

數學教材為支持素養學習所需的解構與重構

單維彰¹

¹ 國立中央大學師資培育中心與數學系/副教授

摘要

《十二年國民基本教育課程發展指引》以核心素養為主軸，清晰陳述了經歷十二年基本教育之後的國民所應達成的理想狀態，而成就這份願景的具體路徑，則須經由各教育階段之各領域課程的學習內容、教學方法及學習評量共同地支持與實踐。其中數學領域之學習內容和教材設計，則以成就國民的數學素養為最終目的。

本文將從「數學素養」與「前導研究」開始，回顧「素養導向」之數學領域課程綱要的發展脈絡，分析「前導研究」列舉之八項數學內容修改建議在「課程綱要」中的實踐程度，並特別在空間概念、不確定性與數據分析、和比例式與直角三角比這三項，較為深入地分析新課綱著眼於學科教學知識所做的內容重新配置。這些學習內容的重置，不能被簡化為「螺旋式」的課程設計，而是按照教學邏輯對學科知識所做的解構與重構。

關鍵字：素養導向的教材、數學領域、核心素養、國民素養、數學素養、課程綱要、課程手冊

壹、前言

《十二年國民基本教育課程發展指引》(國家教育研究院, 民103) 定義「核心素養」為一個人為適應現在生活及未來挑戰, 所應具備的知識、能力與態度; 核心素養強調學習者在生活中能夠實踐力行的特質, 而其內涵則建基於以人為本之終身學習者的培養。前述《指引》以核心素養為主軸, 清晰陳述了經歷十二年基本教育之後的國民所應達成的理想狀態, 而成就這份願景的具體路徑, 則須經由各教育階段之各領域課程的學習內容、教學方法及學習評量共同地支持與實踐。《指引》亦明白指出, 各領域需依其課程特質而將核心素養轉化為各教育階段的理念與目標, 本文將著眼於國中教育階段與高級中等教育階段的數學領域學習內容和教材設計。

數學作為教育中的一門學科領域, 乃至於學校課程中的一門科目, 其特質近似於一種語言, 是人們藉以學習其他知識、或用以表述其思想或創造的溝通媒介。此一特質使得數學看似矛盾地一方面被認為極其重要, 而同時另一方面又被指責為百無一用。蓋因語言也者, 必為抽象之概念, 具有任意組合之無窮可能性, 而且很難在生活經驗中指出確切的實踐作品與力行表現。也因為此一特質, 使得數學不論在我國的課程綱要或是美國的共同核心課程標準 (CCSS: Common Core State Standards for Mathematics), 都是自成一個領域, 有別於其他領域的多科組合結構。

數學素養作為核心素養的一個面向, 先有「國際學生能力評量計畫」(PISA) 為素養導向之評量樹立了典範, 而後有《教育部提昇國民素養實施方案-數學素養研究計畫結案報告》(李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏, 民 102) 為十二年國教所欲達成的國民數學素養確立了原則與方向。然而, 前者可謂針對 15 歲少年所做的總結性評量, 後者可謂針對 18 歲國民所規劃的總結性教育願景, 兩者都提供了具體的目標與參照, 但是並沒有指明: 該如何設計學校教育中的數學課程, 以實踐素養的理念並達成其願景? 有鑑於此, 當國家教育研究院研擬十二年國民基本教育課程綱要之總綱的同時, 並行完成了《十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究》(林福來, 單維彰, 李源順, 鄭章華, 民 102), 作為素養導向之課程綱要設計的初步探究。

「國民素養」與「前導研究」都揭櫫數學作為一種語言的概念, 此即成就一名終身學習者的核心素養, 也呼應素養 (literacy) 之為「讀與寫的能力」的語源意涵。而「國民素養」重視數學教育中的文化素材, 「前導研究」則呼籲 (對學習者而言) 有意義的學習脈絡, 都是意在實踐「以人為本」之核心素養內涵。在此思想原則之下, 「前導研究」列舉八項數學領域學習內容的修改建議。以學習內容的角度檢視這八大議題, 則會發現它們幾乎不涉及課題的增刪, 而是基於素養教育的精神, 和語言與脈絡的原則, 予以重新配置。

「前導研究」的八大議題, 在張鎮華教授領導制訂的《十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要 (草案)》(教育部, 民 105)

裡面，獲得很大程度的呼應。有人說新課綱增多了「螺旋式」的設計，這個看法固然符合事實，卻只是表面現象。更為深刻的看法是，新課綱工作小組的同仁們，審視多年以來「凝為塊狀」的數學課程，按照素養的精神以及學科教學的邏輯，予以拆解，然後以學生為本（而不是以學科知識為本）重新建立學習脈絡。舉例而言，過去國中階段的統計圖表和機率概念，全部集中在九年級下學期一次教完，新課綱則按照其他學科的需求，並搭配學生數學能力的發展，將其分配在七、八、九年級，甚至將技術上較複雜的百分位數，推至十年級。

