抛物線本事

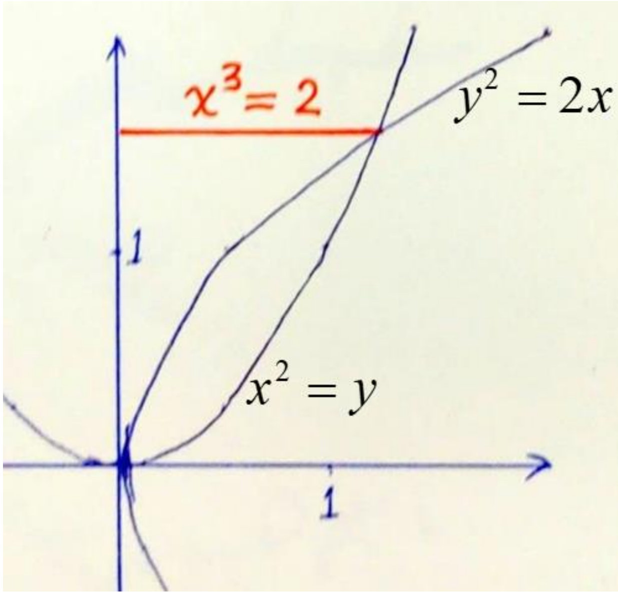
單維彰・民國 112 年 12 月 7 日

各位可能聽說過類似這樣的說法：古希臘的數學不重實用而重理論，這個特徵流傳到歐洲，造就了西方文明。我想要提議另一個看法，結果一樣（因為西方文明畢竟是一個近代可信的事實），但原因與過程略為不同。我倡議古希臘並無不重實用的意思，他們研究數學的初心也具有實用目的：酬神─答謝神或取悅神。在一個相信神能斷定死生禍福、管控風雨雷震的社會裡，還有什麼比酬神更實用、更要緊的文化活動？

古希臘的數學確實獨步於其他文明，但起因是他們認為必須用「真解」去酬神。譬如想要將一塊正方形的地基放大一倍，也就是從 1 平方單位變成 2 平方單位，希臘的匠師或地政幕僚應該能夠像其他文明的同儕（例如巴比倫、印度、中國），知道要把原正方形的邊長放大成 1.41… 倍。可希臘的神職人員、菁英分子知道那是有瑕疵的量，不是真解。他們知道，要以原正方形的對角線為邊長去做新正方形，才是真解。他們當然明白，一旦在地上劃出對角線，做直角劃出正方形地基，肯定會產生誤差。但沒關係，那是人間的瑕疵，在「屬神」的純粹世界裡，他們的幾何方法是沒有瑕疵的真解；這才是神給他們的考驗。

基於同樣的宗教信念，當希臘人面臨「倍立方」問題：將一座正立方體神殿的體積放大一倍，也就是從 1 立方單位變成 2 立方單位，他們也不能接受坊間工匠的辦法─把原立方體的邊長放大約 1.26 倍，而必須使用幾何方法。這就讓古希臘菁英展開了三百年的長途探究。

最早的突破性概念是將 $x^3=2$「擴編」為 $x^4=2x$，然後令 $x^2=y$，則 $y^2=2x$，如果可以沿著互相垂直的兩條線，畫出 $x^2=y$ 和 $y^2=2x$ 這兩條「平方軌跡」，則兩條軌跡的交點就能決定真解 $x$ 的線段。如圖一。



