

國立中央大學

數學系
碩士論文

德國六至八年級數學教科書
函數單元之內容分析

Content Analysis of the Function Unit in the German LS
Mathematics Textbook for Grades 6 to 8

研究生：曾仲祐

指導教授：單維彰

中華民國 113 年 6 月

國立中央大學圖書館學位論文授權書

填單日期：2024/06/18

2019.9 版

授權人姓名	曾仲祐	學號	109221026
系所名稱	數學系研究所	學位類別	<input checked="" type="checkbox"/> 碩士 <input type="checkbox"/> 博士
論文名稱	德國六至八年級數學教科書 函數單元之內容分析	指導教授	單維彰

學位論文網路公開授權

授權本人撰寫之學位論文全文電子檔：

- 在「國立中央大學圖書館博碩士論文系統」。
 - 同意立即網路公開
 - 同意於西元_____年_____月_____日網路公開
 - 不同意網路公開，原因是：_____
- 在國家圖書館「臺灣博碩士論文知識加值系統」
 - 同意立即網路公開
 - 同意於西元_____年_____月_____日網路公開
 - 不同意網路公開，原因是：_____

依著作權法規定，非專屬、無償授權國立中央大學、台灣聯合大學系統與國家圖書館，不限地域、時間與次數，以文件、錄影帶、錄音帶、光碟、微縮、數位化或其他方式將上列授權標的基於非營利目的進行重製。

學位論文紙本延後公開申請 (紙本學位論文立即公開者此欄免填)

本人撰寫之學位論文紙本因以下原因將延後公開

- 延後原因
 - 已申請專利並檢附證明，專利申請案號：
 - 準備以上列論文投稿期刊
 - 涉國家機密
 - 依法不得提供，請說明：_____

• 公開日期：西元_____年_____月_____日

※繳交教務處註冊組之紙本論文(送繳國家圖書館)若不立即公開，請加填「國家圖書館學位論文延後公開申請書」

研究生簽名：曾仲祐

指導教授簽名：單維彰

國立中央大學碩士班研究生 論文指導教授推薦書

數學系碩士班 學系/研究所 曾仲祐 研究生

所提之論文 德國六至八年級數學教科書函數單元之內容分析

係由本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授 單維彰 (簽章)
113 年 6 月 12 日

1130612

國立中央大學碩士班研究生 論文口試委員審定書

數學系碩士班 學系/研究所 曾仲祐 研究生

所提之論文 德國六至八年級數學教科書函數單元之內容分析

經由委員會審議，認定符合碩士資格標準。

學位考試委員會召集人

林秉吉

委

員

林秉吉

單維彰

許宏儒

中華民國 113 年 6 月 18 日

1130614

摘要

本研究採用內容分析法，探討德國「Lambacher Schweizer Mathematik」6至8年級數學教科書中函數單元之「教科書內容頁數」、「單元數」與「教學例題數」佔比、「教學例題之認知需求層次分析」、「函數單元教材編排順序之分析」，以及「其它單元與線型函數單元的連結分析」。研究範圍是從函數觀念的導入開始，一直到線型函數的正式教學，所以不含二次函數的正式教學單元。為了方便讀者觀察德國LS版教科書的特色，選擇臺灣H版教科書與德國LS版來做對照。

研究結果顯示：在「教科書內容頁數」中，德國LS版函數內容在8年級佔比18.3%，整體佔比為6.3%；在「單元數」中，德國LS版函數單元數佔比為21.7%；在「教學例題數」中，這三年的教科書內，共有56題函數單元的教學例，德國LS版從六、七年級開始出現函數概念例題，八年級正式進入函數單元；在「教學例題之認知需求層次分析」主題中，德國LS版以無連結之程序性計算為主，德國LS版較注重高認知需求層次發展；在「函數單元教材編排順序之分析」中，德國LS版函數教材隨著年級提升將基本架構加深加廣，重視螺旋式課程；在「其它單元與線型函數單元的連結分析」中，德國LS版函數單元的對外連結分布於五年級至八年級的單元中。

相對而言，臺灣H版教科書僅在八年級安排函數單元，頁數佔比較高，單元數佔比較低；認知需求層次以無連結之程序性計算為主，概念理解問題佔比較高；函數單元在八年級集中教學；函數單元的對外連結分布於七至八年級的單元中。

關鍵詞：德國、臺灣、中學數學教科書、函數、認知需求層次、內容分析法

Abstract

This study employs content analysis to investigate the functions units in the "Lambacher Schweizer Mathematik" mathematics textbooks for grades 6 to 8 in Germany. The analysis focuses on the "proportion of textbook content pages," "proportion of the number of units," "proportion of the number of teaching examples," "cognitive demand levels of teaching examples," the "sequence of teaching materials in the functions unit," and the "connections between other units and the linear functions unit." The research scope starts from the introduction of function concepts up to the formal teaching of linear functions, excluding the formal teaching units of quadratic functions. To facilitate readers' understanding of the characteristics of the German LS edition textbooks, a comparison is made with the Taiwan H edition textbooks.

The research results indicate that in terms of the "proportion of textbook content pages," the functions content in the German LS edition accounts for 18.3% in the 8th grade, with an overall proportion of 6.3%. In terms of the "proportion of the number of units," the functions units in the German LS edition account for 21.7%. Regarding the "proportion of the number of teaching examples," there are 56 teaching examples in the functions units over the three years. The German LS edition introduces function concept examples starting in grades 6 and 7, with the functions unit formally beginning in grade 8. In the "cognitive demand levels of teaching examples," the German LS edition predominantly features procedural calculations without connections, indicating a greater emphasis on developing higher cognitive demand levels. In the "sequence of teaching materials in the functions unit," the German LS edition deepens and broadens the basic structure of functions as the grade level increases, emphasizing a spiral curriculum. Regarding the "connections between other units and the linear functions unit," the functions units in the German LS edition are linked with units from grades 5 to 8.

In contrast, the Taiwan H edition textbooks only arrange functions units in the 8th grade, with a higher proportion of pages but a lower proportion of units. The cognitive demand levels primarily involve procedural calculations without connections, with a higher proportion of conceptual understanding questions. The functions units are concentrated in the 8th grade, and the connections between the functions units and other units are distributed across grades 7 and 8.

Keywords: Germany, Taiwan, secondary school mathematics textbooks, functions, cognitive demand levels, content analysis

目錄

摘要	i
Abstract.....	ii
目錄	iii
表目錄	iv
圖目錄	v
第一章 緒論	1
第一節 研究主題與動機	1
第二節 研究目的與問題	2
第三節 名詞釋義	3
第四節 研究範圍與限制	4
第二章 文獻探討	7
第一節 德國函數課題的數學課程	7
第二節 臺灣函數單元的數學課程	12
第三節 跨國函數單元教科書比較相關文獻	14
第四節 認知需求層次之相關研究	17
第三章 研究方法	21
第一節 研究流程	21
第二節 研究對象	21
第三節 研究工具	24
第四節 信度與效度	34
第四章 研究結果	37
第一節 教科書內容頁數、單元數、教學例題數之統計	37
第二節 教學例題之雙向分析	40
第三節 函數單元教材編排順序之分析	45
第四節 其他單元與線型函數單元的連結分析	69
第五章 結論與建議	85
第一節 結論	85
第二節 建議	91
參考文獻	95
附錄	97
附錄一	97
附錄二	98

表目錄

表 2-1 德國巴伐利亞邦六至八年級之函數課程綱要	9
表 2-2 臺灣十二年國民基本教育之八年級函數課程綱要	13
表 3-1 德國 LS 教科書各年級出版年份	21
表 3-2 德國 LS 六至八年級函數課程之單元名稱與教材內容	23
表 3-3 臺灣 H 版八年級函數課程之單元名稱與教材內容	24
表 3-4 德國 LS 版與臺灣 H 版認知需求層次之教科書單元範圍	26
表 4-1 德國 LS 版與臺灣 H 版教科書函數單元頁數與教科書總頁數統計	37
表 4-2 德國 LS 版與臺灣 H 版教科書函數單元數佔比與小節佔比統計	38
表 4-3 德國 LS 版與臺灣 H 版函數單元教學例題數佔比統計	39
表 4-4 德國 LS 版與臺灣 H 版認知需求層次主題分析結果數值化	40
表 4-5 德國 LS 版之認知需求層次分類結果數值化	40
表 4-6 臺灣函數教科書之認知需求層次分類結果數值化	43
表 4-7 德國 LS 版與臺灣 H 版函數教科書認知需求層次分析比較	44
表 4-8 常見的函數相關名詞	50
表 4-9 函數 g 的數值表	60
表 4-10 一次函數數值表	64
表 5-1 德國 LS 版與函數 H 版單元編排順序表	88
表 5-2 德國 LS 版與臺灣 H 版其他單元與線型函數的連結單元表	90

圖目錄

圖 2-1 德國 LS 版九年級數學基礎知識	11
圖 2-2 德國 LS 版九年級二次函數單元綱要	12
圖 3-1 德國 LS 版函數單元之研究流程圖	22
圖 3-2 分析單位例 1	24
圖 3-3 分析單位例 2	25
圖 3-4 線型函數例 1	27
圖 3-5 線型函數例 2	27
圖 3-6 線型函數例 3	28
圖 3-7 非直線對應關係例 1	28
圖 3-8 非直線對應關係例 2	29
圖 3-9 概念理解問題例 1	30
圖 3-10 概念理解問題例 2	30
圖 3-11 概念理解問題例 3	31
圖 3-12 無連結的程序性問題例 1	31
圖 3-13 有連結的程序性問題例 1	32
圖 3-14 有連結的程序性問題例 2	33
圖 3-15 做數學的問題之例題	33
圖 4-1 L6 網路延伸任務：玩硬幣題型	41
圖 4-2 L6 網路延伸任務：玩硬幣題型_策略 A（系統嘗試）	42
圖 4-3 L6 網路延伸任務：玩硬幣題型_策略 B（繪製圖表）	42
圖 4-4 L6 網路延伸任務：玩硬幣題型_策略 C（不變性原則）	43
圖 4-5 H8B 線型函數自我挑戰題	44
圖 4-6 日期與溫度於圖表使用坐標軸表示	45
圖 4-7 年齡與身高關係圖（Alter in Jahrenn：年齡；Größe in cm：身高（公分））	46
圖 4-8 自變數 x 與對應數 $T(x)$ 的對應關係表	46
圖 4-9 函數 $T(x)$ 在坐標軸形成的圖形	47
圖 4-10 浴缸水位變化圖	48
圖 4-11 時間與水位高度的關係	48
圖 4-12 「高度對應溫度」的關係（左）與「溫度對應高度」的關係（右）	49
圖 4-13 坐標圖形函數的簡寫名稱	50
圖 4-14 L8 函數與函數式課文例題(L8-2-2-2)	51
圖 4-15 L8 函數與函數式課文例題(L8-2-2-3)	52
圖 4-16 函數的根	53
圖 4-17 斜率三角形	54
圖 4-18 兩函數和的圖形	55
圖 4-19 函數的 y 截距	55

圖 4-20 線型函數圖形的繪製方法.....	56
圖 4-21 使用斜率三角形計算斜率.....	57
圖 4-22 求解線型函數方程式.....	58
圖 4-23 求解兩直線的交點.....	59
圖 4-24 以方程式求解兩條直線的交點.....	59
圖 4-25 函數 g 的圖形 1.....	60
圖 4-26 函數 g 的圖形 2.....	61
圖 4-27 對應關係的探索活動.....	62
圖 4-28 函數的意義.....	62
圖 4-29 函數與函數值.....	63
圖 4-30 常數函數例子.....	64
圖 4-31 一次函數的圖形.....	64
圖 4-32 畫一次函數與常數函數圖形之例題.....	65
圖 4-33 線型函數的定義.....	65
圖 4-34 正比關係與函數的應用.....	66
圖 4-35 收支平衡分析.....	67
圖 4-36 非直線的函數圖形.....	68
圖 4-37 德國 LS 版五年級之直角坐標平面 1.....	70
圖 4-38 德國 LS 版五年級之直角坐標平面 2.....	70
圖 4-39 兩個變數用於坐標軸.....	71
圖 4-40 以英文字母表示變數或一個代數式.....	71
圖 4-41 代數式 $T(x)$ 在直角坐標平面形成的圖形.....	72
圖 4-42 以代數字進入 x 觀察是否等號成立.....	73
圖 4-43 以圖形交點求方程的解.....	73
圖 4-44 正比關係方程式.....	74
圖 4-45 正比函數與斜率三角形.....	75
圖 4-46 LS 版二元一次方程式圖形.....	75
圖 4-47 LS 版求解二元一次聯立方程式.....	75
圖 4-48 德國 LS 版線型函數教材編排結構圖.....	76
圖 4-49 以符號代表數.....	77
圖 4-50 二元一次方程式.....	78
圖 4-51 求二元一次方程式的解.....	78
圖 4-52 直角坐標平面.....	79
圖 4-53 二元一次方程式的圖形.....	80
圖 4-54 正比的同比例性.....	81
圖 4-55 臺灣 H 版線型函數教材編排結構圖.....	82
圖 5-1 德國 LS 版與臺灣 H 版函數內容頁數佔比對照圖.....	85
圖 5-2 德國 LS 版與臺灣 H 版函數單元與小節佔比.....	86

圖 5-3 德國 LS 版與臺灣 H 版函數教學例題分布圖	86
圖 5-4 德國 LS 版與臺灣 H 版線型函數與非直線對應關係比例	87
圖 5-5 德國 LS 版與臺灣 H 版教學例題之認知需求層次比例	88

第一章 緒論

本章共分為四節，第一節為「研究主題與動機」、第二節為「研究目的與問題」、第三節為「名詞解釋」、第四節為「研究範圍與限制」，內容如下。

第一節 研究主題與動機

研究者在決定論文研究主題前，閱讀了康育綺（2019）與黃雅萱（2020）兩位學姐所撰寫的德國統計與機率教科書的論文研究。由於研究者未曾看過德國的數學教科書，閱讀學姐論文時發現德國教科書統計與機率單元的編排方式與教學內容跟臺灣有很大的差別，感受到兩國教學文化上的差異，因此對德國的數學教科書產生了極大的興趣，並想進一步探索德國教科書其他單元的教學內容與編排方式。在翻閱德國教科書其他單元時，無意間發現德國教科書在六年級時已經出現線型函數的坐標圖表，而在七年級教科書也已經出現二次函數的圖形，翻到八年級教科書發現不只出現二次函數圖形，連有理函數的圖形都有出現，與臺灣教科書編排方式相差甚遠。此時研究者相當好奇德國教科書函數單元的詳細教學內容，因此決定以函數單元當作研究主題。

本研究旨在深入探討德國數學教科書中函數單元的內容及教學概念，並分析對學生學習成效的潛在影響。函數是數學教育的基石，它不僅關聯數學的各個分支，如代數、幾何及微積分，也是培養學生抽象思維、解決問題能力及數學溝通技巧的重要內容。本研究選取德國 Lambacher Schweizer Mathematik 版(以下簡稱為 LS 版)教科書做為研究對象，LS 版為德國知名的數學教材，由知名出版社 Klett 出版。該系列教材在德國各地的學校中廣泛使用，具有較高的知名度和影響力。LS 版起源於 1946 年，為德國歷史悠久且使用率較高的教科書。LS 版數學教科書是以數學素養為核心編寫的教科書，結合文化、歷史、資訊科技等各領域內容，讓學生從中學習相關數學思維，且能於日常生活中遇到問題時能思考並分析出相對應的解決辦法。因此，選擇 LS 版這套教材做為研究對象，能夠反映出德國數學教育的主流趨勢和方法。

根據巴伐利亞學校制度，文理中學（Gymnasium）為五至十二年級，提供由淺入深的學科教育，並以就讀大學或高等職業培訓做準備（黃雅萱，2020）。對照德國數學

課程的編排，函數教育從六年級開始學習基本函數對應概念，七年級學習觀察函數圖形，直到八年級才正式進入函數單元。因此，選擇德國 LS 版六至八年級教科書做為函數單元的研究對象。

為了彰顯德國 LS 版教科書特色，研究者選取臺灣的教科書來做比較，由於臺灣三版本國中教科書的差異不大，選擇 H 版教科書代表臺灣，根據臺灣課綱顯示函數教育從八年級開始學習，因此選擇臺灣 H 版八年級教科書做為比較對象。

綜合上述，本研究以德國教科書做為主體，並針對德國 LS 版與臺灣 H 版函數單元進行探討與分析，期望研究結果對將來國內數學教科書改編能夠有所幫助。

第二節 研究目的與問題

根據上述研究動機，研究者決定以德國 LS 版函數教材教法進行研究，從函數觀念的引入開始，到線型函數的教學完成為止，針對函數單元教科書內容頁數、單元數與教學例題數以及其編排順序與學習內容進行統整分析。而在數學教科書的問題中，認知需求層次的編排順序與比例亦是影響學生發展數學能力的關鍵（張玟溢，2020），因此研究者將針對德國 LS 版函數單元的教學例題之認知需求層次進行分析。

研究者期望能提出德國在函數單元課程設計上，值得參考的教學內容，為臺灣學生的學習與教師的教學有所助益，並期許此篇論文研究能提供給未來數學課程綱要做為參考的依據。

本研究主要目的為探究德國 LS 版函數單元教材，為了彰顯德國 LS 版函數教材的特色，以臺灣 H 版與之對照，根據以上目的進而提出下列研究問題：

- 一、德國 LS 版函數單元教科書中，教科書內容頁數、單元數、教學例題數之佔比為何？臺灣 H 版有何差異？
- 二、德國 LS 版函數單元教科書中，教學例題之認知需求層次為何？臺灣 H 版有何差異？
- 三、德國 LS 版函數單元教科書中，函數單元編排之順序為何？臺灣 H 版有何差異？
- 四、德國 LS 版函數單元教科書中，其他單元與線型函數單元的連結為何？臺灣 H 版