以下，本文先統整回顧「數學素養」的理念脈絡，以及「前導研究」對於課程綱要該如何支持素養理念之建議，然後分析「前導研究」之八大議題在「課程綱要」中的實踐程度，並特別藉以下三項課題：空間概念、不確定性與數據分析、和比例式與直角三角比，彰顯數學課程的解構與重構情形；在過程中，作者將舉出國家教育研究院「十二年國民基本教育數學領域教材與教學模式研發編輯計畫」（以下簡稱「原型計畫」）所研發的素養導向之數學教材模組，作為參考範例。

貳、數學素養與數學領綱前導研究

隨著十二年國民基本教育之理念的發展，探討「素養」、「核心素養」以及「國民素養」的研究論文（例如蔡清田、陳延興，民 102）、導讀性文章（例如單維彰，民 105）以及專案報告（例如），已經非常豐富，本文不再贅述關於素養的通論，而聚焦於數學素養。

數學素養的原文 Mathematical Literacy 來自於國際學生能力評量計畫 (PISA: Program for International Student Assessment) 之中，對於數學評量內容的定義。英文 Literacy 的原意是識字與讀寫能力。此概念不含聽與說的能力，因為它原指母語而非外語，能流利聽與說的人，仍可能是文盲，不能算是具備了 Literacy。將基礎數學視為一種語言，作為一切學習的基本工具，促使英國在 1957 年創造了一個新字：Numeracy，意指認識數字並具備關於數字的讀寫能力，簡要的解釋就是「識數和能算」。英國和鄰近的蘇格蘭和愛爾蘭，常以 Literacy and Numeracy 當作其小學基礎教育的主題（例如 Department for Education, 2003）。

由上可知，Numeracy 比較侷限在數與量的學習內容，這的確是小學基礎教育的主要數學課題。但 PISA 的施測對象是即將完成國民共同教育階段的 15 歲少年，而不是兒童，所以不能只具備數與量的數學知識和能力，還要認識形體、變化關係、以符號代表數、資料處理與不確定性等數學內容，並具備關於它們的讀寫（與實用）能力。作者認為 PISA 的主事者是在前述思考脈絡之下，選用了 Mathematical Literacy 這個詞，而這又意味著：將數學視為一種語言，它跟母語和外語一樣是學習與溝通的基礎媒介。

呼應前述之數學和語言的類比，以及素養中注重溝通的能力，「前導研究」舉出兩項數學領域的基本理念，第一項便是「數學是一種語言」（林福來等，民 102，p.31）。事實上，這項見解向前得自九年一貫數學領域課程綱要（教育部，民 97），而向後則延續到十二年國教的數學領域課程綱要（草案）（教育部，民 105）。這項

理念在素養導向的數學教育中，站在極為根本的位置上。從學習內容的取捨，教材配置的設計，到教師教學理念的定位，都需要以這一項基本的原則，而重新檢視與調整。

閱讀 PISA 歷年公告的文件，可發現該組織對數學素養的定義，隨時間而略有修訂，但是總是緊扣著實用數學的能力。例如在 PISA 2012 的評量架構中，將數學素養定義為

在不同情境脈絡中，個人能辨識、做及運用數學的能力，以及藉由描述、建模、解釋與預測不同現象，來瞭解數學在世界上所扮演的角色之能力。

接著闡述「數學素養是連續的，即數學素養愈高的人，愈能善用數學工具做出有根據的判斷，這也正是具建設性、投入性及反思能力的公民所需具備的。」(臺灣 PISA 國家研究中心，民 100)。而在 2013 年的文件中，修改定義為

個人有能力在多樣的情境中去形成、應用與詮釋數學，這包括了數學化推理與使用數學概念、程序、事實與工具來描述、解釋與預測現象。

又接著闡述「數學素養輔助個人認知到數學在世界上扮演的角色，促成建設性、積極參與以及能反思的公民所需之周延有據的判斷與決策」(OECD, 2013)。銜接此一實用數學之脈絡，「國民素養」的研究團隊將數學素養定義如下(李國偉等，民 102)：

個人的數學能力與態度，使其在學習、生活與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效與他人溝通觀點。

檢視前述對於數學素養的看法，除了比較傳統的數學知能以外，都有辨識以及詮釋或解釋的成分。「前導研究」根據這些總結性的描述，思考如何將其轉化為形成性的課程綱要架構，獲致以下結論(林福來等，民 102，p.30)：