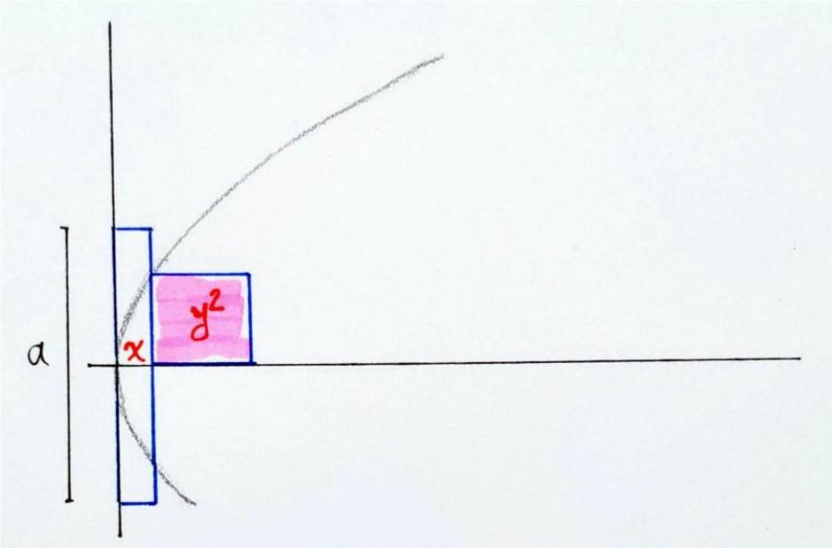
圖一

我必須再嘮叨一段，叮嚀讀者：希臘人沒有代數符號、沒有方程式、沒有直角坐標系，他們全用文字和比例關係來思考和溝通，過程是相當繁複的。我相信現代人（至少我自己）沒有耐心閱讀古希臘的忠實翻譯，就直接寫現代符號了。順帶一提，讀者或許已經發現了，當數學講二次函數的時候寫 $y = x^2$ ，但是講拋物線的時候，偏偏就要寫 $x^2 = y$ ，這兩條等式不就一樣嗎？它們確實一樣，但是把拋物線寫成 $x^2 = y$ 已經是千年以來的習慣。

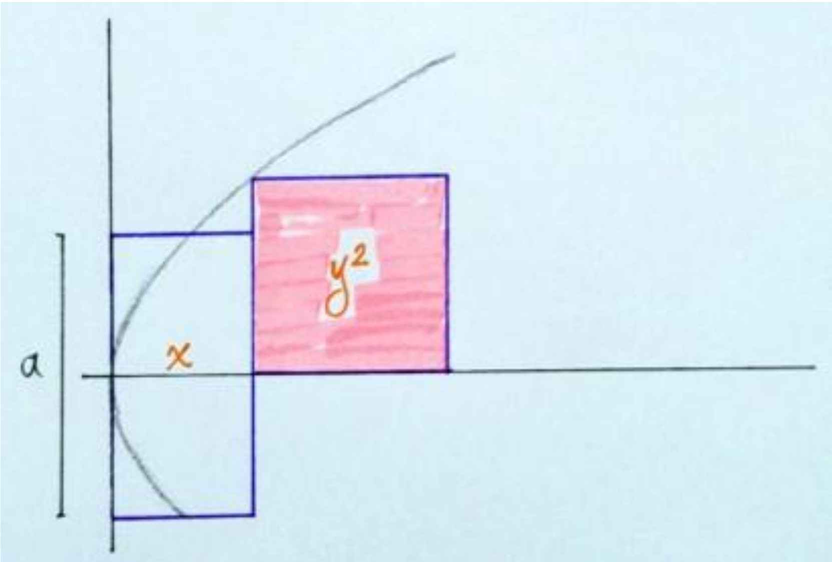
因為希臘的菁英社群（包括神職人士）追求真解，所以要杜絕測量，所以堅持尺規作圖──特別強調「尺」沒有刻度，只能用它畫線不能用它測量。他們一時找不到作 $x^2 = y$ 的尺規畫法，所以不稱它圖形 (graph)，而稱它軌跡 (locus)。所謂軌跡是由滿足某些條件的點聚集而成的曲線或曲面，用今天的話，軌跡就是方程式在坐標平面／空間中對應的圖形。

找不到尺規畫法的確是個遺憾，古希臘菁英一面前仆後繼地嘗試，一面延伸思考平方軌跡的方方面面。例如把倍立方轉化為連續比例問題 $1:x = x:y = y:2$ ，再把它一般化為任給 $a$、$b$ 兩個正量，求兩個中介量 $x$、$y$ 讓 $b$ 連續比例到 $a$，也就是 $b:x = x:y = y:a$ 。