有何差異？

第三節 名詞釋義

一、教科書

本研究對教科書定義是指依據課程綱要為基礎所編制，經過審核後通過出版的課本，但不包含教師手冊、習作與參考書

二、德國教育學制

黃雅萱（2020）論文中提到德國小學（Grundschule）畢業後，學生分流至不同類型的中學，中等教育學校類型分為文理中學（Gymnasium）、實科中學（Realschule）、主幹學校（Hauptschule），在完成中學學業後，由畢業中學的不同文憑而決定後續的升學管道。

德國教育學制一至十二年級等同於臺灣一至十二年級，小學階段為一至四年級，為六歲至十歲學生的普通教育。文理中學為五至十二年級，共八年的學習歷程，提供深入的學科教育，以作為大學的準備或高要求的職業培訓。

三、函數單元

本研究的教科書內容之選擇標準，從函數觀念的導入開始，一直到線型函數的正是教學為止，故本研究之德國 LS 版教科書函數單元為六至八年級範圍，臺灣 H 版教科書函數單元為八年級範圍，兩版皆不包含二次函數的正式教學單元。

四、認知需求層次

研究者參考鎖鳳琴（2017）、張玟溢（2020）與宋嘉寧（2021）的認知需求層次類目定義，以及沿用臺灣大學入學考試中心「概念理解」認知層面，針對本研究所需再修訂分析單位與類目，分述如下。

（一）概念理解問題：題目只需要使用已學過的數學概念、定義來協助解決問題，包括記憶提取類型的題目；理解數學的概念或定義後即可判別題目敘述，不需計算，或者只需要該階段學生皆已精熟，僅需心算即可的程序性操作，便能回答問題。

- (二) 無連結的程序性問題：理解題目含義之後，能正確操作數與符號的運算、幾何構圖的執行，或者能判別或判斷算式或符號運用方法過程的正確性或適切性，解題程序沒有連結額外的概念，著重在執行程序計算的正確性。
- (三) 有連結的程序性問題：題目有連結真實情境且需要數學的概念理解與程序執行的基礎能力，並能組織相關的數學知識來進行解題思考，進而採取適當的解題策略來解決問題。
- (四) 做數學的問題：題目中沒有明確的指令或例子，學生需要透過探索與研究，利用複雜且非計算性的思考，並以數學語言歸納、推理與分析適當的解題策略。

第四節 研究範圍與限制

為了分析德國六到八年級數學教科書之函數課程中「教科書內容頁數、單元數、教學例題數之函數佔比」、「教學例題之認知需求層次」、「函數單元編排順序之順序」以及「其他單元與線型函數單元的連結分析」之差異，故本研究有以下的範圍與限制：

- 一、 本研究選取德國 Lambacher Schweizer Mathematik 版做為研究對象，本論文稱之為 LS 版。LS 版起源於 1946 年，為德國歷史悠久且使用率較高的教科書，礙於時間、人力及蒐集資料便利性的考量，研究者只針對 LS 版進行分析研究。
- 二、 為了彰顯德國 LS 版教科書特色，研究者選取臺灣的教科書來做比較，由於臺灣三版本國中教科書的差異不大，礙於時間限制的考量，選擇其中一個版本代表臺灣，在本論文中以「H 版」稱之。
- 三、 研究者受限於人力、物力、經濟及時間等因素，僅就國內外學者之相關文獻、網路、圖書館、及兩國數學教科書進行分析研究，未能進入該國實地調查。
- 四、 由於兩國定義之函數課程內容不同，且函數單元學習階段開始年級也不同，故本研究之德國 LS 版教科書函數單元為六至八年級範圍，臺灣 H 版教科書函數單元為八年級範圍。

五、 本研究關注函數觀念的形成過程，故原則上從函數觀念的導入開始，一直到線型函數的正是教學為止。本研究以使臺灣讀者了解德國教材為主要目的，臺灣教材僅備對照，所以納入了德國與一次函數同冊之內的非線型函數（如有理函數），但未納入 LS 版與 H 版九年級的二次函數。

第二章 文獻探討

本章依照研究目的，根據相關文獻進行討論與分析，以下分為四小節，分別為第一節「德國函數課題的數學課程」、第二節「臺灣函數單元的數學課程」、第三節為「跨國函數單元教科書比較相關文獻」、第四節為「認知需求層次之相關研究」。

第一節 德國函數課題的數學課程

一、德國數學教育

在德國教育部會議(Kultusministerkonferenz，簡稱 KMK)中，中學畢業證書數學教育標準(九年級) (Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss (Jahrgangsstufe 9)) 裡提到希望學生能在中學數學課程獲得以下三點基礎能力：

- (一)能使用數學感知、理解和評估科技、自然、社會和文化現象。
- (二)能理解數學的語言、符號、圖像和公式，了解它們對於描述和處理數學內外的問題與問題的重要性。
- (三)能使用數學技巧解決問題來獲得日常生活中數學問題的解決能力。

從以下德國中學數學課程標準內容來看，可以看出德國對於數學教育，不僅重視數學的基本能力，同時也重視學生使用數學進行跨領域的能力，並結合電腦、計算機等科技來解決日常問題。

德國中學數學教育標準，將中學學生畢業時應該具備的數學能力規劃為以下六項：

(K 1) 數學論證 (Mathematisch argumentieren)

- 提出數學特有的問題，例如：有存在什麼嗎？它是如何改變的？總是這樣的嗎？並先行給予合理的假設。
- 提出數學論證，例如：解釋、原因、證據。
- 描述和證明解決方案的合理性。

(K 2) 以數學方式解決問題 (Probleme mathematisch lösen)

- 確定預先給定或自行制定的問題。

- 選擇並使用合適的工具、策略和原則來解決問題。
- 檢查結果的合理性，並反思解決方案的概念。

(K 3) 數學建模 (Mathematisch modellieren)

- 將要建模的範圍或問題情境轉為數學術語、結構和關係。
- 選擇並使用合適的數學模型。
- 解釋並檢查相應範圍或問題情境的結果。

(K 4) 使用數學表徵 (Mathematische Darstellungen verwenden)

- 能使用、解釋和區分不同數學符號和情況的表徵方式。
- 理解表徵形式之間的關係。
- 根據不同情況和目的選擇適當的表徵形式，並能在它們之間做轉換。

(K 5) 處理數學的符號、形式和技術程序 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen)

- 能使用變數、術語、方程、函數、圖表。
- 將符號和形式語言翻譯成自然語言，反之亦然。
- 執行解決方案和控制程序步驟。
- 明智且有意義地使用數學工具，例如：公式模型、計算機、軟體。

(K 6) 溝通交流 (Kommunizieren)

- 使用合適的媒體工具，以利於理解的方式記錄、呈現考慮因素、提出解決方案和展示結果。
- 適當使用技術語言。
- 了解和審查他人的陳述以及有關數學內容的文本。

(資料來源：Kultusministerkonferenz (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss

https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf)

接著，中學數學教育標準對於數學相關內容的能力標準有更進一步的劃分。首先

中學數學內容分為五大主題：(L1) 數字 (Zahl)、(L2) 測量 (Messen)、(L3) 空間和形狀 (Raum und Form)、(L4) 函數關係 (Funktionaler Zusammenhang)、(L5) 數據和機率 (Daten und Zufall)。其中和本研究相關的主題是「函數關係」。以下說明學生在主題 (L4) 應學習具備的能力：

(L4) 函數關係大綱 (Leitidee Funktionaler Zusammenhang)

- 能描述和解釋日常生活情況的函數關係。
- 能使用不同的表達形式描述函數對應關係。
- 能區分現實環境中的正比對應關係與反比對應關係，並用它們進行計算。
- 能在學習函數的過程中搭配使用計算機來計算函數值與繪製函數圖形。
- 能依照適合情境的圖表來表示函數對應關係。
- 求解簡單的線型方程。
- 能使用簡單線型方程的方法與其他求解方法來解決問題。

(資料來源：Kultusministerkonferenz (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss

https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf)

二、德國函數單元課程綱要

本研究對象因採取德國巴伐利亞邦之教科書，因此研究者從「巴伐利亞國家學校品質與教育研究所」(Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München，簡稱 ISB) 中翻譯了六至八年級之函數課程綱要，並呈現在表 2-1 (資料來源：

https://www.gym8-lehrplan.bayern.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/id_26279.html)。

表 2-1 德國巴伐利亞邦六至八年級之函數課程綱要

年級	課程內容綱要目標	課程內容
六年級	能在簡單的案例中創建	• 6.6 延伸與應用 (約 14 小時)

	或解釋圖表，並提出符合他們年齡的發現與結果	學生從小學開始憑直覺使用比例運算規則判斷變數之間的關係（例如數量和價格），此時進行加深加廣。學生們學會用適合他們年齡且有吸引力的形式來表達和展示他們的發現。
七年級	能將問題分析並轉換為函數式	<p>•7.2.2 函數式與函數關係（約 6 小時）</p> <p>在處理各種各樣的函數關係時，學生將學習如何用函數式來描述它們，從而準備函數的概念，並認識對於每個自變數都恰好有一個對應數。</p>
八年級	能認識並描述函數關係	<p>•8.1.2 函數與函數式（約 9 小時）</p> <p>學生在之前的課程中已經熟悉兩個變數的相關性，通過使用不同類型函數的示例，了解函數式和圖形如何相互依賴，以及如何將實際過程中的變化描述為兩個變數的函數關係。使用函數繪圖器也能有效學習函數與圖形的關係。</p> <p>學生能處理不同的函數關係（例如發燒曲線、氣候圖、手機資費），這些關係可以用表格、圖表或函數式的形式呈現。圓做為非線型關係的一個特殊示例，學生能理解圓的周長與面積對於半徑的關係。</p> <p>在使用函數時，學生能使用簡單的分數項加深算術技能，並將代數技能當作解決問題的必要工具。</p>

	<p>能使用線型函數並求解具有兩個變量的方程式</p>	<p>•8.1.3 線型函數（約 13 小時）</p> <p>基於日常生活中已知的正比和線型函數，學生能熟悉線型函數做為基本函數類型，並能理解任何線型函數的函數方程式都代表直線的坐標方程式。學生也能找出函數的根來得到線型方程的解。</p>
	<p>學生能處理有理函數的基本例題與簡單的分數式，並求解簡單的有理方程式。</p>	<p>•8.3 函數關係：分數型有理函數（約 16 小時）</p> <p>學生透過簡單的分數型有理函數例題來擴展他們的函數知識，並加深對函數概念的理解。例如，確認交點後，學生能求解分數方程式並使用分數進行計算。</p>

研究者查詢 ISB 官網翻譯德國 LS 版九年級數學基礎知識，如圖 2-1，由此圖可得知 LS 版的二次函數在九年級才開始正式學習，並且在此單元中介紹拋物線、二次方程式以及二次函數的相關應用，如圖 2-2。本研究關注函數觀念的形成過程，故原則上從函數觀念的導入探究到一次函數的正式教學，故未納入 LS 版九年級的二次函數。

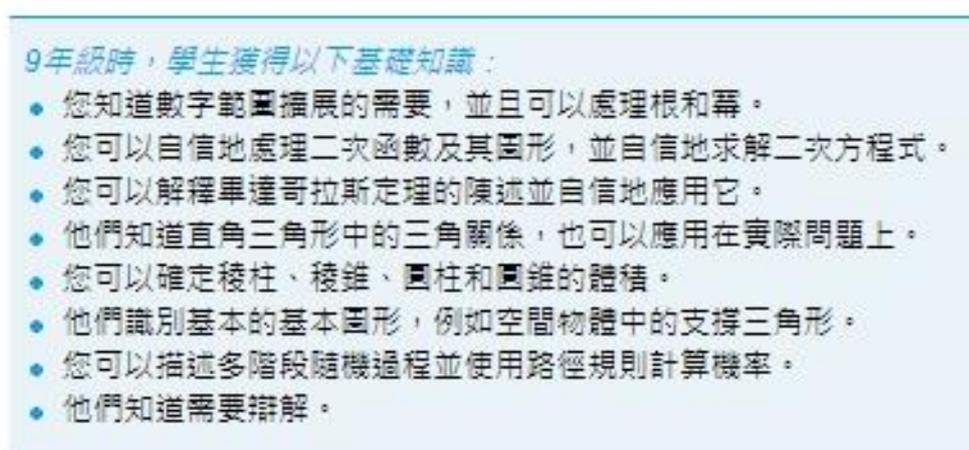


圖 2 - 1 德國 LS 版九年級數學基礎知識

資料來源：

https://www.gym8-lehrplan.bayern.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/id_26254.html

M 9.2 功能連接

八年級時，學生學習了函數這個術語和各種例子。使用二次項，他們進一步發展學理函數關係的能力。在此過程中，他們保持對功能的廣泛了解，並不斷參考他們已經熟悉的功能。函數繪圖儀的使用有助於學生理解所考慮的關係。

M 9.2.1 二次函數及其零點的圖形 (約 18 小時)

年輕人開始熟悉二次函數及其圖表，零的問題直接引向二次方程式。透過並行查看函數圖和對應的方程，他們了解改變二次函數項的係數如何影響相關拋物線的形狀和位置、其軸點，從而影響對應方程的解。同時，他們學習求解二次方程式的圖形和計算方法，並計算出通解公式。他們學習二項式公式作為有用的工具。

- 二項式公式
- 作為二次函數圖的拋物線
- 求解二次方程

M 9.2.2 二次函數的應用 (約 16 小時)

年輕人致力於研究不同領域的應用範例。根據問題的不同，他們從相關的二次函數及其圖形或相應的二次方程式開始，加深 M 9.2.1 中發展的關係。在建立拋物線方程式時，需要重新檢視並擴展線性方程組的知識。學生使用上學年已知的函數類型並考慮各種切割問題；他們透過計算和圖形方式求解所得方程式。二次方程式也是由分數方程式推導出來的，這樣學生就可以刷新和加深八年級的分數項知識。

- 也從事實背景設定二次函數 [→ Ph 9.3 運動學]，簡單的極值問題
- 三未知數線性方程組的求解方法
- 函數圖的共同點，包括直線和雙曲線；簡單的分數方程

圖 2-2 德國 LS 版九年級二次函數單元綱要

資料來源：

https://www.gym8-lehrplan.bayern.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/id_26254.html

根據本研究的函數單元目標，以及前述德國課綱內容，決定研究對象為德國 LS 版六至八年級的教科書內容，不含九年級。

第二節 臺灣函數單元的數學課程

一、臺灣 108 課綱：數學領域

臺灣教育部於 2018 年推出「十二年國民基本教育課程綱要」，以「自發」、「互動」及「共好」為理念，以「成就每一個孩子—適性揚才、終身學習」為願景。數學領域課程綱要也提出數學課綱五大基本理念，分別為：

- (一) 數學是一種語言，宜由自然語言的題材導入學習。
- (二) 數學是一種實用的規律科學，教學宜重視跨領域的統整。
- (三) 數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感。
- (四) 數學應提供每位學生有感的學習機會。
- (五) 數學教學應培養學生正確使用工具的素養。

數學應用的發展越發蓬勃，科學、技術、資訊、金融各領域對數理人才的需求也日益殷切，數學教育也需提供充分的學習機會，因此「十二年國民基本教育課程綱要-

數學領域」提出了六項數學課程目標：

- (一) 提供學生適性學習的機會，培育學生探索數學的信心與正向態度。
- (二) 培養好奇心及觀察規律、演算、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力。
- (三) 培養使用工具，運用於數學程序及解決問題的正确態度。
- (四) 培養運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。
- (五) 培養日常生活應用與學習其他領域/科目所需的數學知能。
- (六) 培養學生欣賞數學以簡馭繁的精神與結構嚴謹完美的特質。

二、臺灣函數課題課程綱要

在「十二年國民基本教育課程綱要」中，學習重點由「學習表現」與「學習內容」兩個向度所組成。學習重點用以引導課程設計、教材發展、教科用書審查及學習評量等，並配合教學加以實踐。學習重點係由理念、目標與特性發展而來，並與核心素養進行雙向檢核，以了解二者的對應情形。

十二年國民教育課程綱要將學習重點分為五個階段：第一學習階段為國小一至二年級，第二學習階段為國小三至四年級，第三學習階段為國小五至六年級，第四學習階段為國中一至三年級，第五學習階段為普通高中一至三年級。將學習內容分為數與量(N)、空間與形狀(S)、坐標幾何(G)、關係(R)、代數(A)、函數(F)、資料與不確定性(D)七大主題，並就七大主題條列數學領域能力指標，再依階段與年級條列能力指標及其細目(教育部，2018)。對於臺灣八年級之函數主題課程內容，呈現於表 2-2。

表 2-2 臺灣十二年國民基本教育之八年級函數課程綱要

年級	學習表現	學習內容	備註
八年級	f-IV-1 理解常數函數和一次函數的意義，能描繪常數函數和一次函數	F-8-1 一次函數：透過對應關係 認識函數 (不要出現 $f(x)$ 的抽	

的圖形，並能運用到日常生活的情境解決問題。	象型式)、常數函數 ($y = c$)、一次函數($y = ax + b$)。	
	F-8-2 一次函數的圖形：常數函數的圖形； 一次函數的圖形。	

研究者在教育部(2018)「十二年國民基本教育課程綱要-數學領域」中發現二次函數在九年級才開始學習，本研究關注函數觀念的形成過程，故原則上從函數觀念的導入探究到一次函數的正式教學，故未納入H版九年級的二次函數。

