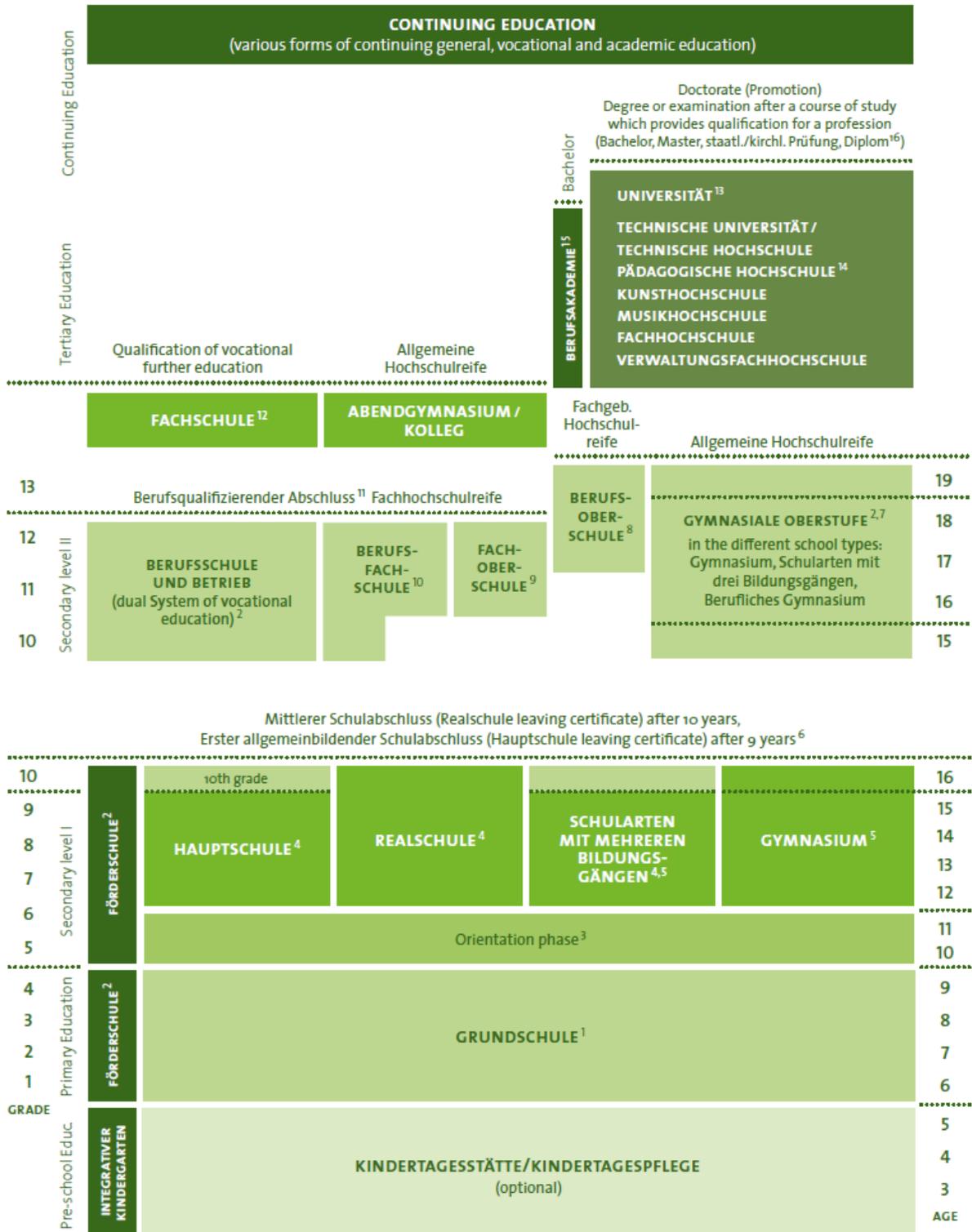
- Bright, G.W., & Friel, S.N. (1998). Graphical representations: Helping students interpret data. In S.P. Lajoie (Ed.), *Reflections on statistics: Learning, teaching, and assessment in grades K-12* (pp. 63-88). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Chance, B. L. (2002). Components of statistical thinking and implications for instruction and assessment. *Journal of Statistics Education, 10*(3). Retrieved from <http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/chance.html>
- Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research on Mathematics Education, 18*, 382-393.
- Daniel, F., & Braasch, J. (2013). Application exercises improve transfer of statistical knowledge in real-world situations. *Teaching of Psychology, 40*, 200-207. doi:10.1177/0098628313487462
- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 45*(5).
- Finney, S. J., & Schraw, G. (2003). Self-efficacy beliefs in college statistics courses. *Contemporary Educational Psychology, 28*, 161-186.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education report: A pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Friel S.N., Curcio, F.R., & Bright, G.W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*, 124-158.
- Gal, I. (2000). Statistical literacy: Conceptual and instructional issues. In D. Coben, J. O' Donoghue, & G. E. Fitzsimons (Eds.), *Perspectives on Adults Learning Mathematics* (pp. 135-150). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic.
- Gal, I. (2002). *Adult's statistical literacy: Meanings, components, responsibilities*. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.
- Gal, I. (2003). Teaching for statistical literacy and services of statistics agencies. *The American Statistician, 57*, 80-84.
- Garfield (1997), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 107-124). Amsterdam: IOS Press and ISI.
- Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education, 10*(3). Retrieved from <http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/garfield.html>
- Garfield, J., and Gal, I. (1999), "Teaching and Assessing Statistical Reasoning," in *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*, ed. L. Stiff, Reston, VA: National Council Teachers of Mathematics, 207-219.