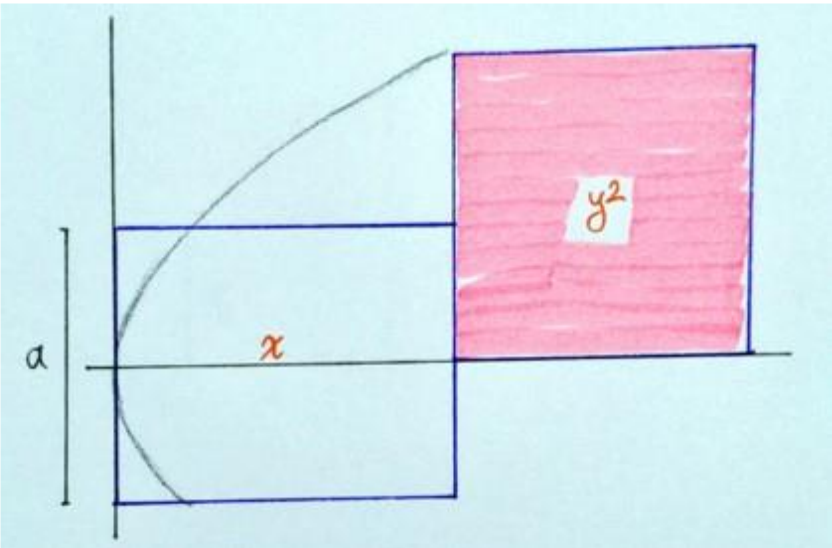
平方軌跡 $x^2 = y$ 和 $y^2 = 2x$ 的一般形式是 $y^2 = ax$ ，其中 $a$ 是一個給定的正量，也就是某個指定的線段，稱為「標準桿」(latus rectum)。平方軌跡的想法是：作一射線，稱端點為 $O$，線上一點 $P$，令 $\overline{OP} = x$ ，以 $P$ 為端點作一線段 $PQ$ 垂直於射線，使線段圍成的正方形面積恰等於以 $x$ 為寬，固定標準桿為高的長方形面積，則所有滿足前述條件的 $Q$ 點聚集而成的曲線就是平方軌跡。取 $\overline{PQ} = y$，則 $y^2 = ax$ 。圖二 (a, b, c) 舉三個點的例子。



圖二 (a)

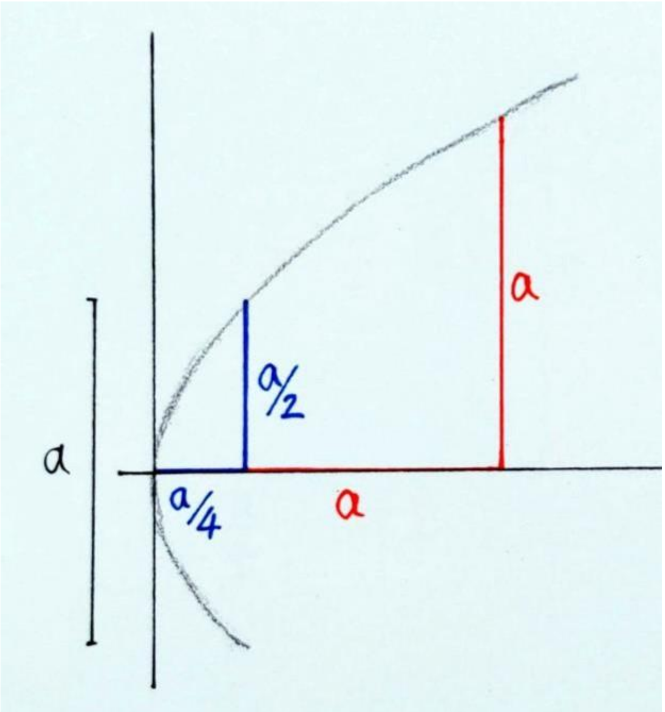


圖二 (b)



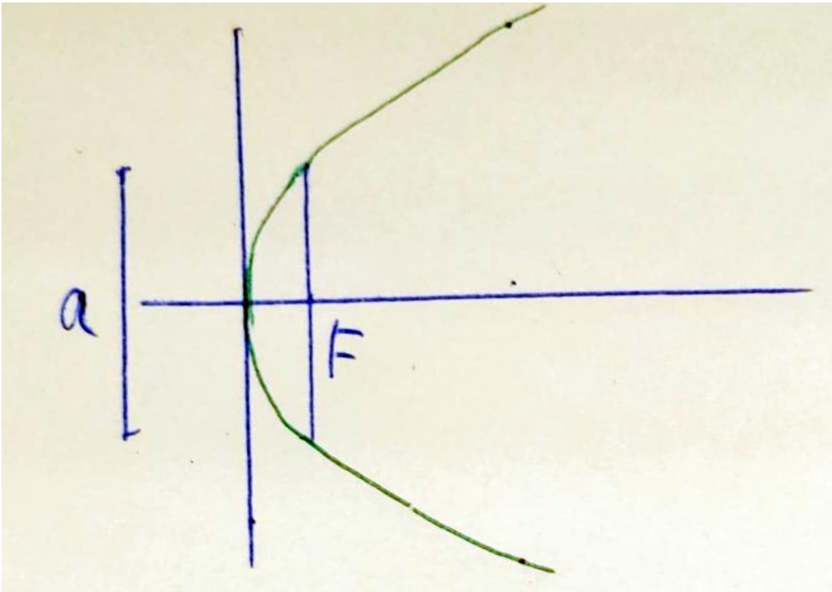
圖二 (c)