第三節 跨國函數單元教科書比較相關文獻

函數在國中代數教材佔據相當重要的位置，是未來學習代數、解析幾何及微積分的重要單元之一。本節藉由探討德國LS版教科書與各國函數教科書相關文獻做為本研究的參考方向。

一、德國教科書相關研究

康育綺(2019)在「德國初中階段的統計教科書研究」論文中，針對德國教科書統計內容進行分析探討，研究範圍為德國六年級至七年級教科書，此研究引用李健恆、楊凱琳(2012)統整的統計認知分析表，比較德國與臺灣統計題目在統計知識、統計推理與統計思考的分布比例。研究顯示德國教科書統計內容與許多單元連結，包括函數圖形、百分比例以及機率，而德國在統計題目方面具有較高的圖表理解題目設計，學生除了要學會繪製統計圖表與報讀統計圖表上的資訊外，還要根據統計圖表進行統計推論。研究建議臺灣教科書能將統計單元與其他單元做連結，設計跨領域題目情境與日常生活做連結，並提高學生的統計概念進行統計推論。增強學生對統計資訊的進行判斷與思考。

黃雅萱(2020)在「德國六至九年級數學教科書機率單元之內容分析」論文中，

針對德國教科書機率內容進行分析探討，研究範圍為德國六年級至九年級教科書，此研究參考單維彰、許哲毓與陳斐卿（2018）對於機率學前診測之雙向細目表進行量化分析，研究顯示德國教科書機率課程除了螺旋式的編排方式，機率教材豐富多元使題目情境與日常生活做結合，並且將計算機與電腦工具融入機率課程。研究建議臺灣教科書可將機率課程教學時間增長，使教學編排進行螺旋式教學，並且結合日常生活情境增強學生跨領域學習的能力。

林致宇（2021）在「德國與臺灣七年級數學素養教科書一元一次方程式單元之分析」論文中，針對德國與臺灣教科書一元一次方程式單元進行數學素養的分析探討，研究顯示兩國情境式數學內容皆以國內日常生活常見的情境命題，讓學生能更融入題目中，使學生學習解決日常生活問題的能力，並增加學生的數學素養。而在教科書特色中，臺灣使用漫畫的形式引起學生動機，以較有趣的方式引入數學概念，使學生融入其中增加學習效果；德國則以科技工具進行跨領域結合，使用電腦與計算機結合數學，增強學生使用工具的數學素養。研究建議臺灣教科書可以增加與科技結合之課程內容，並且增加開放式討論題型讓學生培養有探究與實作的能力。

綜合康育綺（2019）、黃雅萱（2020）和林致宇（2021）對德國教科書的研究，可以看出德國教科書在統計、機率與一元一次方程式等數學單元的設計中，均重視跨領域連結與日常生活應用，並且能透過資訊科技提升學生解決問題的能力與素養。

二、 函數課題教科書相關研究

鄭夙君（2014）在「台灣、大陸與新加坡國中函數單元內容之研究」論文中，針對台灣、大陸與新加坡教科書中函數單元進行分析探討。通過內容分析法比較台灣、大陸和新加坡的國中數學教科書中函數單元的呈現方式、知識屬性、題目表徵方式，以及內容編排特色。研究顯示中國大陸的函數教材在情境問題的比例上最高，其次是台灣，新加坡最低。在知識屬性方面，台灣和大陸教材在概念性知識、程序性知識及連結性知識的布題比率上相似，而新加坡教材則以程序性知識問題居多。此外，大陸教科書中開放性問題最多，並且新加坡與大陸的教材在單元主題上較為相近，包

含了一次函數、二次方程式的圖形（二次函數）、三角函數及廣義三角函數，而台灣教材所呈現的單元則只有一次函數及二次函數。研究建議臺灣教科書可以增加開放性問題，以發展高層次的思考與推理能力；另外研究也建議可以將資訊工具的應用融入教材中，提供學生多元解題的方法與培養使用正確工具的數學素養。

鎖鳳琴（2017）在「臺灣、新加坡與芬蘭國中數學教科書函數單元教材之比較」論文中，針對臺灣、新加坡和芬蘭國中數學教科書中函數單元進行了比較。研究顯示函數教材在單元數量、布題數和認知需求層次上的有顯著差異。在布題呈現方面，三國函數教材題目均以非情境題型為主，而芬蘭的情境設計較有特色，採用真實生活中的數據或日常生活的照片來設計題目情境，其他兩國大多為虛擬情境。而在函數內容方面，新加坡與芬蘭函數教科書均有建立「斜率」概念。研究建議教科書能增加斜率的概念在函數教材裡，並且可以搭配繪圖軟體幫助學生理解函數圖形。

張玟溢（2020）在「臺灣、美國、新加坡國中函數主題教材之比較研究」論文中，針對臺灣、美國與新加坡函數單元進行分析探討。研究顯示在函數與線型函數概念課程內容中，美國教科書先以真實生活例子引導學生思考與探索，未提出函數定義，接著利用引導式問題使學生用表格、圖形與方程式進一步探討線型函數；新加坡教科書利用文字敘述解釋何為函數，再藉由機器加工的概念（也就是函數的「I/O 模型」）說明兩變數之間的函數關係，藉此引導學生使用方程式來繪製函數圖形，最後才給出函數的定義。研究建議臺灣教科書可以增加布題數與連結些許高中函數的課程內容，也許能幫助學生更理解函數，並且使學生在高中學習進階函數單元之連結會更順利。研究也提到臺灣教科書可以增加一點真實世界中的情境題，或許能提高學生對於學習數學的意願與興趣。本研究將在後文顯示：德國 LS 版也呈現了函數的 I/O 模型（輸入與輸出模型），但是並沒有明白指出機器加工的概念。

陳豐詣（2024）在「台灣和德國在國中二次函數數學素養內容之比較研究」論文中，針對兩國的二次函數單元以「知識呈現」、「知識應用」、「觀點的培養與觀點的建立」，簡稱「知、用、觀」來進行數學素養分析比較。在「知」的分析中，德國在程序性問題方面以大量的題目來讓學生掌握和瞭解數學概念；在「用」的分析中，德國在

真實情境題方面有較多元的實際例子、資料或數據來布題，布題內容也有較多反思。在工具方面使用繪圖儀、拋物線板、計算機等工具來讓學生更能瞭解二次函數的概念、圖形與實際用途；在「觀」的分析中，德國有較多的開放性問題與批判性問題讓學生學習培養探索與解釋的能力，並且著重證明與推導的過程。本研究並未將二次函數納入研究範圍，所以這一篇碩士論文特別適合做為本文的延伸閱讀。本研究將在後文將顯示：德國 LS 版在函數單元並未安排「做數學」的教學例，這一點與前述「德國有較多的開放性問題與批判性問題」可能有所差異，而這項差異有可能是因為本研究的對象在六至八年級，而「二次函數」在九年級。

綜合鄭夙君（2014）、張玟溢（2020）、鎖鳳琴（2017）和陳豐詣（2024）對函數教科書的研究，在函數教材設計上可以增加真實情境問題與開放性問題的比例，以培養學生高層次的思考能力與推理能力，也可以引入電腦繪圖工具幫助學生更好理解函數概念與圖形。

第四節 認知需求層次之相關研究

認知需求層次是指對資訊的處理能力，主要包括記憶力、專注力、判斷能力、思維能力等，這些能力共同的特點都是思考能力。不論是何種認知需求層次的數學問題，對學生建立數學概念與理解數學的本質來說都有不同程度的正面幫助（Stein, Grover & Henningsen, 1996）。

Stein 等人（2000）將認知需求層次由低至高分為記憶（memorization）、無連結程序（procedures without connections）有連結程序（procedures with connections）、和做數學（doing mathematics）四種類型，研究發現低層次認知層面問題有助於幫助學生增加信心，提升學習意願，讓基本概念牢記在心，但過多的低層次認知層面問題會阻礙學生思考；高層次認知層面問題有助於提升學生思考與探究的能力，幫助學生發展解決問題的能力。（Stein, Grover, & Henningsen, 1996 ; Stein, Smith, Henningsen, & Silver 2000）。

美國國家教育進步測驗 NAEP (National Assessment of Educational Progress) 將認知需求分為概念理解 (conceptual understanding)、程序性知識 (procedural knowledge), 以及解決問題 (problem solving) 三個層次 (NAEP, 2013), 而臺灣大學入學考試中心也將這三個層面設定為學科能力測驗數學考科的測驗目標。

本研究將參考鎖鳳琴 (2017)、張玟溢 (2020) 與宋嘉寧 (2021) 之認知需求層次分類的研究, 以下對其碩士論文中關於認知需求層次部分做歸納整理。

鎖鳳琴 (2017) 在臺灣、新加坡與芬蘭函數教科書之認知需求層次研究提到, 四大層次的比例排序中, 三套教科書由高至低均是「有連結計算」、「無連結計算」、「記憶型」、「做數學」。臺灣教科書在有連結與做數學層次中高於新加坡教科書與芬蘭教科書, 而新加坡教科書例題數多均勻分佈在「記憶型」、「無連結計算」與「有連結計算」, 「做數學」比例為三國教科書比例最少。

張玟溢 (2020) 在臺灣、美國與新加坡函數教科書之認知需求層次研究提到, 三套教科書皆以記憶型問題與無連結之程序性問題為主, 屬於低層次認知層面。而三套教科書介紹二次函數單元時, 布題則出現較多有連結之程序問題, 由此可知高層次認知層面主要出現於較高的學習階段。

宋嘉寧 (2021) 在中國大陸與臺灣中學教材之平面幾何與坐標幾何的認知需求層次分析中, 提到兩地布題均分佈在「無連結的程序性問題」, 「做數學問題」最少。而兩地在相關單元布題中皆以「記憶型問題」與「無連結的程序性問題」為主, 屬於低層次認知層面。兩地在高中數學教材相關單元之「有連結的程序性問題」與「做數學的問題」比例和均高於國中數學教材比例, 由此可知高層次任認知層面出現於較高的學習階段。

綜合上述研究結果可以得出不同國家和地區的數學教科書, 大致上皆顯示了低層次認知層面的問題 (如記憶型問題和無連結的程序性問題) 在初期學習階段佔主導地位, 有助於鞏固基本概念和增強學生信心。然而, 高層次認知層面的問題 (如有連結的程序性問題和做數學的問題) 則在較高的學習階段中更為常見, 這些問題有助於提升學生的思考與探究能力, 並發展解決問題的能力。整體而言, 適當的低層次認知問

題對於基礎概念的掌握是必要的，但要避免過多，以免阻礙學生的深入思考；同時，逐步引入高層次認知問題，有助於學生綜合能力的提升和數學本質的深刻理解。綜合參考上述各研究論文將認知需求層次所做的分類，本研究決定採取以下四種層次：概念理解問題、無連結的程序性問題、有連結的程序性問題、做數學的問題，其定義與舉例，詳述於第三章。

第三章 研究方法

本研究採用內容分析法進行德國 LS 版函數單元之研究。本章共分為四節，第一節說明研究流程；第二節以德國 LS 版六至八年級與臺灣八年級 H 版數學教科書函數課程單元做為研究對象的說明；第三節以量化分析範圍、分析單位、分析單位的編碼方式與分析類目做為研究工具的說明；第四節針對德國 LS 版與臺灣 H 版教科書函數單元分析類目之信度與效度的計算方式與計算結果進行詳細說明。

第一節 研究流程

研究者確定研究對象為德國 LS 版六至八年級教科書之函數單元後，開始整理樣本資料。本研究採用 Stein, Grover and Henningsen (1996)、鎖鳳琴 (2017)、張玟溢 (2020) 與宋嘉寧 (2021) 的認知需求層次之論點，針對本研究所需再修訂分析單位與類目並進行題目的分類。在分析過程中與評分者和指導教授討論並修正內容，以確立研究的信度。接著依照資料的分析結果進行分析、彙整與歸納出研究結果。最後依照研究結果得出研究結論與建議。研究流程如圖 3-1。

第二節 研究對象

本研究以德國 LS 版六至八年級與臺灣 H 版八年級數學教科書函數課程單元做為分析對象，表 3-1 呈現本研究所使用的德國 LS 版與臺灣 H 版各年級教科書出版年份資訊。

表 3-1 德國 LS 教科書各年級出版年份

年級	德國 LS 版出版年份	臺灣 H 版出版年份
六年級	2019 年	(未使用)
七年級	2015 年	2022 年
八年級	2018 年	2022 年

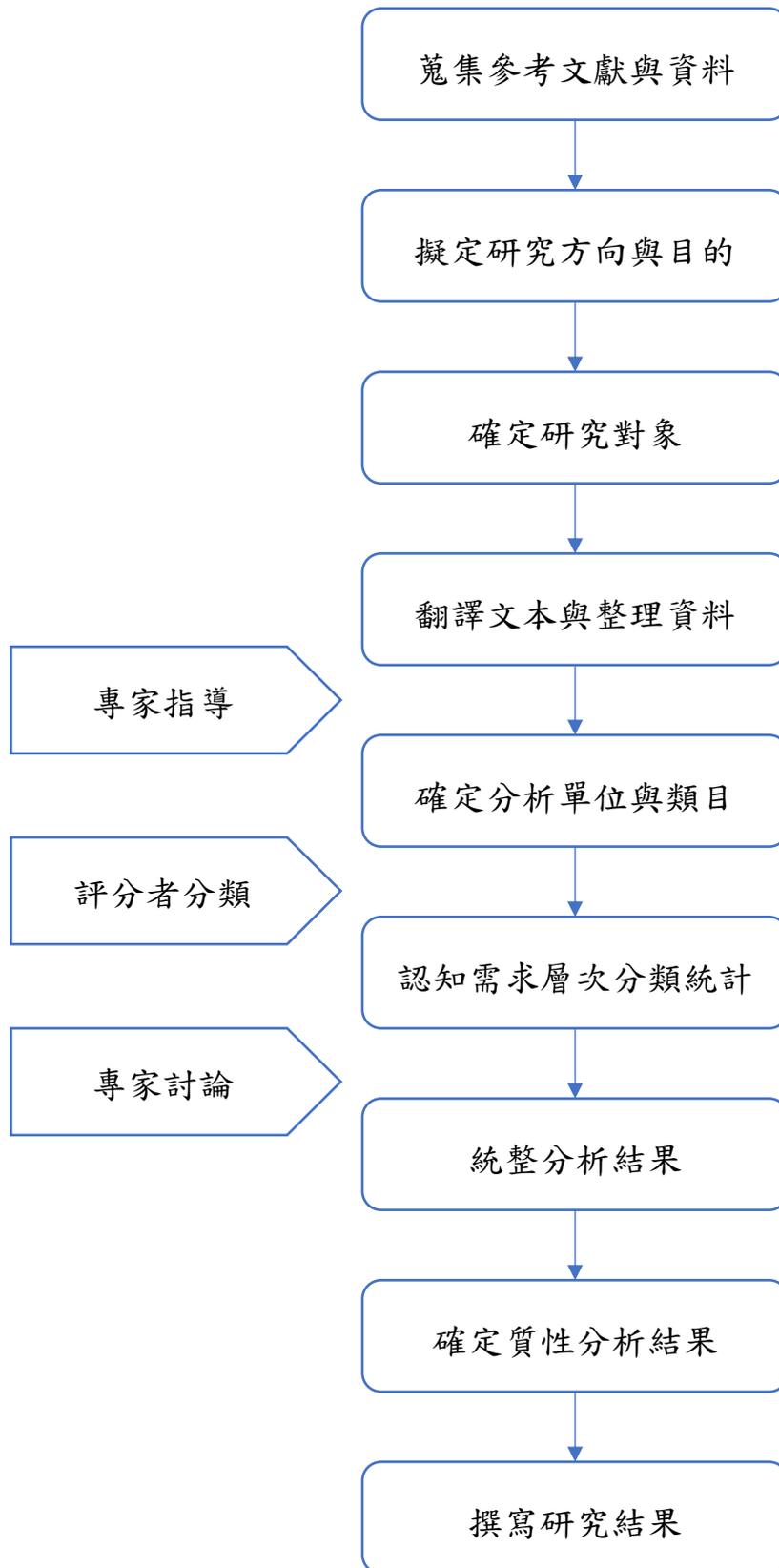


圖 3 - 1 德國 LS 版函數單元之研究流程圖

一、德國 Lambacher Schweizer Mathematik 數學教科書

本研究以德國 Lambacher Schweizer Mathematik 6、7、8 三冊數學教科書中的函數單元內容做為研究對象，德國 LS 版取「課文例題」與「教學例題」進行分析，但不包括課本習題 (Aufgaben)、專題 (Projekt)、延伸閱讀文本 (Lesetext)、主題式延伸任務 (Thema) 和網路延伸任務 (Vernetzende Aufgaben)。以下將德國 LS 版六至八年級數學教科書函數課程的單元名稱與教材內容條列至表 3-2。

表 3-2 德國 LS 六至八年級函數課程之單元名稱與教材內容

年級	單元名稱	小節名稱
六年級	8. 百分比計算與圖表	8-6 兩個變數用於坐標軸
七年級	3. 代數式的化簡	3-4 自變數與應變數
八年級	2. 函數	2-1 明確對應的函數
		2-2 函數和函數式
		2-3 函數與圖形：根與斜率
3. 線型函數	3-1 線型函數	
	3-2 函數式的規定	
	3-3 線型函數與方程式	
6. 分數型有理函數	6-1 分數型有理函數的性質	

二、臺灣 H 版數學教科書

本研究以臺灣 H 版八年級下學期數學教科書中的函數單元內容做為對照，臺灣 H 版取「教學例題」、「探索活動」與「隨堂練習」進行分析，但不包括自我評量與自我挑戰等布題，也不包括習作。以下將臺灣八年級數學教科書函數課程的單元名稱與教材內容條列至表 3-3。

表 3-3 臺灣 H 版八年級函數課程之單元名稱與教材內容

年級	單元名稱	小節名稱
八年級	2. 線型函數	2-1 變數與函數
		2-2 線型函數與圖形

礙於時間的限制，本研究僅關注函數觀念的形成過程，原則上從函數觀念的導入探究到一次函數的正式教學為止。因此本研究未納入探討 LS 版與 H 版九年級的二次函數。

LS 版在八年級正式介紹函數單元，但早在六、七年級已經開始出現兩變數之間的關係與函數圖形的概念，因此 LS 版研究範圍從六年級至八年級。

本研究以使臺灣讀者了解德國教材為主要目的，臺灣教材僅備對照，所以納入了德國與一次函數同冊之內的非線型函數（如有理函數）。

第三節 研究工具

本節說明量化分析單位、編碼方式，以及分析類目。

一、分析單位

本研究以「題」做為德國 LS 版與臺灣 H 版函數教科書分析單位，定義如下。

（一）若題目敘述僅包含一個問題，則計為一題，如圖 3-2 所示。



Beispiel 2
 Klaus ist auf seinem Schulweg zu Fuß und mit der U-Bahn unterwegs (vgl. nebenstehendes Diagramm).
 Beschreibe seinen Schulweg.