... 我國和各國在進行課程設計時，都強調內容 (contents) 與能力 (skills、competence、literacy、practice) 兩大面向。再仔細檢視，發現除了「知道」與「能做」之外，都還內含有或者區分出認識 (understanding)、辨識 (sensitivity) 與見識的較高層次認知，甚至包括賞識 (appreciation) 等相信數學有益、認為數學美好、堅忍、勤奮等情意面向。因此，12 年國教之數學課程架構，除了包含內容與能力兩大向度之外，也應蘊含認知與態度。因為中國儒、道、釋的哲學發展，也都蘊涵內容、能力以及認知與情意等面向，同時也廣為教科書編著者、教學者、評量者、甚至社會大眾所熟知。因此，我們引

用古聖先賢的智慧，簡單扼要地以中文的「知」、「行」、「識」來詮釋 12 年國教數學課程的內涵。

「知」和「行」的意思比較單純，就是前面說過的「知道」和「能做」兩個向度，分別對應英文 to know 和 can do 的意思，而且潛在的主詞都是「學生」。這兩方面的課綱敘述大約直接對應大家熟悉的知識內容和操作技能。可是，作者想要更細緻地指出，在教材層面上，「知」是大家熟悉的陳列知識，是為「是什麼」的敘寫，但是「行」則不僅是操作程序的陳列或示範，更應該包括「做什麼」的敘寫。「知、行、識」的數學素養培育架構，建議數學課綱（還有將來的教材和教法）除了注意數學課題「是什麼」以外，還要在實用的規準之下，注意並經常反思，學習某個數學課題要用來「做什麼」？

相對而言，「識」的意思比較微妙，是關於理解和連結的後設認知、以及對數學價值的賞識態度。對照知「是什麼」、行「做什麼」，識則是「為什麼」，包括「為什麼要這樣」、「為什麼是這樣」等問題的理解。即使限定在「理解」這一方面，「識」仍然很難找到對應的英文；它除了對應基本的 to understand 以外，還有 make sense of（使產生意義）、be aware of（意識到）和 have an insight into（洞察）的意思。在認知方面，識還有「辨識」（recognize）的意思，意即「察覺某現象或關係或模式（pattern），可能符合某種數學結構，於是可以嘗試以該結構作為探究問題的模型與工具」。

然而，因為十二年國教之課程綱要整體格式的規範，以及預期作為一份法律文件的要求，《課綱（草案）》需以學習內容及其對應之學習表現為敘寫之主體，導致課綱文件主要涵蓋了「知」與「行」的範疇，而「識」的範疇則挪到了接續課綱的《十二年國民基本教育數學領域課程綱要課程手冊》裡，國家教育研究院預期將在民國 105 年底公布《課程手冊》，該文件將對教材編寫與教師教學提供豐富的建議，也有更多的篇幅可以用來闡述「識」的範疇，但是不具備法律效用。

結束本節之前，作者補綴「素養」的文化意涵。前述之素養定義皆可視為教育實用主義之表現，固然「語言」的類比隱藏著文化意涵（因為語言是文化的載體），但對我國而言，必有更深的意涵。教育當然有其經濟價值，但是在我們的文化裡，教育不純然是經濟活動。所以，我國對於教育的傳統看法，不容易完全接納徹底的實用主義。素養一詞，望文生義還有「素質」和「修養」的含意。進一步說，我國社會期望受教育者能擁有知識與技能上的素質，再加上道德與智慧上的修養。因此，不論「前導研究」還是「國民素養」，都論述了素養的文化意涵。然而本文專注在數學學習內容為支持素養導向之理念所做的重整，如次節所述，故不再闡述文化課題（請參閱單維彰，民 105）。

參、數學綱要（草案）對前導研究的實踐情形

「前導研究」呼籲（對學習者而言）有意義的學習脈絡，《課綱（草案）》則意圖掌握數學學習的最主要脈絡，讓重要的課題有機會在教材中反覆出現，一方面彰顯其重要性，二方面在有意義的脈絡裡增加練習的機會。在此思想原則之下，

「前導研究」列舉八項數學領域學習內容的修改建議，而《課綱（草案）》也進一步按照素養的精神以及學科教學的邏輯，設法以學生為本（而不是以學科知識為本）重新建立學習脈絡。

由於數學作為基礎語言，其學習內容少有因應時代而改變的需求（小部分的增刪詳於後），所以，從學習內容的角度檢視《課綱（草案）》所做的變革，則會發現它們幾乎不涉及課題的增刪，而是重新配置；亦即本文所謂的解構與重構。