平方軌跡上，有兩個顯然的特殊狀態。如圖三，一個發生在 $P$ 點距離端點一個標準桿的位置，另一個發生在 $P$ 點距離端點四分之一個標準桿的位置。在這兩個特殊位置，$x$ 分別是 $a$ 與 $a/4$，而 $y$ 則分別是 $a$ 與 $a/2$。



圖三

按照前面的概念，平方軌跡只存在於射線的一側。但希臘人漸漸明白，可以將它對著射線鏡射，形成一條對稱的平方曲線；這時候，射線就成為平方曲線的對稱軸。前面觀察的一個特殊點 $P$：當 $\overline{OP}=a/4$ 時，它決定的軌跡點 Q，以及 Q 的對稱點 $Q'$，形成的線段 $QQ'$ 長度恰好是一個標準桿。希臘人陸續發現這個特殊的點 $P$ 有一些特殊的幾何性質，於是給它取了名字；我們就說它是「熱點」吧，記作點 $F$，如圖四。字母 $F$ 取自 focus 的首字母，而 focus 古時候是「火爐」的意思。



圖四

到此為止的發展都相當古老，可能比歐幾里得 (Euclid) 還早。但是，可能因為當時平方曲線沒有尺規作圖的方法，柏拉圖 (Plato) 不承認它是倍立方問題的「解」，也就沒有被歐幾里得收入《幾何原本》。事實上，《幾何原本》全面探究了圖形，卻完全不碰觸軌跡。在歐幾里得之後，有才華的希臘菁英必須掙脫《幾何原本》才能超越歐幾里得。在歐幾里得引領的一波後浪當中，最突出的是阿基米德和阿波羅紐斯 (Apollonius)。例如《幾何原本》已經把正規多面體講完了，阿基米德 (Archimedes) 必須另創半正規多面體。

詳細的人名與地名都可以輕易查到，我們不再叨敘。我只想大致釐清年代順序：柏拉圖大約逝於西元前 347 年，柏拉圖可能在歐幾里得出生前 20 年去世，阿基米德可能在歐幾里得去世前 20 年出生，而阿波羅紐斯可能在歐幾里得去世後 20 年出生（大約西元前 240 年）。東方的秦始皇嬴政，在阿基米德與阿波羅紐斯之間出生。

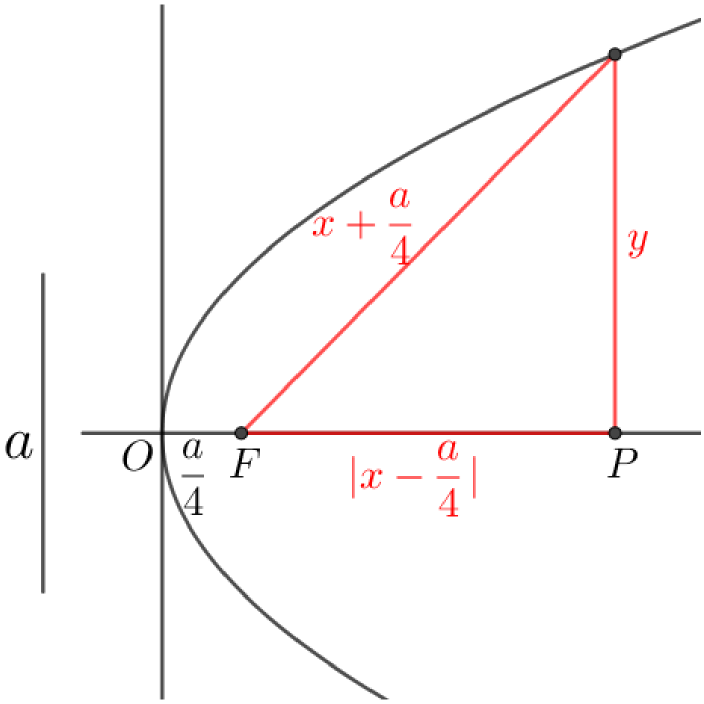
特別要提醒讀者的是，「真正」的史蹟其實已經不能恢復，許多傳說其實是杜撰的，或者出自後人善意的褒揚，閱讀古希臘數學故事的時候，要把古代史的不確定性放在心頭，更要勵行「媒體素養」，用常識杜絕假消息。例如盛傳阿基米德製造拋物面鏡，把陽光聚焦成高溫槍，射燒來襲的戰艦。從歷史知識來判斷，阿基米德固然是天才，但他可能並不知道拋物線的光學性質；就算他知道，當時的工藝技術應該造不出拋物面鏡。從常識來看，拋物線的焦距是固定的，一面鏡子只能射擊固定距離外的船隻，難道敵船會停在那裡等著挨射嗎？難道守軍製造 100 面焦距不同的拋物面鏡，以便射擊各種不同距離的敵艦嗎？難道敵軍一定要在豔陽天發動攻勢嗎？學術上值得信賴的文本，請讀洪萬生的《數之軌跡》（第一輯）以及蘇惠玉的《追本數源》。