克勞斯正在步行和乘地鐵上學的路上（見左圖）。
 描述他上學的路。

圖 3-2 分析單位例 1

資料來源：採自德國 LS 六年級教科書（頁 187）

(二) 一個題目包含兩個以上的問題之題組者，各小題分別計為一題。如圖 3-3 所示，圖中題目 2(a)計為一題，2(b)也計為一題，共二題。

2

a) Zeichne die Graphen der Funktionen in ein Koordinatensystem.
 $f: x \mapsto 2x$; $g: x \mapsto 2x + 4$; $h: x \mapsto 2x - 3$.

b) Was haben die Graphen gemeinsam und wodurch unterscheiden sie sich?

a) 在坐標系中繪製函數圖。 $f: x \rightarrow 2x$; $g: x \rightarrow 2x + 4$; $h: x \rightarrow 2x - 3$ 。

b) 這些圖表有什麼共同點，它們有何不同？

圖 3-3 分析單位例 2

資料來源：採自德國 LS 八年級教科書（頁 44）

二、編碼方式

本研究為方便評分者們進行分類，針對德國 LS 版與臺灣 H 版教科書之函數單元題目進行編碼，編碼規則如下。

(一) 第一碼：

德國 LS 版教科書：以「L6」代表德國 LS 版六年級教科書（Lambacher Schweizer Mathematik 6）；以「L7」代表德國 LS 版七年級教科書（Lambacher Schweizer Mathematik 7）；以「L8」代表德國 LS 版八年級教科書（Lambacher Schweizer Mathematik 8）。

臺灣 H 版教科書：以「H8A」代表臺灣 H 版八年級上學期教科書；以「H8B」代表臺灣 H 版八年級下學期教科書

(二) 第二碼：以數字來代表第幾單元

(三) 第三碼：以數字代表第幾小節

(四) 第四碼：以數字代表第幾題

(五) 第五碼：若該題為題組題，以原題幹編號代表第幾小題

依據上述編碼規則，若德國 LS 版題目編碼為「L8-3-1-2(a)」，意即該題為德國 LS 版八年級教科書第 3 單元第 1 節第 2 題中的(a)小題；若臺灣 H 版教科書題目編碼為「H8B-2-1-2(1)」，意即為臺灣 H 版八年級下學期教科書第 2 單元第 1 小節第 2 題中的(1)小題。

三、分析類目

本研究的分析類目分為主題類目與認知需求層次類目。由於臺灣 H 版六、七年級教科書均無函數單元相關內容，臺灣八年級教科書函數單元只有「2-1 變數與函數」以及「2-2 線型函數與圖形」兩個小節，因此將分析範圍取自德國 LS 版與臺灣 H 版共有的函數與線型函數，而德國 LS 版八年級第六單元「分數型有理函數」則放在第四章第一節「函數單元教材編排順序之分析」中進行詳細敘述。表 3-4 為德國 LS 版與臺灣 H 版認知需求層次之教科書單元範圍。

表 3-4 德國 LS 版與臺灣 H 版認知需求層次之教科書單元範圍

教科書	單元名稱	小節名稱
LS 版六年級	8. 百分比計算與圖表	8-6 兩個變數用於坐標軸
LS 版七年級	3. 代數式的化簡	3-4 自變數與應變數
LS 版八年級	2. 函數	2-1 明確對應的函數 2-2 函數和函數式 2-3 函數與圖形：根與斜率
	3. 線型函數	3-1 線型函數 3-2 函數式的規定 3-3 線型函數與方程式
H 版八年級	2. 線型函數	2-1 變數與函數
		2-2 線型函數與圖形

(一)主題類目

研究者將德國 LS 版與臺灣 H 版教科書函數單元之主題類目分為「線型函數」與「非直線對應關係」，以下針對兩種分類主題進行說明。

1. 線型函數

兩個變數 x 、 y ，任意給定一個變數 x 時，都洽有一個 y 與它對應，此關係稱 y 是 x 的函數。而形如 $y = ax + b$ 的函數且其圖形為一條直線，稱為線型函數，其中線型函數又分為一次函數與常數函數：當 $a \neq 0$ 時， $y = ax + b$ 稱為一次函數；當 $a = 0$ 時， $y = b$ 稱為常數函數。

題目 (a) 要在坐標平面畫出函數 f 、 g 與 h 的圖形，而此三個函數均為 $y = ax + b$ 的一次函數，因此將題目 (a) 與 (b) 歸為線型函數，如圖 3-4 所示。

圖 3-5 所示的布題也為 $y = ax + b$ 的一次函數，因此將它歸為線型函數。

圖 3-6 所示的布題為 $y = b$ 的常數函數，因此將它歸為線型函數。

L8-3-1-2

2

a) Zeichne die Graphen der Funktionen in ein Koordinatensystem.

$f: x \mapsto 2x$; $g: x \mapsto 2x + 4$; $h: x \mapsto 2x - 3$.

b) Was haben die Graphen gemeinsam und wodurch unterscheiden sie sich?

a) 在坐標系中繪製函數圖。 $f: x \rightarrow 2x$; $g: x \rightarrow 2x + 4$; $h: x \rightarrow 2x - 3$ 。

b) 這些圖表有什麼共同點，它們有何不同？

圖 3-4 線型函數例 1

資料來源：採自 L8 (頁 44)

H8B-2-2-1

例 1 求一次項係數

自評 P75 第 2 題

一次函數 $y = ax + 4$ ，在 $x = 3$ 時的函數值為 -2 ，求 a 的值。

圖 3-5 線型函數例 2

資料來源：採自 H8B (頁 61)

H8B-2-2-10

5 畫常數函數的圖形

自評 P76 第 4 題 (4)

在坐標平面上畫出函數 $y = -2$ 的圖形。

思路分析 函數 $y = -2$ 表示不論 x 的值為何，對應的函數值都是 -2 。

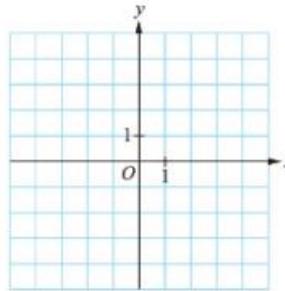


圖 3 - 6 線型函數例 3

資料來源：採自 H8B (頁 66)

2. 非直線對應關係

若題目中兩個變數之間的對應關係所呈現的圖形為非直線，則將此類型題目歸為非直線對應關係。

如圖 3-7 所示，此題的時間與路徑長之間的對應關係所呈現的圖形不是一條直線，因此將此題歸為非直線對應關係。

L6-8-6-2



Beispiel 2

Klaus ist auf seinem Schulweg zu Fuß und mit der U-Bahn unterwegs (vgl. nebenstehendes Diagramm).

Beschreibe seinen Schulweg.

克勞斯正在步行和乘地鐵上學的路上 (見左圖)。

描述他上學的路。(Weg：路徑長，Zeit：時間)

圖 3 - 7 非直線對應關係例 1

資料來源：採自 L6 (頁 187)

圖 3-8 為臺版第 3 冊對應關係的隨堂練習，此題要理解月分與天數形成一種對應關係，而平年中月分與天數之間的關係所呈現的圖形為 12 個位置不同的點而不是一條直線，因此將此題歸為非直線對應關係。

H8B-2-1-2

隨堂練習

平年的二月有 28 天，其他月分有的是 30 天，有的是 31 天。

(1) 寫出各月分中的天數以完成下表：

月分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
天數	31			30			31		30			31

(2) 由上表可知，當月分的值確定後，是否只有一個對應的天數？ 是 否

圖 3-8 非直線對應關係例 2

資料來源：採自 H8B（頁 52）

(二) 認知需求層次類目

研究者參考鎖鳳琴（2017）、張玟溢（2020）與宋嘉寧（2021）的認知需求層次類目定義，以及沿用臺灣大學入學考試中心「概念理解」認知層面，針對本研究所需再修訂分析單位與類目，分述如下。

1. 概念理解問題：題目只需要使用已學過的數學概念、定義來協助解決問題，包括記憶提取類型的題目；理解數學的概念或定義後即可判別題目敘述，不需計算，或者只需要該階段學生皆已精熟，僅需心算即可的程序性操作，便能回答問題。

圖 3-9 所示的布題，在觀察圖表後使用已學會的數學概念以及提取搭乘地鐵的記憶來描述上學的路即可回答問題，故將此題歸為概念理解問題。

圖 3-10 所示的題目 (a) 在觀察與理解圖表後使用已學會的數學概念以及提取溫度概念的記憶，即可描述溫度曲線；題目 (b) 在觀察與理解圖表後對照圖表的時間即可將所對應的溫度填入表格；題目 (c) 觀察與理解圖表後找出哪些時間對應於 20° 即可回答問題。因此將題目 (a)、(b) 與 (c) 歸為概念理解問題。

L6-8-6-2



Beispiel 2

Klaus ist auf seinem Schulweg zu Fuß und mit der U-Bahn unterwegs (vgl. nebenstehendes Diagramm).
Beschreibe seinen Schulweg.

克勞斯正在步行和乘地鐵上學的路上（見左圖）。

描述他上學的路。（Weg：路徑長，Zeit：時間）

圖 3 - 9 概念理解問題例 1

資料來源：採自 L6（頁 187）

L6-8-6-1

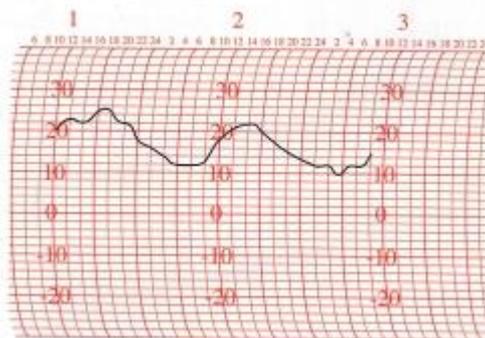
1

Im Verlauf von zwei Tagen wurde die Temperatur gemessen und von einem Thermographen aufgezeichnet.

- Beschreibe den Temperaturverlauf.
- Zeichne die Tabelle in dein Heft und trage die Werte des ersten Tages ein.

Zeitpunkt (Uhr)	12	14	16	18	20
Temp. (in °C)					

- Wann beträgt die Temperatur 20°C?



在兩天內測量溫度並通過溫度記錄儀記錄。

- 描述溫度曲線。
- 在你的練習本上畫出表格並輸入第一天的數值。
- 什麼時候溫度是 20°C？

圖 3 - 10 概念理解問題例 2

資料來源：採自 L6（頁 187）

如圖 3-11 所示，題目 (1) 要完成各月份中的天數填入表格，僅需要月份與對應的天數的記憶，即可完成表格；題目 (2) 需要理解函數的概念即可判別此題，因此將題目 (1) 與 (2) 歸為概念理解問題。

H8B-2-1-2

隨堂練習

平年的二月有 28 天，其他月分有的是 30 天，有的是 31 天。

(1) 寫出各月分中的天數以完成下表：

月分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
天數	31			30			31		30			31

(2) 由上表可知，當月分的值確定後，是否只有一個對應的天數？ 是 否

圖 3 - 11 概念理解問題例 3
資料來源：採自 H8B (頁 52)

2. 無連結的程序性問題：理解題目含義之後，能正確操作數與符號的運算、幾何構圖的執行，或者能判別或判斷算式或符號運用方法過程的正確性或適切性，解題程序沒有連結額外的概念，著重在執行程序計算的正確性。

如圖 3-12 所示的布題，此題只需要理解函數值的性質即可將函數 y 在 $x = 5$ 及 $x = 2$ 的函數值求出，因此將此題歸為無連結的程序性問題。

H8B-2-1-9

例 4 求函數值

求函數 $y = -3x + 2$ 分別在 $x = 5$ 及 $x = -2$ 時的函數值。

圖 3 - 12 無連結的程序性問題例 1
資料來源：採自 H8B (頁 56)

3. 有連結的程序性問題：題目有連結真實情境且需要數學的概念理解與程序執行的基礎能力，並能組織相關的數學知識來進行解題思考，進而採取適當的解題策略來解決問題。

如圖 3-13 所示的布題中，此題燃燒 20 公分的蠟燭屬於真實情境，需要將函數列式出來求出函數值為 0 的解以及合理的燃燒時間，所以在此真實情境下將題目 (a) 與 (b) 歸為有連結的程序性問題。

L8-2-3-1

1

Eine 20cm lange Kerze wird angezündet und brennt langsam herab. Die Kerzenlänge (in cm) zum Zeitpunkt x (in Stunden) kann durch die Funktion $k: x \mapsto 20 - \frac{5}{3}x$ beschrieben werden.

- a) Nach welcher Zeit ist die Kerze vollständig abgebrannt?
b) Welche Werte kann man sinnvollerweise für x einsetzen?

一根 20 公分長的蠟燭被點燃，慢慢燃燒。當時間為 x （以小時為單位）時的蠟燭長度（以 cm 為單位）可以用函數 k 來描述： $x \rightarrow 20 - \frac{5}{3}x$ 。

- a) 蠟燭完全燃燒需要多長時間？
b) 哪些值可以合理地用於 x ？

圖 3 - 13 有連結的程序性問題例 1

資料來源：採自 L8（頁 32）

圖 3-14 所示的布題中，周年慶特賣會的優惠方案屬於真實情境，題目 (1) 需要判斷是否為函數與依照優惠方案寫出關係式；題目 (2) 需要找出函數關係式以計算定價 1000 元的商品價錢。所以在此真實情境下將題目 (1) 與 (2) 小題歸為有連結的程序性問題。

例6 函數值的應用

自評 P60 第 5 題

東西桌遊店舉辦周年慶特賣會，優惠方案如右圖。
若桌遊商品的定價為 x 元，使用優惠方案後的售價為 y 元，
回答下列問題：

- (1) y 是否為 x 的函數？如果是，寫出 y 與 x 的關係式。
- (2) 傑克於周年慶期間，購買原定價 1000 元的商品，結帳時付了多少元？



圖 3-14 有連結的程序性問題例 2

資料來源：採自 H8B（頁 57）

4. 做數學的問題：題目中沒有明確的指令或例子，學生需要透過探索與研究，利用複雜且非計算性的思考，並以數學語言歸納、推理與分析適當的解題策略。

如圖 3-15 所示，此題取自宋嘉寧（2021）論文中「做數學的問題」之樣題，此題包含三個問題，其中前兩個問題可分別歸屬於概念理解問題與無連結的程序性問題，但關於第三個問題教材只給出三角形高的做法，沒有性質、公式、公理，和判定定理可以解決問題，學生需要自己歸納總結出規律，因此將此題歸為做數學問題。

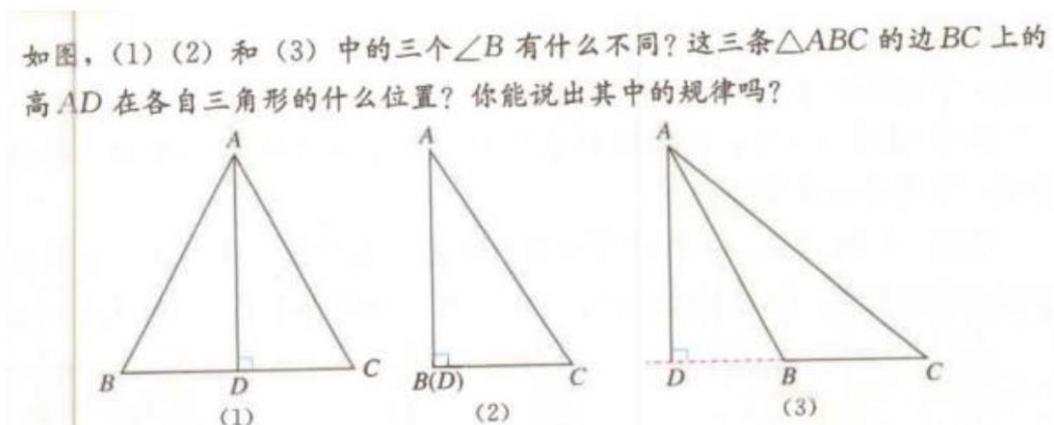


圖 3-15 做數學的問題之例題

本研究分析對象之原始資料，研究者將 LS 版函數單元教學例題題目（56 題）整理於附錄一，而 H 版則省略。

第四節 信度與效度

本節針對德國 LS 版與臺灣 H 版教科書函數單元分析類目之信度與效度的計算方式與計算結果進行詳細說明。

一、信度

本研究採用「評分者信度」做為信度檢驗方法，以下說明評分者的選定、信度分析流程、信度計算方式以及信度計算結果。

(一) 評分者的選定

本研究之信度檢驗由研究者與兩位評分者一同參與。其中兩位評分者，一位為長期貢獻於數學教育研究領域的數學專家，即為研究者的指導教授單維彰教授。另一位正於中央大學就讀學習與教育研究所博士班，且為擁有 20 年以上教學經驗的國中數學教師。