以下，我們藉「前導研究」提出的八大議題為綱目，檢視《課綱（草案）》的變革。雖然課綱的改變不僅於此，但是本文僅討論此八項議題。

一、不確定性與數據處理

台灣國小、國中、高中機率與統計課程向來缺乏建立在「不確定現象」上，發展「不確定性」的思維，導致教材中關於機率的問題，在國中階段專注於比例的計算，而在高中階段則因為強調樣本與事件的集合關係，則偏重於集合運算與排列組合的應用。另一方面，現行之九年一貫課綱中，機率首度出現在九年級，數據分析也集中在少數階段，不似歐美及中國的課綱，將這個主題分散在個學習階段，循序漸進地建立「不確定性」的概念與處理該問題的思考方法。

十二年國教之《課綱（草案）》將不確定課題（舊稱機率與統計）分散在各學習階段；就學習表現而言，五個學習階段（I—V，其中IV是國中階段，V是高中階段）皆有教學目標，以下從各階段取一項為例：

- d-I-1 認識分類的模式，能主動蒐集資料、分類、並做簡單的呈現與說明。
- d-II-1 報讀與製作一維表格、二維表格；報讀長條圖與折線圖，並據以做簡單推論。
- d-III-2 能從資料或圖表的資料數據，解決關於「可能性」的簡單問題。
- d-IV-2 理解機率的意義，能以機率表示不確定性和以樹狀圖分析所有的可能性，並能應用機率到簡單的日常生活情境解決問題。
- d-V-3 理解事件的不確定性，並能以機率將之量化。理解機率的性質並能操作其運算，能用以溝通和推論。

就學習內容而言，《課綱（草案）》在每個年級都有屬於「不確定性」的課題，從一、二年級的分類與計數開始，三年級加入列聯表（這是新的項目），四至十年級漸次學習各種呈現數據的圖表，六年級開始討論「可能性」，七年級起引進計算機（calculator）作為處理數據的工具，八年級認識相對與累積次數作為客觀（頻次）機率的基礎，九年級認識古典機率以及描述數據分布的基本統計量，十年級繼續深化為複合事件的古典機率與一維、二維的數據分析，最後完成於十一年級的條件機率以及十二年級（選修）的（離散型）隨機變數分布。

在高中階段，將現行十年級的機率主題拆至十和十一年級，並不是隨意的「螺旋」設計，而是企圖釐清兩個思維的層次：在十年級，以古典機率為範疇，推論關於機率的運算規則（例如餘事件的機率等於1減去事件的機率），在十一年級，將這些運算規則應用在主觀與客觀（頻次）機率，作「不確定性」思維的推論。

這是「解構與重構」的最佳範例，(或許)除了列聯表以外，在12年國教結束的時候，全部的課題都跟舊的課程一樣(少了連續型隨機變數與推論統計)，但是按照學生認知的成長與學科教學邏輯的脈絡而重新安排了進度。

二、數的四則運算

九年一貫關於「數」的教學本來就如「前導研究」建議的「強調運算的概念性了解...學童只要能在對較少位數的運算有概念性理解，他便可以推廣到較大位數的運算」在「全數加法最多為三位加三位；減法最多為三位減三位；乘除最多為二位乘以二位和三位乘以一位」；除法為四位除以二位。」之具體建議方面，《課綱(草案)》考量國情而保留了「億以內的數」之學習內容，但是在「補充說明」(仍屬課綱的文件範疇)之中規範大數的計算應如「 1600×200 」與「 $60000 \div 400$ 」之形式，也就是「有效位數」限於三位或二位以內的原則。

《課綱(草案)》從七年級起正式引進計算機(器)，使得教師有更多的機會注重數的概念性理解，而不必強調繁複或過於精確的計算。用計算機取代數值運算是很自然的行為，但是不在小學階段進行，是為了維持概念性的學習與基本操作能力。然而，計算機的引進，主要不是為了減輕計算的負擔，而是為了協助數學的學習。例如，沒有計算機的情況下，學生對於 $\sqrt{17}$ 、 $2^{3.2}$ 乃至於 $\tan 25^\circ$ 這類「記錄數的符號」，必須而且僅能有概念性的理解，但是計算機提供學生具體認識這些數式的機會。

我們可以順帶提到兩個相關課題：絕對值與數字的科學記號，以前大量集中在七年級，現在都拆開了。在國中階段，絕對值與科學記號都僅限於概念理解與溝通表達，不涉及任何計算；它們的計算方法與代數性質，都挪到了高中階段。這些教學位置上的挪動，不減損最終的結果，但是提供教師和學生更長的時間來熟識並內化上述觀念(與符號)，而且在它們即將開始被大量使用且具備較多實用範例的時候，才適時地引介到課程裡。