既然《幾何原本》不談軌跡，後世英雄就可以藉由軌跡而發跡。阿基米德在平方曲線上的最高成就，相當於發現了它的積分公式。曲線上任兩點所連的線段稱為弦，阿基米德推導出平方曲線與任一弦所圍的面積公式。他發明的方法幾乎就是 1900 年後的「積分」。

直到現在，我們的平方曲線都還沒有被正式命名。給它一槌定音取了名字的是阿波羅紐斯。因為在平方曲線上，正方形面積 $y^2$「恰等於」標準桿形成的長方形面積 $ax$，所以取名 parabola。字根 para 是併立、相對的意思，例如併立而永不相交是 parallel（平行），相對而衝突互抗是 paradox（悖論）。但我們還是繼續稱 Parabola 為平方曲線吧。有「恰等於」的曲線，當然也有「不足／小於」和「超過／大於」的曲線，前者是 ellipse（橢圓），這個字就是「缺」的意思，近似的字如 eclipse（日／月蝕）、ellipsis（刪節號）；後者是 hyperbola（雙曲線），原意是「過剩」。阿波羅紐斯把這三種軌跡整合在對頂圓錐上，併稱為圓錐曲線或圓錐截痕 (conic sections)。

縱使阿波羅紐斯發現了許許多多關於平方曲線的性質，卻始終拿不下希臘數學的聖杯：平方曲線的尺規作圖法。事實上，阿基米德和阿波羅紐斯都在某種程度上鬆動了他們前輩的「尺規作圖」道德規準，例如阿基米德用「有刻度的尺」解決了三分角問題。在阿波羅紐斯身後，希臘城邦正式被羅馬統治，希臘文明逐漸黯淡，卻仍孤燈不滅地傳延了 500 年，帕布斯 (Pappus，西元約 290–350) 被視為希臘傳統下的最後一位數學家。

是帕布斯教給我們平方曲線的準線性質，也就是現在高中課本裡常用的定義。如果掌握了代數的技術，準線性質並不困難，只是畢氏定理。參照圖五。對稱軸上任一點 P 到熱點 F 的距離是 $\left|x-\frac{a}{4}\right|$，而 $y^2=ax$，所以，根據畢氏定理，$P$ 對應的軌跡點到 $F$ 的距離恆為 $x+\frac{a}{4}$。在縱軸左邊 $\frac{a}{4}$ 單位處放一條鉛直線，作為準線，則平方曲線上任一點與 $F$ 的距離等於它與準線的距離。準線性質是最接近尺規作圖之精神的製圖方法了，而且可以製造機械工具來實現它。




圖五（陳玉芬 12.12 繪）

古希臘是有光學的，歐幾里得就寫過一冊《光學》，可是這本書探討的是關於視覺的幾何，並沒有透鏡與反射鏡。圓錐曲線的光學性質是現在講不清楚的歷史，這些性質的幾何原理可能在阿波羅紐斯到帕布斯之間發展完成，但是當時的工藝技術並不能將這些幾何性質實踐到光學器具上。圓錐曲線在光學上的實踐，還待帕布斯身後 500 年，在伊斯蘭文明中發展起來。在那之後，幾何「熱點」才變成光學「焦點」，而「標準桿」變成了「正焦弦」。

至於平方曲線的重學性質，也就是自由拋射物的軌跡，當然是克卜勒、伽利略、牛頓接力完成的偉大事業之一，那是十七世紀的事。

到了十九世紀，歐洲人總算證明了希臘菁英一直找不到的聖杯—平方曲線的尺規作圖法—是不存在的。

直到十九世紀中葉，鴉片戰爭之後，平方曲線 Parabola 才傳入咸豐時代的中國。當時可能來不及釐清它二千年來的歷史，直接採取最後一個重要特徵，把它翻譯成「拋物線」。

註：我得承認自己也違背了歷史。其實「熱點」focus 是克卜勒在很久之後提議的，它不是希臘時代的名稱。克卜勒在闡述行星的橢圓軌跡時用了這個字，其脈絡跟光學性質並沒有關係。我認為克卜勒是因為太陽在那個點上，所以稱它為 focus（火爐）。