(二) 信度分析流程

1. 選取樣本：從德國 LS 版與臺灣 H 版教科書之函數單元內容中，依照第三章第三節表 3-4 的函數單元範圍，選取兩國教科書各 10 題。
2. 說明：將類目表與認知需求層次的分類規則與欲分類的題目發給各評分者閱讀，並說明類別定義與分類規則。
3. 分類：評分者根據類別定義與分類規則，進行題目在類別的分類。
4. 信度計算：根據各評分者分類的結果，計算出評分者之間的「相互同意值 P_i 」與「平均相互同意值 P 」，最後帶入信度公式求出「信度 R 」。計算公式如下：

(1) 相互同意值 P_i

$$P_i = \frac{2M}{N_1 + N_2}$$

M ：兩人共同同意的項目數

N_1 ：第一位評分者應同意的項目數

N_2 ：第二位評分者應同意的項目數

(2) 平均相互同意值 P

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{N}$$

P_i ：第 i 組相互同意值

N ：評分者互相比較的總次數

(3) 信度 R

$$R = \frac{nP}{1 + [(n - 1)P]}$$

n ：評分者總人數

(三) 信度計算結果

研究者與兩位評分者之間的相互同意值如表 3-5。

表 3-1 評分者之間的相互同意值

	評分者 A	評分者 B
研究者	1	0.9
評分者 B	0.9	

透過表 3-1 評分者之間的相互同意值，可計算平均相互同意值 P ：

$$P = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3} = \frac{1 + 0.9 + 0.9}{3} \approx 0.93$$

計算出平均相互同意值 P 後計算信度 R ：

$$R = \frac{nP}{1 + [(n - 1)P]} = \frac{3 \times 0.93}{1 + 2 \times 0.93} \approx 0.98$$

此計算結果得知此分類結果可信程度高達 0.98。

二、效度

本研究採用的分析類目表，是參考各國教材之函數單元相關研究（Stein, Grover and Henningsen, 1996；鎖鳳琴，2017；宋嘉寧，2021；張玟溢，2020）所使用之工具，透過與評分者和指導教授討論並修正內容，最後經由專家效度確立分析結果。

第四章 研究結果

本章對研究結果與分析共分為四節，分別為第一節教科書內容頁數、單元數、教學例題數之統計，第二節教學例題之雙向分析，第三節函數課題教材編排順序分析，第四節函數課題與其他單元的連結分析。

第一節 教科書內容頁數、單元數、教學例題數之統計

本節將針對德國 LS 版與臺灣 H 版教科書函數單元之「教科書內容頁數」、「單元數」與「教學例題數」等三個部分進行統計比較。在本研究之佔比分析中，以函數單元頁數與教科書總頁數之佔比、函數單元數與總單元數之佔比，以及函數單元教學例題與總教學例題之佔比，共三個方面來進行比較。教科書頁數計算方式不包含目錄、參考資料與課後習題解答；單元數以教科書的一個章節計為一個單元；教學例題數則以本文第三章第三節研究工具的分析單位來計算。

一、教科書內容頁數佔比

研究者將德國 LS 版與臺灣 H 版教科書函數單元頁數與教科書總頁數統計如表 4-1。

表 4-1 德國 LS 版與臺灣 H 版教科書函數單元頁數與教科書總頁數統計

教科書		函數單元頁數	教科書總頁數	教材頁數佔比
德國 LS 版	六年級	2 頁	200 頁	2/200 (1%)
	七年級	4 頁	190 頁	4/190 (2.1%)
	八年級	29 頁	158 頁	29/158 (18.3%)
	小計	35 頁	548 頁	35/548 (6.3%)
臺灣 H 版	八年級	32 頁	422 頁	32/422 (7.6%)

根據表 4-1 統計的結果顯示，若僅以八年級來比較德國 LS 版與臺灣 H 版的函數單元頁數，兩國函數單元頁數相差不大，德國（29 頁）比臺灣（32 頁）少 3 頁；但若以德國 6、7、8 年級與臺灣 8 年級相比，德國（35 頁）比臺灣（32 頁）多 3 頁。

若僅以八年級來比較德國 LS 版與臺灣 H 版的總頁數，德國（158 頁）明顯比臺灣（422 頁）的頁數少；但若以涉及函數教材的總頁數來看，德國（548 頁）則比臺灣（422 頁）大約多了 30%。

若僅以八年級來比較德國 LS 版與臺灣 H 版的函數內容佔比，德國（18.3%）比臺灣（7.6%）高出許多；但若以德國 6、7、8 年級與臺灣 8 年級相比，兩國函數內容佔比相差不大，德國（6.3%）比臺灣（7.6%）低 1.3%。

二、單元數佔比

研究者將德國 LS 版與臺灣 H 版教科書函數單元數佔比與小節佔比統計如表 4-2。

表 4-2 德國 LS 版與臺灣 H 版教科書函數單元數佔比與小節佔比統計

教科書		單元佔比	小節佔比
德國 LS 版	六年級	1/8 (12.5%)	1/45 (2.2%)
	七年級	1/8 (12.5%)	1/37 (2.7%)
	八年級	3/7 (42.8%)	7/33 (21.2%)
	小計	5/23 (21.7%)	9/115 (7.8%)
臺灣 H 版	八年級	1/9 (11.1%)	2/23 (8.6%)

根據表 4-2 統計的結果顯示，若僅以八年級來比較德國 LS 版與臺灣 H 版的單元數佔比，德國（42.8%）比臺灣（11.1%）高出許多；但若以德國 6、7、8 年級與臺灣 8 年級相比，德國（21.7%）比臺灣（11.1%）高 10.6%。

若僅以八年級來比較德國 LS 版與臺灣 H 版的函數小節佔比，德國（21.2%）比臺灣（8.6%）高出許多；但若以德國 6、7、8 年級與臺灣 8 年級相比，兩國函數小節佔比相差不大，德國（7.8%）比臺灣（8.6%）低 0.8%。

三、教學例題數分布佔比

研究者將德國 LS 版與臺灣 H 版函數單元教學例題數佔比統計如表 4-3。

表 4-3 德國 LS 版與臺灣 H 版函數單元教學例題數佔比統計

教科書		函數單元教學例題數	函數單元數	函數單元之平均例題數
德國 LS 版	六年級	4	1	4
	七年級	5	1	5
	八年級	47	3	15.7
	小計	56	5	11.2
臺灣 H 版	八年級	53	1	53

根據表 4-3 統計的結果，若僅以八年級來比較德國 LS 版與臺灣 H 版的函數單元教學例題數，德國（47 題）比臺灣（53 題）少 6 題；但若以德國 6、7、8 年級與臺灣 8 年級相比，德國（56 題）比臺灣（53 題）多 3 題。

若僅以八年級來比較德國 LS 版與臺灣 H 版的函數單元平均例題數，德國（15.7 題）比臺灣（53 題）少；但若以德國 6、7、8 年級與臺灣 8 年級相比，德國（11.2 題）比臺灣（53 題）少。由於德國 LS 版函數單元數多於臺灣 H 版，造成兩版函數單元平均教學例題數有明顯的差距。

第二節 教學例題之雙向分析

一、主題類目分析結果

研究者依照第三章第三節分析之單位與類目，將德國 LS 版與臺灣 H 版函數單元教學例題分為線型函數與非直線對應關係兩個主題，按照主題類目進行分類統計，以下整理如整理於表 4-4。

表 4-4 德國 LS 版與臺灣 H 版認知需求層次主題分析結果數值化

主題	德國 LS 版	臺灣 H 版
線型函數	37 題 (66%)	45 題 (85%)
非直線對應關係	19 題 (34%)	8 題 (15%)
總題數	56 題 (100%)	53 題 (100%)

根據表 4-4 可以得知，德國 LS 版與臺灣 H 版教科書在線型函數與非直線對應關係的教學例題中，線型函數教學例題比重均佔比較多，但德國（66%）比臺灣（85%）少 19%。而在非直線對應關係主題的比例中，德國（34%）比臺灣（15%）多 19%。

二、德國 LS 版教科書認知需求層次分析結果

研究者依照第三章第三節分析之單位與類目，將德國 LS 版函數單元教學例題依照認知需求層次類目進行分類統計，以下整理如表 4-5。

表 4-5 德國 LS 版之認知需求層次分類結果數值化

主題 \ 認知需求層次	概念理解 問題	無連結的 程序性問題	有連結的 程序性問題	做數學的 問題	總題數
線型函數	3	23	11	0	37 (66%)

非直線對應關係	5	12	2	0	19 (34%)
總題數	8 (14%)	35 (63%)	13 (23%)	0 (0%)	56 (100%)

根據表 4-5 可以得知，德國 LS 版在認知需求層次類目中，整體來說以無連結的程序性問題(63%)佔比最多，其次為有連結的程序性問題(23%)，概念理解的問題(14%)。而德國 LS 版函數單元「教學例題」中沒有符合做數學的問題，比例為(0%)。

不過研究者在德國 L6 的網路延伸任務 (Vernetzende Aufgaben) 中發現符合做數學的問題，如圖 4-1。此題放在六年級教完所有單元後的網路延伸任務，學生在此時尚未學習線型函數，課本提出利用製作表格 (圖 4-2)、繪製坐標圖表 (圖 4-3) 以及利用不變性原則來歸納推理 (圖 4-4) 三種策略供學生選擇，並讓學生探究何種策略最簡單。

Vernetzende Aufgaben



Strategisch vorgehen

Musteraufgabe: Mit Münzen spielen
 Klaus und Gerd haben vor sich 70 bzw. 52 Münzen liegen und spielen folgendes Spiel: In einem Zug legt Klaus zwei Münzen in die Mitte und Gerd eine. Es werden so viele Züge durchgeführt, bis beide gleich viele Münzen vor sich haben. Wie viele Münzen sind das? Wie viele Züge werden gespielt?



Klaus 和 Gerd 面前各有 70 和 52 個硬幣，並玩以下遊戲：在一輪中，Klaus 將兩枚硬幣放在中間，Gerd 則放一枚。重複移動，直到兩位玩家面前的硬幣數量相同。那是多少硬幣？下棋有多少步？

圖 4-1 L6 網路延伸任務：玩硬幣題型

資料來源：採自 L6 (頁 192)

策略 A (系統嘗試)

Strategie A: Systematisches Probieren Gerd Klaus

Rudi spielt das Spiel in Gedanken durch. Er trägt die Ergebnisse in eine Tabelle ein.

Zügezahl	Klaus	Gerd
1	68	51
2	66	50
10	50	42
20	30	32
19	32	33
18	34	34

Hier merkt Rudi, dass er sich viel Arbeit sparen kann, wenn er nicht jeden Spielzug einzeln einträgt.
 Nachdem 20 Züge zu viel waren (Klaus hat jetzt schon weniger Münzen als Gerd), geht Rudi wieder rückwärts, bis er auf die Zahl der Züge kommt, bei der Gleichstand herrscht.

Rudi 在腦海中玩起了遊戲。他將結果輸入到表格中。

在這裡，Rudi 注意到，如果他不單獨進入每一個動作，他可以為自己節省很多工作。移動 20 次 (Klaus 的硬幣已經比 Gerd 少)，Rudi 再次倒退，直到他得出相同硬幣的次數

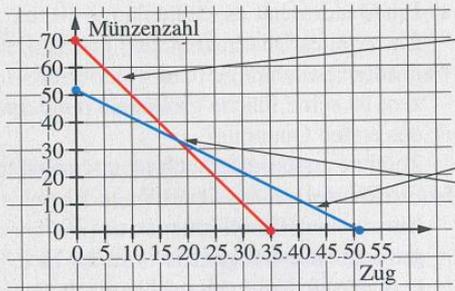
圖 4 - 2 L6 網路延伸任務：玩硬幣題型_策略 A (系統嘗試)

資料來源：採自 L6 (頁 192)

策略 B (繪製坐標圖表)

Strategie B: Verwenden einer Zeichnung oder eines Diagramms

Thomas zeichnet für den Zusammenhang zwischen der Zahl der Züge und der Zahl der übrigen Münzen von Klaus bzw. Gerd ein Diagramm.



Bei jedem Zug nimmt die Zahl der Münzen von Klaus um 2 ab. Alle Punkte im Diagramm liegen daher auf der Strecke zwischen dem Punkt (0|70) (denn am Anfang hatte Klaus 70 Münzen), und dem Punkt (35|0) (denn nach 35 Zügen hätte er keine Münzen mehr). Entsprechend liegen alle Punkte von Gerd's Darstellung auf der Strecke zwischen (0|52) und (52|0). An dem Punkt, an dem sich die beiden Strecken kreuzen, haben sie gleich viele Münzen. Wenn Thomas genau gezeichnet hat, kann er ablesen, dass nach 18 Zügen beide Spieler gleich viele Münzen, nämlich 34, haben.

每走一步，Klaus 的硬幣數量就會減少 2，因此，圖中的所有點都在點 (0|70) (因為一開始 Klaus 有 70 個硬幣) 和點 (35|0) (因為在 35 次移動後他將不再有硬幣) 之間的線上。Gerd 表示所有點都位於 (0|52) 和 (52|0) 之間的線上。在兩條線交叉的點上，它們具有相同數量的硬幣。如果 Thomas 猜得準確，他可以看到在移動 18 次後，兩個玩家的硬幣數量相同，即 34 個。

圖 4 - 3 L6 網路延伸任務：玩硬幣題型_策略 B (繪製圖表)

資料來源：採自 L6 (頁 192)

策略 C (不變性原則)

Strategie C: **Invarianzprinzip**
invariant = unverändert
 Constanze sucht nach einer Größe, die in jedem Zug gleich bleibt und möglichst alle gegebenen Informationen über das Spiel beinhaltet. Sie stellt fest, dass in jedem Zug der Vorsprung an Münzen von Klaus um 1 geringer wird, denn dieser gibt eine Münze mehr ab als Gerd. Am Anfang beträgt sein Vorsprung 18 Münzen. Daher müssen sie nach 18 Zügen gleich viele Münzen haben, nämlich $52 - 18 = 34$.

Constanze 蒐索一個在每個移動中都保持不變的大小，並且包含盡可能關於遊戲的資訊。她注意到，在每一步中，Klaus 的硬幣優勢都會減少 1，因為他比 Gerd 多支付了一個硬幣。一開始他的領先是 18 個硬幣。因此，在 18 次移動之後，必須擁有相同數量的硬幣，即 $52 - 18 = 34$ 。

圖 4-4 L6 網路延伸任務：玩硬幣題型_策略 C (不變性原則)

資料來源：採自 L6 (頁 192)

三、臺灣 H 版函數教科書認知需求層次分析結果

研究者依照第三章第三節分析之單位與類目，將臺灣函數單元教學例題依照認知需求層次類目進行分類統計，以下整理如表 4-6。

表 4-6 臺灣函數教科書之認知需求層次分類結果數值化

主題 \ 認知需求層次	概念理解的問題	無連結的程序性問題	有連結的程序性問題	做數學的問題	總題數
線型函數	9	27	9	0	45 (85%)
非直線對應關係	8	0	0	0	8 (15%)
總題數	17 (32%)	27 (51%)	9 (17%)	0 (0%)	53 (100%)

根據表 4-6 可以得知，臺灣函數教科書在認知需求層次類目中，整體來說以無連結的程序性問題 (51%) 佔比最多，其次為概念理解的問題 (32%)，而後是有連結的程序性問題 (17%)。而臺灣教科書函數「教學例題」中沒有符合做數學的問題，比例為 (0%)。

檢視臺灣函數教科書在教完函數單元後給學生的自我挑戰問題，如圖 4-5。研究者

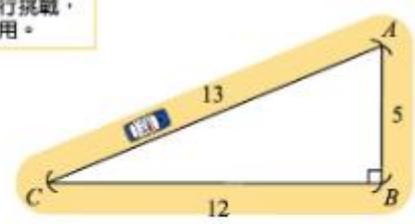
認為此題僅符合有連結的程序性問題，還不到做數學問題的類型。除了教學例題與自我挑戰，臺灣教科書在函數單元中未出現做數學的問題。



自我挑戰

本單元為統整課程，由學生自行挑戰，
教師可視班級情況決定如何運用。

如圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形的玩具車軌道， $\angle B$ 為直角， $\overline{AB}=5$ ， $\overline{BC}=12$ ，有一輛小汽車沿著 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ 移動，回答下列問題：



(1) 若小汽車從 A 點移動到 \overline{AB} 邊上的某一點 P 時(不含 A 、 B 兩點)，共移動了 x 個單位，此時 $\triangle ACP$ 的面積為 y 平方單位，則：

① 將 y 與 x 的關係式，寫成 $y=ax+b$ 的型式。 ② 當 $x=2$ 時，求 y 的值。

(2) 若小汽車從 A 點移動到 \overline{BC} 邊上的某一點 Q 時(不含 B 、 C 兩點)，共移動了 x 個單位，此時 $\triangle ACQ$ 的面積為 y 平方單位，則：

① 將 y 與 x 的關係式，寫成 $y=ax+b$ 的型式。 ② 當 $x=11$ 時，求 y 的值。

圖 4-5 H8B 線型函數自我挑戰題

資料來源：採自 H8B (頁 78)