三、直角三角比與比例式

「前導研究」基於「參考以往的數學標準與其他國家的做法」，以及普通型高中和技術型高中(電子電機與工程類群)的殷切需求，建議在國中階段恢復基礎的直角三角比。這項議案，可能是十二年國教之國中階段最劇烈的變化，引起多方的關切。最後，《課綱(草案)》在九年級增列了一個條目：

S-9-5 直角三角形的三角比：對直角三角形的一個銳角定義「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引入符號 $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ ；直角三角形內，給定一邊的長和一個銳角的角度，決定另一邊的邊長；學生無使用計算機時，角度限於30度、45度、60度。

《課綱(草案)》參考日本、歐美、以及99高中數學課綱的用詞，特別強調「三角『比』」而非「三角函數」的理由是，學習目標在於延伸相似三角形的對應邊成比例，故對應之邊長比值為常數的概念原理，在知識內容和操作技能上，都

以「比」的學習為原則，只是這些發生在直角三角形上面的「比」特別有用，所以計算機「背誦」了這些特殊的比值，方便我們查詢而已。

在國中階段，透過 \sin 及 \cos 與畢氏定理的連結，導出它們的平方關係，以及根據定義導出 \tan 與 \sin 、 \cos 的等式關係，都是無可厚非的。但是，在國中階段， \sin 、 \cos 、 \tan 的代數關係「最多」僅止於此，課綱強調的還是「在情境中的具體操作」。

上述教學重點的典型示範之一，是曾明德、鄧家駿 (民 105) 在「原型計畫」中研發的《素養導向國民中學數學教材：直角三角比》。這份教材從一幅出現在臺灣公路邊的「連續一公里 75% 險升坡」標誌照片出發，從公部門網站查詢升坡百分比的定義，在方格紙上製作相似的直角三角形，估計其仰角，比對周遭的環境以及網路上的其他資料，最後討論那個標誌幾乎肯定有誤。

因為國中協助了三角比的最初步認識，並且留下兩條線索：直線的斜率以及夾角的 \tan ，讓學生有機會逐漸熟成這些觀念，然後在高中階段進一步發展極坐標和廣義角的三角比。此項變革，使得高中和高職 (C 版) 課程，得以在十年級引進廣義角的三角比，並有機會與坐標幾何結合。此設計不僅滿足自然科學的需求，也豐富了高中一年級以坐標方法處理幾何問題的工具。

「前導研究」其實只提出「直角三角比」的建議，但是在課綱研議過程中，發生了七年級可能不宜學習「連比」的議題，使得工作小組重啟林福來 (民 73) 和林福來、郭汾派、林光賢 (民 74) 關於「比與比例」的研究結果和建議，並與三角比的概念發展結合，重新設計比的教學歷程如下。

六年級開始引進比的符號與比值概念，可以在算術層次上做基本的推論。七年級正式寫出比例式，在代數層次上操作更多情境的問題，但是刪除了繁分數的問題，而且不做三連比：可以在具體情境中，以「遞移」的方法處理三個量的比，但是不寫成三連比。八年級藉由特殊直角三角形的三邊關係，引進三連比的符號以及具體的擴、約操作。九年級正式學習三連比以及三角比。

有鑑於「比」是處理「生活中」問題的最有效數學工具之一，也是設計與藝術類群的最主要數學工具，所以《課綱 (草案)》在高中階段的 B 類課程中，再度加入「比」的學習內容 (G-11B-3，平面上的比例：生活情境與平面幾何的比例問題)，以期提高國民獲得數學素養的機會。

四、論證

「前導研究」指出我國的數學課綱過度將「論證」集中在幾何課題，而且缺乏臆測 (conjecture) 的能力指標。《課綱 (草案)》避免在小學階段置入明顯的論證性學習內容，並認為這一類思維與活動，(在小學階段) 較適合成為教學的建議而不是學習目標；例如，在五年級三角形與四邊形的性質的條目「補充說明」裡，列出一個論證的例子：

四邊形四內角和為 360 度。推理知三角形不可能有兩鈍角。

如以上範例顯示的，《課綱 (草案)》較常使用「推理」一詞表達「論證」的學習

目標，而且不再僅限於幾何課題，例如在三年級有**數量模式與推理**之條目。較正式而大量的數學論證，的確是從國中階段才開始的。例如九年級有正式的**證明的意義**條目。而我國的高中數學教師都習於嚴格地解說與論證，所以論證的思維與活動，在高中階段並不虞匱乏。