- Garfield, J., delMas, R. and Chance, B. (2001). *TooLSM for teaching and assessing statistical inference*. Paper presented at the Joint Mathematics Meetings, New Orleans, LA.
- Garfield, J., delMas, R., & Chance, B. (2003). *The web-based ARTIST: Assessment resource tooLSM for improving statistical thinking project*. Paper presented at AERA annual meeting. Retrieved from https://app.gen.umn.edu/artist/articles/AREA_2003.pdf
- Holmes, P. (2003). *Statistical literacy, numeracy and the future*. Retrieved from <http://www.statlit.org/PDF/2003HolmesAugsburg.pdf>
- Karpiak, C. P. (2011). Assessment of problem-based learning in the undergraduate statistics course. *Teaching of Psychology*, 38, 251–254.
- Krippendorff, K. (1980). *Content analysis: An introduction to its methodology*. Beverly Hills, CA: Sage.
- Lajoie, S. P., Jacobs, V. R., & Lavigne, N. C. (1996). Empowering children in the use of statistics. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 401-425.
- Lehohla, P. (2002). *Promoting statistical literacy: A South Africa perspective*. Paper presented at the sixth International Conferences on Teaching Statistics, Cape Town, South Africa.
- Lin, Y. H. (2010). Integration of item hierarchy and concept tree based on clustering approach with application in statistics learning. *WSEAS Transactions on Information Science and Applications*, Issue 7, Volume 7, 912-922.
- McClure, C. (1994). Network literacy: a role for libraries. *Information Technology and Libraries*, 13(2), 115-125.
- Mimmack, G. M., S. J. Mason, and J. S. Galpin, 2001: Choice of distance matrices in cluster analysis: Defining regions. *Journal of Climate*, 14(12): 2790–2797.
- Mitchell, CH. y Ault, R.L. Reflection-impuLSMivity and the evaluation process. *Child Development*, 1979, 50, 1043–1049.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., & Chrostowski, S. J. (2004). TIMSS 2003 Mathematics Report. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- Piaget, J. (1970). “*Piaget’s Theory*,” in P.H. Mussen, ed., *Carmichael’s Manual of Child Psychology*, 3rd ed. N. Y.: John Wiley and Sons.
- Rumsey, D. J. (2002). Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. *Journal of Statistics Education*, 10(3). Retrieved from <http://www.amstat.org/publications/jse/v10n3/rumsey2.html>
- Scheaffer, R. L., Watkins, A. E., & Landwehr, J. M. (1998). What every high-school graduate should know about statistics. In S. P. Lajoie (Ed.), *Reflections on statistics: Learning, teaching, and assessment in grades K-12* (pp. 3-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Schild, M. (1999). *Statistical literacy: Thinking critically about statistics*. Retrieved from <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.39.5884&rep=rep1&type=pDf>

- Schild, M. (2004a). *Information literacy, statistical literacy and data literacy*. IASSIST Quarterly, 28, 6-11.
- Schild, M. (2004b). *Statistical literacy is critical thinking about statistics in arguments*. Retrieved from <http://www.augsburg.edu/ppages/~Schild/>
- Schild, M. (2010). *Assessing statistical literacy: Take CARE*. In P. Bidgood, N. Hunt, & F. Jolliffe (Eds.), *Assessment Methods in Statistical Education* (pp. 133-152). Padstow Cornwall: Wiley.
- Schild, Milo (2001). *Statistical Literacy: Reading Tables of Rates and Percentage*. *ASA Proceedings of Statistical Education Section*. Retrieved from www.StatLit.org/pdf/2001SchildASA.pdf.
- Snell, L. (1999). *Using chance media to promote statistical literacy*. Paper presented at the 1999 Joint Statistical Meetings, Dallas, TX
- Wallman, K. (1993) *Enhancing statistical literacy: Enriching our society*. *Journal of American Statistical Association*, 88, 1-8.
- Watson, J. M. (1997). *Assessing statistical thinking using the media*. In I. Gal & J. B.
- Watson, J. M. (2003). *Statistical literacy at the school level: What should students know and do?* Retrieved from <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/3/3516.pdf>
- Watson, J. M., & Callingham, R. (2003). *Statistical literacy: A complex hierarchical construct*. *Statistics Education Research Journal*, 2(2), 3-46.

附錄 德國學制圖

Basic Structure of the Educational System in the Federal Republic of Germany



資料來源：Secretariat of the Standing Conference of the Ministers of Education and Cultural

Affairs of the Länder in the Federal Republic of Germany (2017) .

圖示說明：

*Kindertagespflege：日間托兒所

*Grundschule：小學

*Orientation phase：定向階段

*Gymnasium：文理中學

*Hauptschule：主幹中學

*Realschule：實科中學

*schularten mit mehreren Bildung gängen：多元進路學校

*Fachhochschule：高等技術學院

*Berufsfachschule：職業技術學校

*Fachschule：技術學院

*Berufsschule und betrieb：職業與商業學校