四、德國 LS 版與臺灣 H 版函數教科書認知需求層次比較結果

研究者將德國 LS 版與臺灣 H 版認知需求層次分析結果整理至表 4-7。參照表 4-7 呈現之結果，在概念理解的問題中，德國比臺灣少 18%；在無連結的程序性問題中，德國比臺灣多 12%；在有連結的程序性問題中，德國比臺灣多 6%；而德國與臺灣在教學例題中均無做數學的問題。兩版函數教科書之認知需求層次教學例題中，均以無連結的程序性問題為主。

表 4-7 德國 LS 版與臺灣 H 版函數教科書認知需求層次分析比較

版本	德國 LS 版	臺灣 H 版
認知需求層次		
概念理解的問題	14%	32%
無連結的程序性問題	63%	51%

有連結的程序性問題	23%	17%
做數學的問題	0%	0%

第三節 函數單元教材編排順序之分析

本節將針對德國 LS 版與臺灣 H 版函數單元相關章節的編排順序與內容進行比較分析。

一、 德國

(一) 六年級

1. 兩個變數用於坐標軸

在六年級第八單元第六節「兩個變數用於坐標軸」就開始介紹圖表除了能表示數字或大小關係，也能說明兩個變數之間的關係，且也能用於坐標軸上，如圖 4-6。這一節還提到兩個變數之間的關係，能以單獨的點或相互連接的點來表示，如圖 4-7。

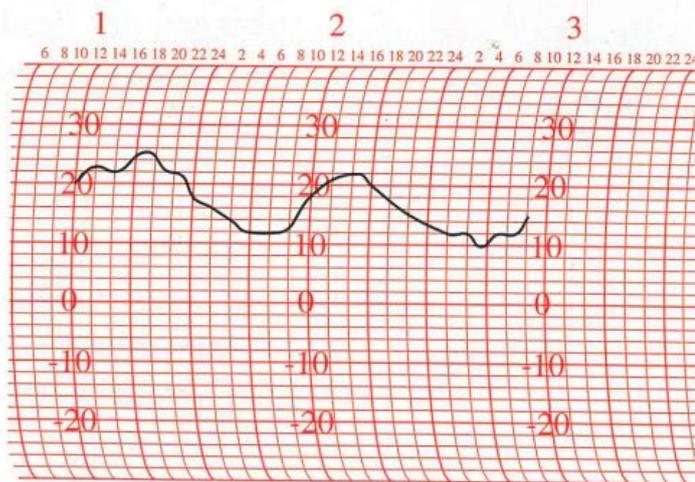


圖 4-6 日期與溫度於圖表使用坐標軸表示

資料來源：採自 L6 (頁 187)

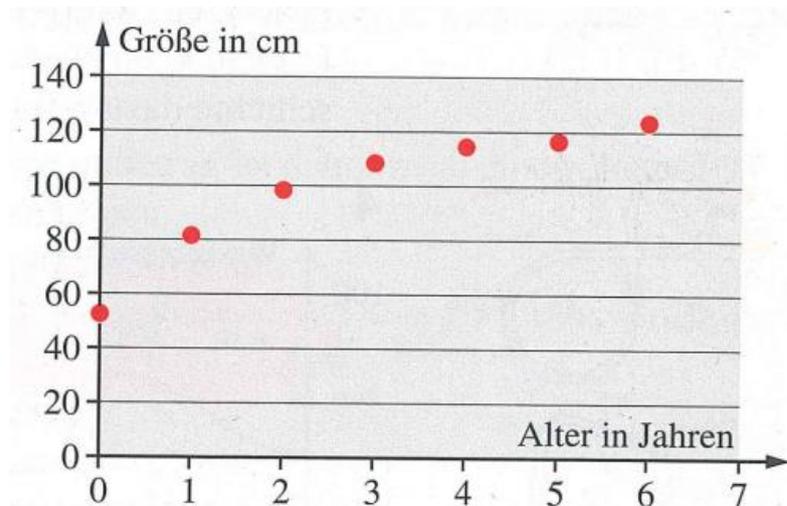


圖 4-7 年齡與身高關係圖 (Alter in Jahrenn : 年齡 ; Größe in cm : 身高 (公分))

資料來源：採自 L6 (頁 187)

研究者發現在六年級 8-6 「兩個變數用於坐標軸」這個單元就已經開始將兩個變數使用坐標軸來呈現，並且之後的單元都自然的呈現坐標軸——即使只有第一象限，也畢竟是坐標平面。研究者將在第四章第四節「其他單元與函數的連結分析」中針對「直角坐標平面」進行詳細敘述。

(二) 七年級

1. 自變數與應變數

在七年級第三單元第四節「自變數與應變數」開始說明自變數與應變數的關係。首先文中列出一個函數的代數式 $T(x) = x^2 - 1$ ，說明每一個自變數都能對應到一個應變數，不同的自變數可以對應到相同的應變數，但一個自變數不能對應到兩個不同的應變數。儘管 LS 教科書此時並沒有正式教導二次函數，但已經舉平方的例子。接著文中提到使用表格來對照自變數與應變數的關係，如圖 4-8。

x	-2	-1,4	-1	0	1	1,5
T(x)	3	0,96	0	-1	0	1,25

圖 4-8 自變數 x 與對應數 $T(x)$ 的對應關係表

資料來源：採自 L7 (頁 63)

文中接著說明每一組自變數與應變數的數對都能表示坐標軸中的一個點，而這些點的集合可以形成此函數圖形，以函數式 $T(x) = x^2 - 1$ 為例子，如圖 4-9。

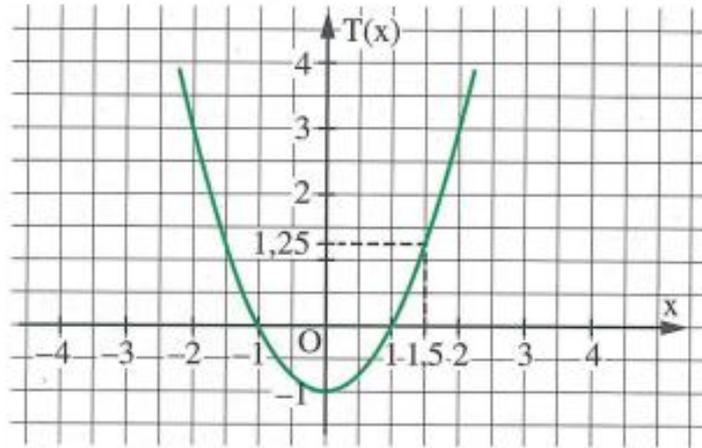


圖 4-9 函數 $T(x)$ 在坐標軸形成的圖形

資料來源：採自 L7（頁 63）

(三) 八年級

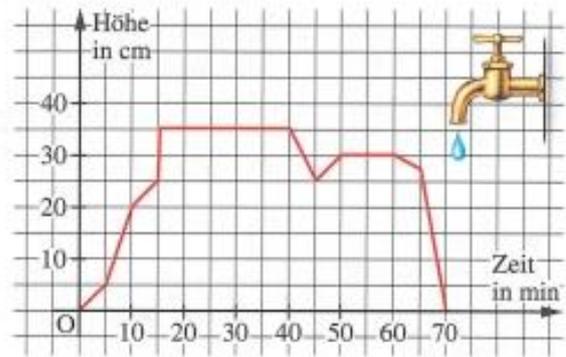
1. 明確對應的函數

在八年級第二單元第一節「明確對應的函數」中，首先在課文引導問題中提到下圖（圖 4-10）為浴缸水位變化圖，由於水位變化有多種原因，此圖表背後可能有些故事，請編造一個故事來訴說水位如何變化。課文開頭以此水位如何變化的開放式問題來讓學生編造背後可能發生的故事，使學生發揮想像力去思考開放式的答案。

L8-2-1-1

1

Das Diagramm zeigt, wie sich in einer Badewanne die Wasserhöhe ändert. Da es für eine Veränderung verschiedene Gründe geben kann (z. B. Wasser läuft zu oder jemand steigt in die Wanne), können sich hinter dem Graphen auch verschiedene Geschichten verbergen. Denke dir zum abgebildeten Graphen eine Geschichte aus und schreibe sie auf.



該圖顯示了浴缸中的水位如何變化。由於更改可能有多種原因（例如水流入或有人進入浴缸），因此圖表背後也可能有各種故事。編一個關於所顯示圖表的故事並寫下來。

圖 4 - 10 浴缸水位變化圖

資料來源：採自 L8(頁 24)

課文提到在自然界與日常生活中存在許多相互依賴的變數，而在數學上，變數之間的關係通常可以用坐標軸中的圖形來說明，例如時間與水位高度的關係，如圖 4-11。

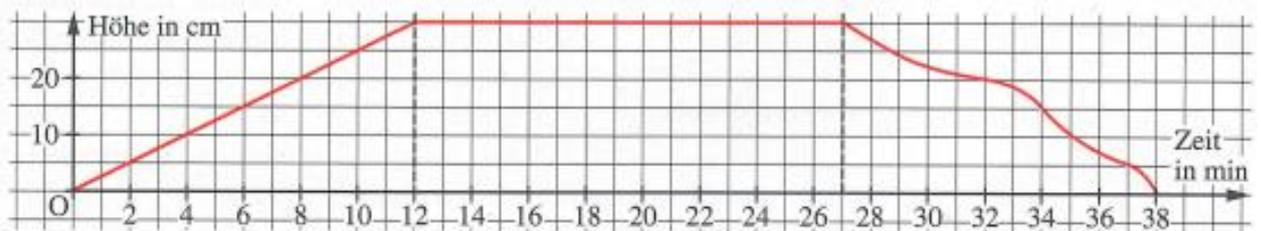


圖 4 - 11 時間與水位高度的關係

資料來源：採自 L8(頁 24)

文中接著舉例兩個圖形來說明是否明確對應的函數關係，圖 4-12 分別表示「高度對應溫度」的關係（左）與「溫度對應高度」的關係（右）。

圖 4-12 的左圖中的每個高度都只對應到一個溫度，因此為明確對應的關係；而在右圖中，不是每一個溫度都只對應到一個高度，例如溫度 0° 時對應到 3 個不同的高度，因此不是明確對應的關係。

為了定義明確對應的關係，以「 $x \mapsto y$ 」來表示每一個自變數 x 都恰有一個應變數 y 與它對應，這樣的對應關係稱為「函數」。

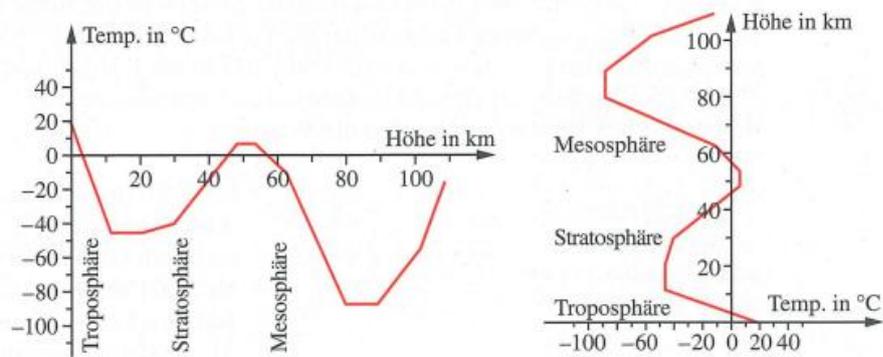


圖 4-12 「高度對應溫度」的關係（左）與「溫度對應高度」的關係（右）

資料來源：採自 L8(頁 24)

2. 函數和函數式

在八年級第二單元第二節「函數和函數式」中，首先提到函數式為每一個自變數都能對應到唯一一個對應數，並說明常見的函數相關名詞，以表 4-8 呈現。

從表 4-8 可以觀察：德國 LS 版用了映射符號（map-to, \mapsto ）表達函數，這是類似「機器加工概念」的函數 I/O 模型（輸入與輸出模型）。除了函數的表達方式，文中還介紹了計算函數值的所有數字的集合，稱為**定義域 D_f** ，若此數字集合包含所有可以計算函數值的數字，將它稱為**最大定義域 D_{max}** 。

表 4-8 常見的函數相關名詞

	Funktion f 函數 f	Funktion g 函數 g
Funktionsvorschrift 函數定義	$x \mapsto 0.5x^2 - 2$	$x \mapsto \frac{1}{x-1}$
Funktionsterm 函數式子	$0.5x^2 - 2$	$\frac{1}{x-1}$
Abkürzende Schreibweise 簡寫	$f(x)$	$g(x)$
Funktionsgleichung 函數方程式	$y = 0.5x^2 - 2$	$y = \frac{1}{x-1}$

而對於每個函數都可以在坐標平面上繪製點 $P(x|f(x))$ ，並將所有點連接起來形成函數圖形，而通常會在圖上寫上函數的簡寫名稱（ f 或 Gf ）來快速辨識哪個圖屬於哪個函數，如圖 4-13。文中也提到若 $P(x|y)$ 的坐標符合函數方程式 $y = f(x)$ ，則 $P(x|y)$ 在 Gf 上。

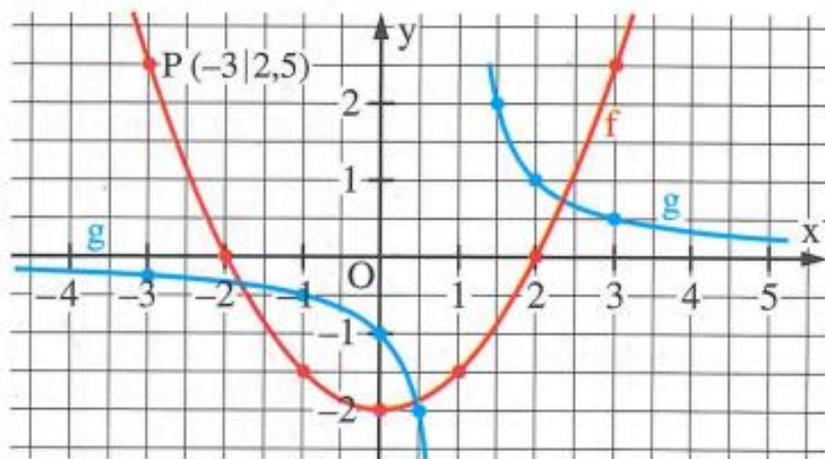


圖 4-13 坐標圖形函數的簡寫名稱

資料來源：採自 L8(頁 28)

德國 LS 版課本例題 1(圖 4-14)中來引導學生寫出方程式與其定義域，並且建立函數值表找出在方程式上的幾個點來繪製函數圖形，並且也提出一個開放式問題詢問學生在函數 f 中小於零的函數值有何意涵。

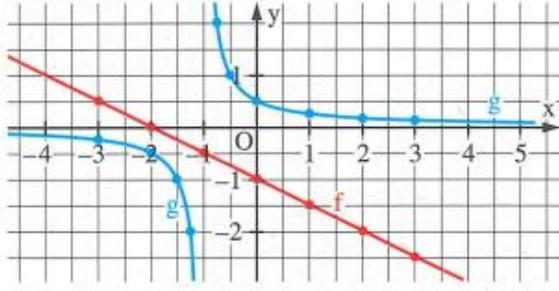
Beispiel 1
 Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x - 1$ und $g: x \mapsto \frac{0,5}{x+1}$.

a) Gib für f den Funktionsterm und für g die Funktionsgleichung an.
 b) Gib jeweils die maximal mögliche Definitionsmenge an.
 c) Zeichne die Graphen G_f und G_g der Funktionen in ein Koordinatensystem.
 d) Liegt der Punkt $A(10,5|-6)$ auf G_f ?
 e) Für welche x -Werte sind bei f die Funktionswerte kleiner null? Was bedeutet dies für den Graphen G_f ?

Lösung:
 a) $-\frac{1}{2}x - 1$ und $y = \frac{0,5}{x+1}$
 b) $f: D_{\max} = \mathbb{Q}$ und $g: D_{\max} = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

c)	x	-3	-2	-1,5	-1,25	-1,1	-0,9	-0,75	-0,5	0	1	2	3
	g(x)	-0,25	-0,5	-1	-2	-5	5	2	1	0,5	0,25	$\frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$	$\frac{1}{8} = 0,125$

	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
	f(x)	0,5	0	-0,5	-1	-1,5	-2	-2,5



d) $f(10,5) = -\frac{1}{2} \cdot 10,5 - 1 = -6,25 \neq -6$,
 also gilt $A(10,5|-6) \notin G_f$

e) Für $x > -2$. Hier verläuft der Graph unterhalb der x -Achse.

給出了函數 $f: x \rightarrow -\frac{1}{2}x - 1$ 和 $g: x \rightarrow \frac{0.5}{x+1}$ 。

- a-1) 給出 f 的函數式子。
 a-2) 給出 g 的函數方程式。
 b) 在每種情況下，說明最大可能的定義集。
 c-1) 在坐標系中畫出函數的圖形 G_f 。
 c-2) 在坐標系中畫出函數的圖形 G_g 。
 d) 點 $A(10.5|-6)$ 是否位於 G_f 上？
 e) 對於 f 處的哪些 x 值是低於零的函數值？這對圖 G_f 意味著什麼？

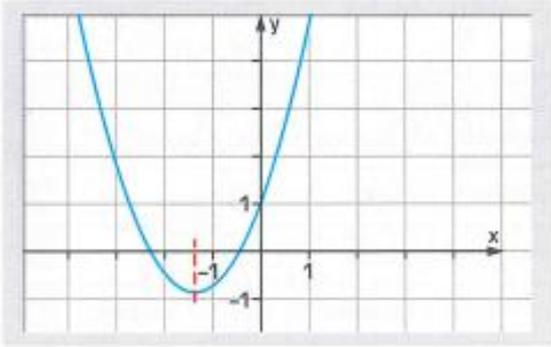
圖 4 - 14 L8 函數與函數式課文例題(L8-2-2-2)

資料來源：採自 L8(頁 29)

有了建立函數值表與繪製函數圖形的描點練習後，課文以例題 2(圖 4-15)讓學生學習使用函數繪圖器來繪製函數圖形，並估計 x 為多少時會有最小函數值。

Beispiel 2
 Bestimme für $f: x \mapsto x^2 + 2,74x + 1$ mit Hilfe eines Funktionsplotters denjenigen x -Wert auf zwei Nachkommastellen genau, für den f den kleinsten Funktionswert besitzt.