綜合而言，數學論證的內容（知）、方法（行）與意義（識），確實是數學素養的核心內涵。可是，在國小階段，需要倚賴教師之專業能力做正確而適當的拿捏，到了高中階段，卻經常因為太快進入抽象論證而導致學習困難，整體而言的共同困難則是課堂時數不足。所以，數學課程中的「論證」教學，仍然是一個需要持續關切的重大議題。

《課綱（草案）》的學習內容並沒有「臆測」一詞，相對的用詞是「觀察」。例如以下六年級的條目：

R-6-2 數量關係：代數與函數的前置經驗。從具體情境或數量模式之活動出發，做觀察、推理、說明。

而高中階段的數列之遞迴關係、數學歸納法、以及二維數據的相關係數課題，都強調先「觀察」並發現規律性，然後才訴諸於數學方法。觀察（或臆測）確實是數學素養的重要成分（屬於「識」的範疇），而礙於我國數學課時的限制與教師教學典範的影響，這個向度的教學活動確實還有很大的增強空間。《課綱（草案）》在學習內容的表格上，特別列出一欄「參考教具」，用意就是強調學生「親手做」的機會，操作活動有利於觀察、臆測與歸納。

五、空間概念

現行的數學課程，在小學階段發展了認識基本形體的空間概念，但是在七到十年級中斷（九年級略有空間概念的課題，但幾乎全是國小內容的複習），到了十一年級急速學習兩面角、截面圖形、點到（空間中）直線或點到平面的投影等概念，並且立即跟進空間坐標與向量方法，顯然有課程的連貫性問題。另一方面，我國的空間概念教學，向來較偏重正規的幾何課題，較少連結生活經驗，對於近年益發重要之3D電腦軟體的相關基礎知識，也顯得無力支持。是故「前導研究」認為「空間概念教學的成敗，以及視覺化的認知、視覺溝通和視覺推理，攸關國民的基本素養，應受到合宜的重視」而建議「空間概念宜基本上逐年發展，在課程中形成一條清楚的脈絡」。

《課綱（草案）》在五、六、七、九、十年級漸進發展空間概念，並且更細緻地釐清五、六、九年級各自的教學目標。五年級使用實體的工具（例如正方體、直角的角鋼）測量生活環境裡的互相垂直的面，並推論和觀察互相平行的面，在長方體的環境裡認識線（稜邊）與面的垂直與平行關係。此處的確有「展開圖」主題，但是教學重點在於連結表面積觀念，以及長方形（或正方形）在空間中的相對關係，期望教科書不要設計遠離常識的「智力測驗」型試題，也希望教師們不必刻意補充這些刻意創造的難題，這些考題容易讓學習悖離「素養」。

我們推薦古欣怡、林美曲（民105）在「原型計畫」中研發的《素養導向國民

小學數學教材：《正方體與長方體》，作為前述五年級「垂直面」與「展開圖」的素養導向教材之具體參照。這份教材的主要活動，是帶領學童動手做長方體形狀的「包裝盒」，並要學童練習在平面上繪製長方體的「示意圖」。

《課綱（草案）》在形體的「圖像化」方面，做了較細緻的安排：帶領學生認識三種在平面上呈現空間形體的方式：透視圖、示意圖和「視圖」。所謂透視圖跟美術課講的一樣，非常近似於視覺效果；在透視圖上，長方體上互相平行的兩邊，總不會表現出平行的樣子，而會在延長之後交於一點。數學、科學與工程則習慣用「示意圖」來表現長方體以及常見的形體，這是一種已經形成慣例的溝通方式，就像文字和數字一樣，它很基本但是並不那麼自然，不是人人都能在生活經驗中獲得直覺的項目，而是需要學習的項目。至於「視圖」則是工程中常用的圖像化方式，由於所謂 3D 軟體的普及而使其更為一般人所需要，所以初步嘗試將其納入數學領域的學習內容。所謂視圖是形體在指定平面上的正射影，而《課綱（草案）》僅涉及基本的「三視圖」(S-7-2)，是假設將形體放置在正方體容器內時，朝著所謂「上、前、右」或「上、北、東」面的正射影結果。《課綱（草案）》將討論的目標設定在由少數正方體積木堆積而成的「形體」上。

六年級將形體與展開圖推廣到柱體與錐體，拿長方體當出發點，換個角度以「四角柱」來認識它。九年級跟五年級類似，還是在長方體的「場域」內學習，但是不再使用工具，而須理性地理解兩面的垂直與平行關係，認識兩兩稜邊之間的垂直、平行和歪斜關係，並能辨識與理解線與面的垂直關係。特別舉一個例子，五年級教師沒有責任讓孩子們理解長方體「不落在同一面之兩側的」稜邊平行關係（當然能認識也好），但是九年級教師就該讓學生理解這個事實。

攸關 3D 設計原理的「截面」課題，例如將長方體「截去」一個頂點而產生一個小三角形，或者討論某稜邊上的中點與它「斜對面」兩個頂點所形成的三角形，或者通過四角錐的頂點且垂直於底面所截的三角形。此外，球上截出的圓以及圓柱上截出的橢圓，以前都被「嵌入」在高中的評量試題裡，並沒有仔細而正式的學習內容。《課綱（草案）》將這些課題放在十和十一年級，讓學習有所銜接，也讓學生有按部就班的學習機會。

六、轉移矩陣、信賴區間、插值多項式、外積、用向量處理平面幾何

此議題專門針對高中階段較為技術性的課題。簡單地說，《課綱（草案）》刪除了拉格朗日插值多項式，也刪除了包含信賴區間在內的連續型隨機變數和推論統計。而轉移矩陣（方陣）雖然僅在（11 年級）B 類必修課程中明訂刪除，在 A 類課程裡也限於二階了。同樣地，空間向量的外積也僅列於 A 類的必修課程。

至於平面向量，則連結下一項議題（線性代數），盡量以位置向量心相以及線性組合的方法為教學的主要脈絡，希望引導教科書弱化以向量方法處理平面幾何命題的教學，藉以帶領教師將平面向量的教學，聚焦於線性代數的前置經驗。

此項（以及後面兩項）議題，專指十一年級以後的數學課題，它們不再是全體國民必須共同學習的課題，而粗略地開始依據專業需求而有所區隔。因此，這些高中階段之課題的研議，不僅依據「素養」的原則，也考量未來學習專業知能

之需求。

七、線性代數

承前項，《課綱（草案）》將平面向量的學習目標，導向為了「線性代數」所做的基礎準備。線性代數與其他三種學科：微積分、統計、計算機原理，組成大學提供給幾乎所有學生的「數學類」共同課程，作為為專業準備的十一、十二年級數學課程，有責任為此目的設計更合宜的學習內容。

「平面向量」在數學發展史上，可謂並不存在。因為它能解決的問題，都被坐標方法和複數方法涵蓋了，而複數還具備更豐富的內涵。所以，早期（民國 50 至 70 年代）的平面向量主題，是為了支持空間向量的學習，作為空間向量的較為具體而容易操作的類比。逐漸地，教師發現平面向量是處理幾何問題的利器（這是當然的），導致教材的發展逐漸演變成跳過基礎的坐標方法，而直接訴諸於向量方法。後者的作法固然威力十足，但是難免有倒果為因而捨本逐末的危險，且造成教學邏輯的跳躍，而衍生出不必要的學習障礙。

向量有兩種常見的「作用」：作為方向與長度的量，作為數對在坐標系統中的位置；雖然它們是一體之兩面，但在操作上截然不同，使得大多數學生在初學的時候，難以區分兩者的差異，也難以整合它們的理解。前者經常用在物理科學上，作為力、位移、或速度的數學模型，而過去（民國 70 年代以降）的數學課程也聚焦於此作用，它的技術性關鍵是熟練地將向量的起點移到平面的任一點。相對地，後者主要用在線性組合，成為矩陣乘法以及線性代數的基本概念，其主要心相卻是位置向量，亦即向量之起點必為原點的情況。在線性組合的心相中，向量成為類似「交通工具」的作用，將一個點「傳送」到另一個點。

向量的兩種「作用」其實是數線概念的推廣。當我們說 2、3 對應數線上的兩個點，這是位置向量的概念。而當我們做 $2+3$ 時，在數線上從 2 的位置向右移動 3 個單位（到達 5 的位置），就用了位移向量的概念。所以，一個數，在數線上同時有位置和位移兩種作用，這是大多數人不學而自明的；推廣到向量的作用，則必須將「數」改成「有序數對」，而「數線」改成「坐標系統」。

所以向量的「位置」和「位移」作用，都是數學的本質，都值得學習（而且應該一起學習）。可是，向量的「位移」作用主要用來支持物理科學以及處理平面幾何的問題，兩者都不如「位置」作用更廣為學生所需，蓋因後者支持線性代數的學習，而隨著計算機工具的普及，線性代數已經不再是一門特殊的代數分支，而是計算機科學、統計學、圖學等等專業學科的共同基礎，更成為廣義的「數據分析」的最基本工具。

根據以上原因，《課綱（草案）》將平面向量的學習目標，從向量的位移作用，轉換到它的位置作用。具體的作法就是以線性組合的觀點，有系統而一致地詮釋線性聯立方程式以及矩陣乘法，並初步應用在平面上的線性變換。這些課題都是現行課程就有的，對教師並不造成學習壓力，但是弱化了向量的位移作用之後，學生有機會利用較長的時間，在較為單純的情境中，學習較為重要的線性組合概念。