Lösung:
 Eine Zeichnung zeigt, dass der gesuchte x -Wert zwischen $-1,5$ und -1 liegt:



Wertetabelle des bedeutsamen Bereichs:

x	f(x)
-1.40	-0.8760
-1.39	-0.8765
-1.38	-0.8768
-1.37	-0.8769
-1.36	-0.8768
-1.35	-0.8765
-1.34	-0.8760
-1.33	-0.8753

Startwert:
 Endwert:
 Schrittweite:

Der x -Wert lautet $-1,37$, der zugehörige Funktionswert beträgt $f(-1,37) = -0,8769$.

對於 $f: x \rightarrow x^2 + 2.74x + 1$ ，使用函數繪圖器將 x 值確定為小數點後兩位使 f 具有最小函數值。

圖 4 - 15 L8 函數與函數式課文例題(L8-2-2-3)

資料來源：採自 L8(頁 29)

3. 函數和圖形：根與斜率

在八年級第二單元第三節「函數和圖形：根與斜率」中，首先提到函數圖形與 x 軸的交點是一個特殊點，此特殊點的 x 坐標稱為此函數 f 的根，函數 f 的每個根都是方程式 $f(x) = 0$ 的解。函數的根以圖 4-16 做進一步說明。

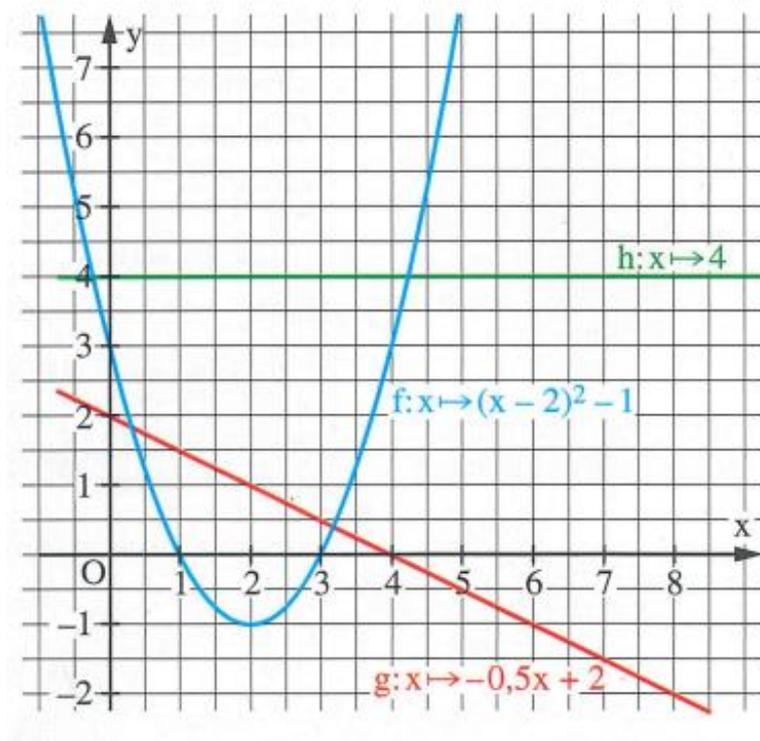


圖 4 - 16 函數的根

資料來源：採自 L8(頁 32)

圖 4-16 為函數 f 、 g 、 h 的圖形。若圖形為直線的函數只有一個根，而平行於 x 軸則沒有根。例如函數 g 與 x 軸在點 $(4, 0)$ 相交，因此 $x = 4$ 為函數 g 的根。函數 h 的圖形平行於 x 軸，因此函數 h 沒有根。一個函數可以有很多個根，例如函數 f 有 $x = 1$ 與 $x = 3$ 兩個根。注意 h 是所謂的常數函數，但德國不寫 $y = 4$ 而寫 $h: x \mapsto 4$ ；用這種表達方式，寫不出圖形為鉛直線的函數，在 LS 版教材中，沒有出現圖形為鉛直線的函數，也就是沒有斜率 m 不存在的線型函數。

接著文中提到「正比函數」 $f: x \mapsto mx$ ，是一條通過原點的直線，當 x 增加 1 單位，則對應的 y 增加 m 單位。當 $m > 0$ ， m 的值越大，函數圖形上升得越多；當 $m < 0$ ， m 的值越小，函數圖形下降得越多。在這兩種情況下 m 稱為斜率。以下以圖 4-17 做斜率的進一步說明。

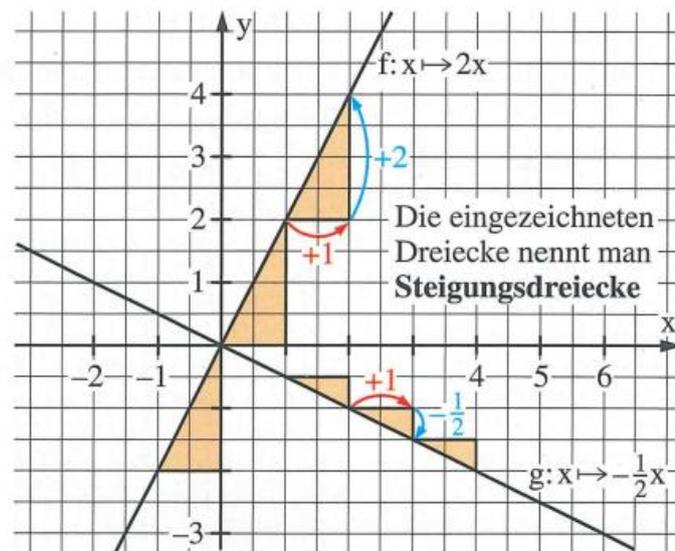


圖 4 - 17 斜率三角形

資料來源：採自 L8(頁 33)

文中舉兩個函數 $f: x \mapsto 2x$ 與 $g: x \mapsto -\frac{1}{2}x$ 。在函數 f 中，當 x 增加 1 單位，則對應的 y 增加 2 單位，則 2 為函數 f 的斜率；在函數 g 中，當 x 增加 1 單位，則對應的 y 增加 $-\frac{1}{2}$ 單位，則 $-\frac{1}{2}$ 為函數 g 的斜率。而每當 x 增加 1 單位，對應的 y 增加 m 單位，與直線所形成的三角形稱為斜率三角形。

若將兩個函數式子相加，可以得到一個新的函數，例如 $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 1.5$ 與 $g: x \mapsto \frac{1}{2}x$ 的和，以 $h: x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + 1.5$ 表示。另外可以利用函數圖形找出兩函數和的圖形，將 f 上的點加上 g 的函數值形成新的點，並將各個點連接起來。如圖 4-18。

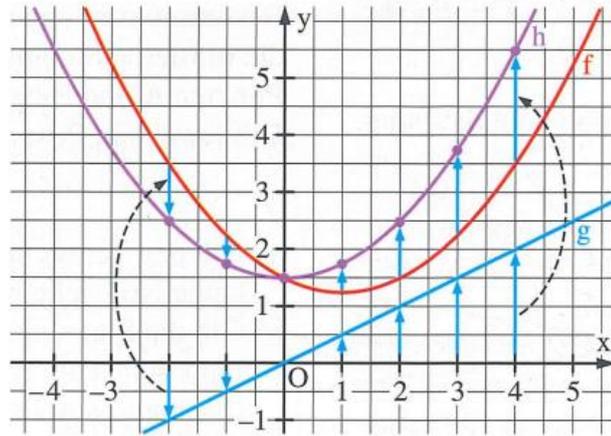


圖 4-18 兩函數和的圖形

資料來源：採自 L8(頁 33)

4. 線型函數

在八年級第三單元第一節「線型函數」中，課文首先說明 y 截距的定義，以圖 4-19 進行說明。

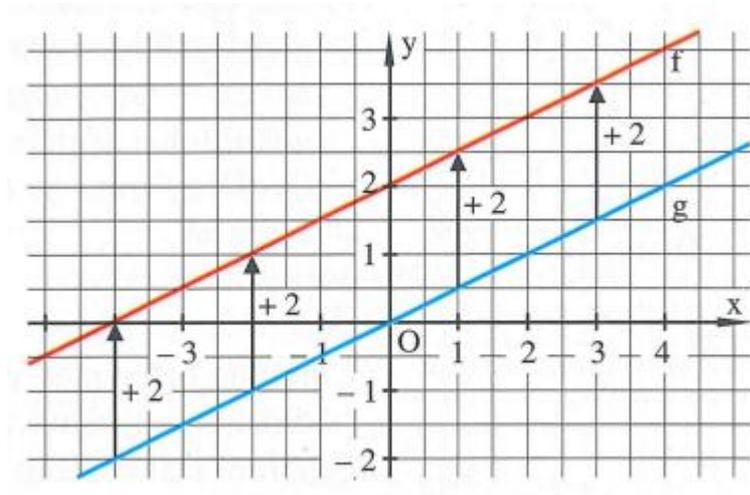


圖 4-19 函數的 y 截距

資料來源：採自 L8(頁 44)

若以相同的 x 值比較 $g: x \mapsto \frac{1}{2}x$ 與 $f: x \mapsto \frac{1}{2}x + 2$ 的函數值，會發現相差的值都相差 2 單位，也就是說 f 的圖形是將 g 的圖形平行於 y 軸方向移動 2 單位所

獲得的。而 f 與 y 軸的交點為 $P(0|2)$ ，此時 P 點的 y 坐標表示此函數的 y 截距。

說明完 y 截距的定義後，接著說說明線型函數的定義。以 $f: x \mapsto mx + t$ 表示線型函數，其中 $m, t \in \mathbb{Q}$ ， m 表示斜率， t 表示此函數的 y 截距。

線型函數定義確立後，接著說明線型函數圖形的繪製方法，以圖 4-20 呈現。

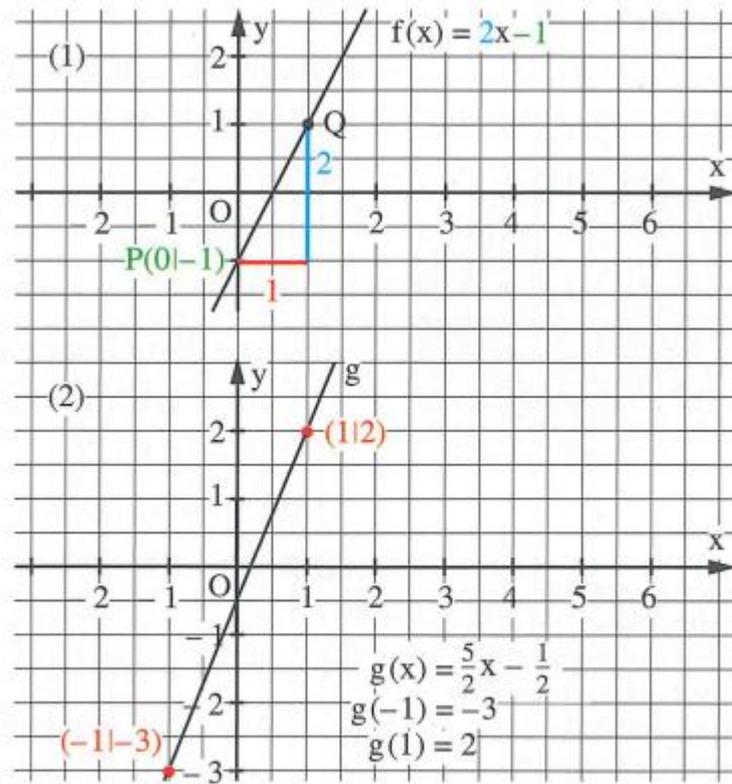


圖 4-20 線型函數圖形的繪製方法

資料來源：採自 L8(頁 45)

文中提供兩個方法，第一個方法先求出函數 $f: x \mapsto mx + t$ 與 y 軸的交點 $P(0|t)$ ，再將 P 點向右移動 1 單位並向上移動 m 單位來獲取第二個點 Q 。以圖 4-20 第一個方法為例；而第二個方法直接計算兩個不同 x 值的函數值，得到定義直線的兩個點的坐標，以圖 4-20 第二個方法為例。

5. 函數式的規定

在八年級第三單元第二節「函數式的規定」中，首先提到若已經知道兩個不同的 x 值與其對應的函數值，或一個 x 值與其函數值和圖形的斜率，則可以定義

線型函數 $f: x \mapsto mx + t$ 。而教科書在此利用斜率三角形引導出計算斜率 m 的方法，以圖 4-21 來說明。

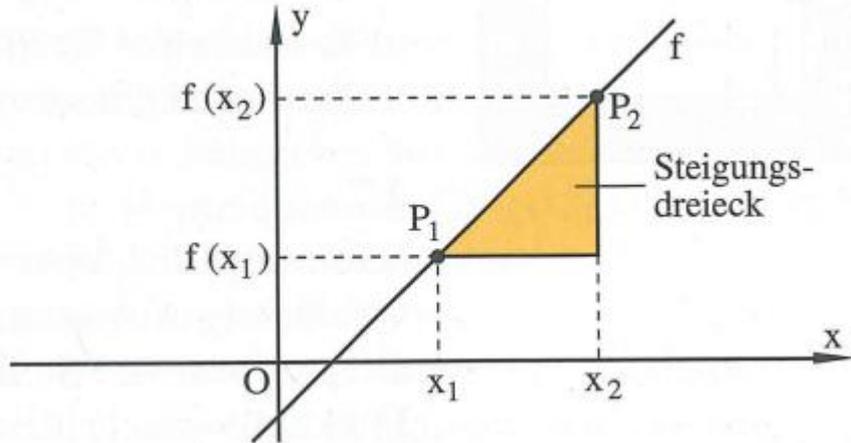


圖 4-21 使用斜率三角形計算斜率

資料來源：採自 L8(頁 48)

若函數 $f: x \mapsto mx + t$ 圖形上有 $P(x_1|f(x_1))$ 與 $P(x_2|f(x_2))$ ，則可利用斜率三角形計算斜率

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

。

6. 線型函數與方程

在八年級第三單元第三節「線型函數與方程式」中，首先提到若要計算函數值為 -1 的 x 值，可以從相關函數圖形中讀取函數值或者通過方程式來求解。文中舉函數 $g: x \mapsto -\frac{1}{2}x + 2$ 為例，以圖 4-22 來呈現。

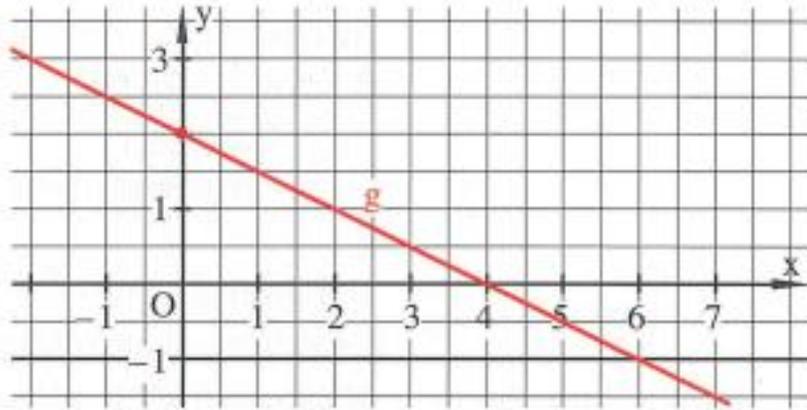


圖 4 - 22 求解線型函數方程式

資料來源：採自 L8(頁 51)

以圖形方式求解來說，可以繪製一條通過點 $(0, -1)$ 且平行於 x 軸的直線，在圖形上找到和函數 g 的交點得到 x 值為 6；以直接計算求解方程式來說，直接計算求解 $-\frac{1}{2}x + 2 = -1$ 也可得到 x 值為 6。

接著文中說明若要確定兩條直線的交點也可以利用圖形或是方程式來求解，文中舉函數式子 $g : y = \frac{1}{2}x - 1$ 與 $h : y = 2.5x + 1$ 為例，以圖 4-23 呈現。

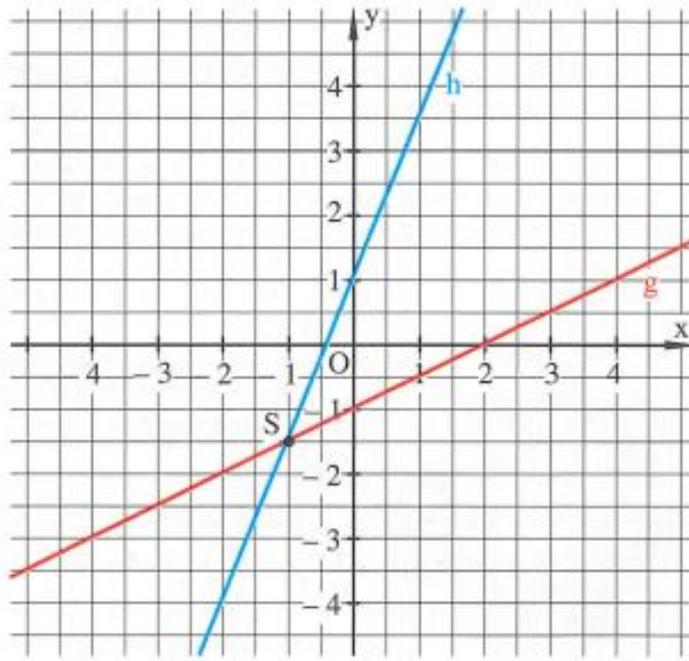


圖 4 - 23 求解兩直線的交點

資料來源：採自 L8(頁 51)