八、多項式微積分

現行課綱已經將多項式的學習目標，從代數的「式的運算」轉向函數的「變化關係」，十二年國教《課綱（草案）》更進一步將多項式函數的學習目標，聚焦在大域 (global) 與局部 (local) 的函數圖形特徵，將一次與二次函數圖形的理解，延伸到三次函數圖形的特徵（必有一個對稱點）。這些特徵，就是函數圖形之切線、相對極點和反曲點的前置經驗，而後者又是微分的基本課題。

此外，不同於以往社會組的選修「數學乙」不含微積分基礎課程，《課綱（草案）》的理念之一是將「社會組」解釋為商管財經與社會科學，所以他們的高三選修「數學乙」課程，將會有微積分的題材。

肆、結語

本文統整回顧從「數學素養」和「前導研究」到數學領域的《課綱（草案）》再到《課程手冊》的發展脈絡與邏輯關係，可作為國中與高中數學教師的研習參考材料。本文亦以「前導研究」的八項議題為綱，列舉《課綱（草案）》呼應素養之訴求所做的學習內容調整，期盼教師能理解新的學習脈絡之必要性，而不僅只以「螺旋」的表面現象來理解新課綱。

「課程綱要」猶如生物系統的骨架，只能粗略地決定課程發展的前後關連，並不能具體呈現有如血肉組織的脈絡。具體的組織，有賴於教科書與輔助教材的發展。《課程手冊》將為教材的發展提供更多資訊，希望成為教材與教法的實際參考。此外，「原型計畫」更針對特定課題，提供完整而具體的參照物。除了前文提及的完成品以外，國教院已經在以下網址公布了 4 份 (8 冊) 103 年度的成果：

<http://www.naer.edu.tw/files/11-1000-1422-1.php>

另外 6 份 (12 冊) 104 年度的成果則預計在年底公布，而目前還有 6 份研發中的素養導向教材與教學模組。根據《課程手冊》和「原型計畫」的研究與操作經驗，鄭章華、單維彰（審查中）歸納出六項數學素養教材設計的原則。

即便課程有了完整的骨架和組織，仍是死物；能夠為它注入靈魂的，只有教師。作者認為，「識」的教學成分，只能由教師以言教與身教來完成。課綱與教材固然可以盡力依據「素養導向」的客觀證據而設計，然而，最終唯有教師才能將學生的學習「導向素養」。

伍、參考文獻

- 國家教育研究院 (民 103)。十二年國民基本教育課程發展指引。新北市：作者。
- 李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏 (民 102)。教育部提昇國民素養實施方案—數學素養研究計畫結案報告。臺北市：教育部。
- 林福來，單維彰，李源順，鄭章華 (民 102)。十二年國民基本教育領域綱要內容前導研究「整合型研究子計畫三：十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究報告」。新北市：國家教育研究院。

- 教育部 (民 105)。十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要 (草案)。臺北市：作者。
- 蔡清田、陳延興 (民 102)。國民核心素養之課程轉化。課程與教學季刊，16(3)，59—78。
- 單維彰 (民 105)。素養、課程與教材—以數學為例。教育脈動，5，取自 <http://pulse.naer.edu.tw/content.aspx?type=A&sid=215>
- 洪裕宏 (民 97)。界定與選擇國民核心素養：概念參考架構與理論基礎研究。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告。臺北市：國立陽明大學。
- 教育部 (民 97)。97 年國民中小學九年一貫課程綱要。臺北市：作者。
- 臺灣 PISA 國家研究中心 (民 100)。PISA 數學素養應試指南。臺南市：作者。
- 曾明德、鄧家駿 (民 105) 素養導向國民中學數學教材：直角三角比—教師手冊。新北市：國家教育研究院。
- 林福來 (民 73)。國中生的比例概念發展。科教月刊 87 期，166—174。
- 林福來、郭汾派、林光賢 (民 74)。比和比例的了解層次與認知階段。七十四年科教學術研討會論文彙整，139—150。
- 古欣怡、林美曲 (民 105)。素養導向國民小學數學教材：正方體與長方體—教師手冊。新北市：國家教育研究院。
- 鄭章華、單維彰 (審查中)。探究數學素養教材研修及其對教師專業發展的啟示。
- Department for Education (2003). *The national curriculum in England: Framework document*. Retrieved 2013.11.18, from https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/254336/MASTER_final_national_curriculum_11_9_13_2.pdf
- OECD (2013). *PISA 2012 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. Paris, France: Author.