以圖形方式求解來說，在坐標平面繪製兩條直線，並在圖形上讀出交點為 $S(-1|-1.5)$ ；以直接計算求解來說，由於兩條直線交點的 x 與 y 值相同，因此可以將兩個函數式子等式化，以圖 4-24 呈現。

$$\begin{array}{l}
 \frac{1}{2}x - 1 = 2,5x + 1 \quad | -2,5x + 1 \\
 -2x = 2 \quad \quad \quad | :(-2) \\
 x = -1 \\
 g: y = \frac{1}{2} \cdot (-1) - 1 = -1,5 \Rightarrow S(-1|-1,5)
 \end{array}$$

圖 4 - 24 以方程式求解兩條直線的交點

資料來源：採自 L8(頁 51)

圖 4-24 相當於代入消去法，研究者發現在教完線型函數之後，進入第四單元「方程與方程組」，第一節介紹「兩個變數的線型方程」，也就是二元一次方程式，第三節介紹「兩個變數的線型方程組」，也就是二元一次聯立方程式，第四節

才開始介紹「代入消去法」，第五節介紹「加減消去法」。關於二元一次方程式與線型函數的連結關係，詳述在第四章第四節。

7. 分數型有理函數的性質

在八年級第六單元第一節「分數型有理函數的性質」中，首先以這三個函數 $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ 、 $g: x \mapsto -\frac{3}{x+2}$ 與 $h: x \mapsto \frac{2-z}{z^2}$ 為例子，說明像這類型的函數稱為**分數型有理函數**，其中 f 是反比函數，而所有使分母為 0 的數字都不屬於該函數的定義域。

接著為函數 $g: x \mapsto -\frac{3}{x+2}$ 建立函數值表如表 4-9。

表 4-9 函數 g 的數值表

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-1.5	-3	-	3	1.5	1	0.75	0.6	0.5

建立好表格後將這些點在坐標平面呈現，以圖 4-25 呈現。

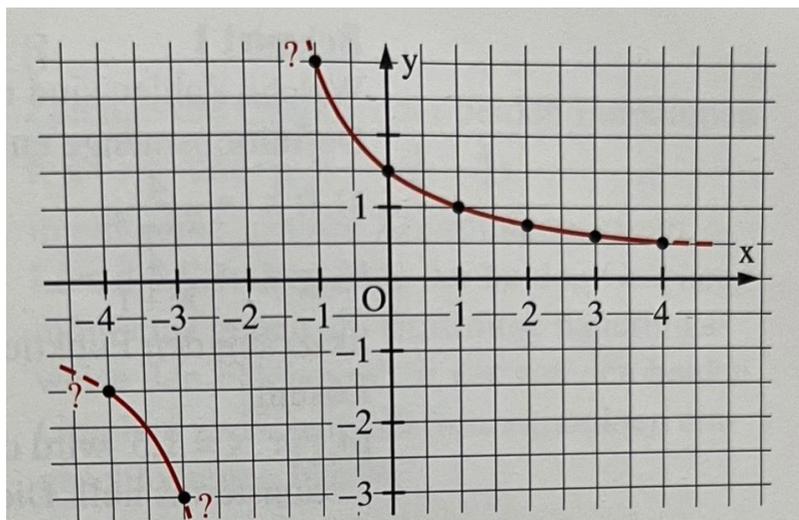


圖 4-25 函數 g 的圖形 1

資料來源：採自 L8(頁 107)

將表上的點繪製在坐標平面上後，整體圖形並不是特別容易辨識，因此在接近 -2 的 x 值範圍內，計算進一步的函數值，以圖 4-26 呈現。

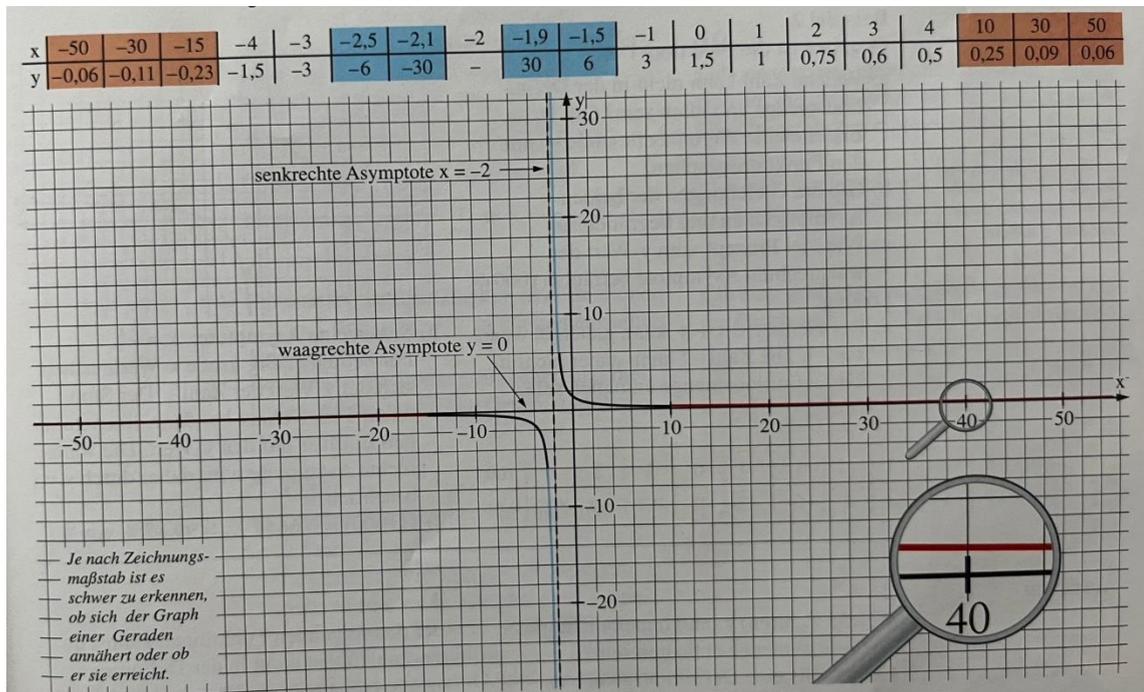


圖 4-26 函數 g 的圖形 2

資料來源：採自 L8(頁 107)

由圖 4-26 可以看出，對於接近 -2 的 x 值所得到的函數值絕對值會很大，例如 $g\left(-2\frac{1}{100}\right) = \frac{3}{-2\frac{1}{100}+2} = \frac{3}{-\frac{1}{100}} = -300$ ；若使用很大的 x 值所得到的函數值會很小，例如 $g(100) = \frac{3}{100+2} = \frac{3}{102} \approx 0.03$ 。

教科書藉由上述例子引導出若函數值越逼近數字 0，圖形也會逐漸逼近直線 $y = 0$ ，則此線稱為**水平漸近線**；而越接近 $x = -2$ 的點所形成的圖形也越來越逼近 $x = -2$ ，則此線稱為**鉛直漸近線**。

二、臺灣

臺灣函數單元從八年級下學期教科書開始，以下分析每個小節的課文內容。

(一) 2-1 變數與函數

1. 認識函數

在 2-1 變數與函數這個單元中，首先在探索活動中討論草莓重量與總價之間的對應關係，如圖 4-27。

探索活動 對應關係

1. 傑克、威利、安琪、艾美 4 人皆自備容器到甜蜜蜜草莓園採草莓。

傑克採了 1 台斤，共 250 元(= 1 × 300 - 50)

威利採了 1.5 台斤，共 _____ 元(= _____ × 300 - 50)

安琪採了 2.4 台斤，共 _____ 元(= _____ × 300 - 50)

艾美採了 3 台斤，共 _____ 元(= _____ × 300 - 50)

2. 將 4 人皆自備容器下所採的草莓重量(台斤)與總價(元)整理並完成右表：

重量(台斤)	1	1.5	2.4	3
總價(元)	250			

3. 在自備容器的情形下，當所採的草莓重量確定後，是否只有一個對應的總價？ 是 否

甜蜜蜜草莓園

入園免門票，按台斤計價，每台斤 300 元。

請勿邊採邊吃

營業時間：09:00~17:00

自備容器減 50 元。

圖 4-27 對應關係的探索活動
資料來源：採自 H8B (頁 51)

藉由探索活動中的兩個變動的量引導出對應關係，將它們分別用 x 與 y 表示兩個變數，由於 y 的值是隨著 x 值改變，所以 x 稱為自變數， y 稱為應變數。接著給予函數的意義，如圖 4-28。

函數的意義

任意給定一個 x 時，都恰有一個 y 與它對應，這種 x 與 y 之間的關係稱為 y 是 x 的**函數(function)**。

圖 4-28 函數的意義
資料來源：採自 H8B (頁 52)

2. 函數值

文中舉了一個生活情境說明函數值的意義，有一柑橘園其入場費為 50 元，每

採 1 公斤，需要費用 30 元。若採收 x 公斤，花費為 y 元，則 x 與 y 的函數關係為 $y = 30x + 50$ ，當 $x = 10$ 時，對應的 y 值為 $y = 30 \times 10 + 50 = 350$ ，其中 350 抽為函數 $y = 30x + 50$ 在 $x = 10$ 的函數值，以圖 4-29 來呈現。注意此圖呈現了函數的「機器加工概念」，同時也是函數的 I/O 模型，但是 H 版並沒有使用映射符號來表達函數式。

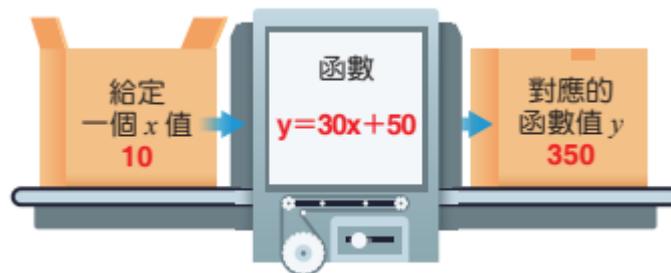


圖 4 - 29 函數與函數值

資料來源：採自 H8B（頁 56）

教科書藉由上述生活情境例子引導出若 y 是 x 的函數，則 $x = a$ 時的 y 值稱為此函數在 $x = a$ 時的函數值。

(二) 2-2 線型函數與圖形

1. 一次函數與常數函數

文中首先以攝氏與華氏溫度的關係式 $y = \frac{9}{5}x + 32$ 說明形如 $y = ax + b$ ($a \neq 0$) 的函數關係式稱為**一次函數**，而 ax 為**一次項**， b 為**常數項**，且稱 a 為一次項係數。

接著以機車停車的生活情境當作例子，如圖 4-30。 x 小時表示機車停車時間， y 元表示機車停車費用。而不管停車多久，所需費用都是 30 元，可以用 $y = 30$ 表示。教科書藉由此例子引導出常數函數的意義，將形如 $y = b$ 的函數，稱為**常數函數**。



圖 4 - 30 常數函數例子

資料來源：採自 H8B (頁 63)

2. 函數圖形

文中將變數 x 與所對應的函數值 y 以坐標形式 (x, y) 表示並將點畫在坐標平面上，以一次函數 $y = 2x + 1$ 為例，將幾個變數值與對應的函數值以表 4-10 呈現。

表 4 - 10 一次函數數值表

x	-2	-1.5	-1	0	1	1.5	2
y	-3	-2	-1	1	3	4	5

表格繪製完後依序將這些點畫在坐標平面上，以圖 4-31 呈現。

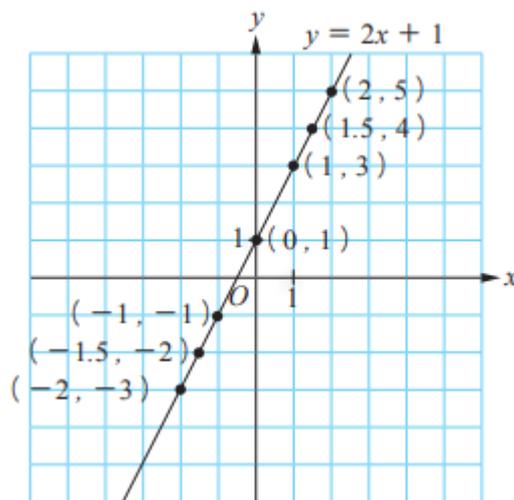


圖 4 - 31 一次函數的圖形

資料來源：採自 H8B (頁 65)

教科書以此例引導出這些點剛好都在同一條直線上。而藉由此性質提出一次函數 $y = 2x + 1$ 的圖形就是二元一次方程式 $2x - y + 1 = 0$ 的圖形。

接著以 2 個例題畫出一次函數與常數函數的圖形，如圖 4-32。

例4 畫一次函數的圖形 自評 P76 第 4 題 (1)(2)(3)
在坐標平面上畫出一次函數 $y = 3x - 2$ 的圖形。

例5 畫常數函數的圖形 自評 P76 第 4 題 (4)
在坐標平面上畫出函數 $y = -2$ 的圖形。

圖 4 - 32 畫一次函數與常數函數圖形之例題

資料來源：採自 H8B（頁 65-66）

教科書藉由以上例題引導出一次函數與常數函數的圖形都是一直線的概念，並將這兩種函數都稱為**線型函數**。接著給予線型函數的定義如圖 4-33。

線型函數
形如 $y = ax + b$ 的函數，稱為線型函數。其中，
(1) 當 $a \neq 0$ 時， $y = ax + b$ 稱為一次函數。
(2) 當 $a = 0$ 時， $y = b$ 稱為常數函數。

圖 4 - 33 線型函數的定義

資料來源：採自 H8B（頁 67）

3. 函數的應用

在函數的應用中，課文中先以調整小考分數的生活情境做開頭，並且以正比關係 $y = kx$ ($k \neq 0$) 來和函數做結合。教科書藉由正比關係的例子引導出當 y 與 x 成正比關係時，其圖形為通過原點的斜直線。如圖 4-34

所以博士是使用 $y = \frac{5}{4}x$ 的正比關係作為調整分數的依據，將 x 與 y 的關係畫在坐標平面上，如右圖。

由上可得：當 y 與 x 成正比關係時，其圖形為通過原點的斜直線。

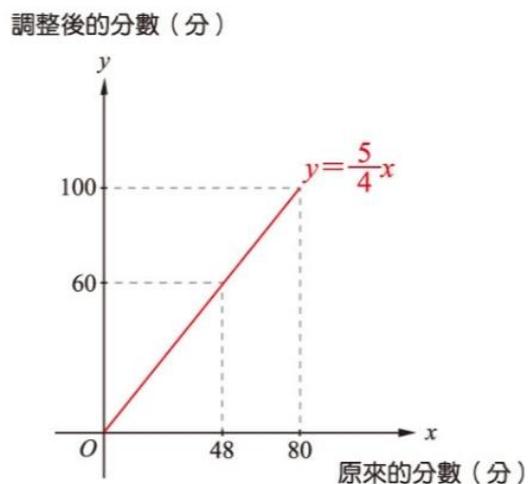


圖 4 - 34 正比關係與函數的應用

資料來源：採自 H8B (頁 70)

接著課文以在商業上常用到的收支平衡分析做為生活情境，列出總成本與總收入的關係式並將其圖形在坐標平面上呈現，如圖 4-35。

在收支平衡點處既沒有營利，也沒有虧損，教科書藉由收支平衡點讓學生理解如何利用總成本與總收入的函數圖形判斷何時達到收支平衡，以及投資者的設備何時將開始產生回報。

收支平衡分析 社會



生活中，一次函數常應用在商業上的收支平衡分析。以超商販賣霜淇淋為例：販賣霜淇淋會有成本與收入的問題，當總成本與總收入相等時，即為收支平衡。



當函數 $y = 15x + 200000$ 與函數 $y = 35x$ 的函數值相等時所求出的 x 值，就是收支平衡時的銷售量。

即 $15x + 200000 = 35x$ ，解得 $x = 10000$ 。

也就是這家超商在售出 10000 支霜淇淋時，總收入為 350000 元，才可收支平衡，由右圖可看出結果。

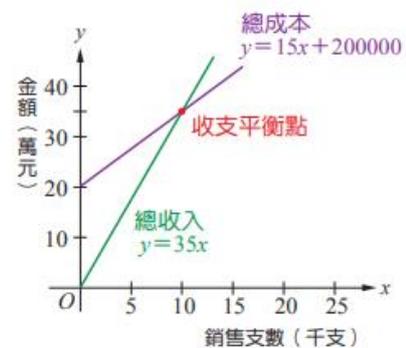


圖 4-35 收支平衡分析

資料來源：採自 H8B (頁 72)

課文本節主要說明線型函數與圖形與應用，而文中最後提及線型函數的圖形是一條直線，並給出如圖 4-36。此例題圖形雖然不是直線但此圖也是一種函數圖形。教科書藉由給予一個不是線型函數的圖形來讓學生理解並不是所有的函數都是直線圖形。

例 8 非直線的函數圖形

右圖是摩天輪的時間與高度之間的關係圖。每一個時間都對應到一個高度，因此它是函數的對應關係，如果以 x 表示時間， y 表示該時間點所對應的高度，分別求出 $x=0$ 、 $x=6$ 、 $x=22$ 時，所對應的 y 值。

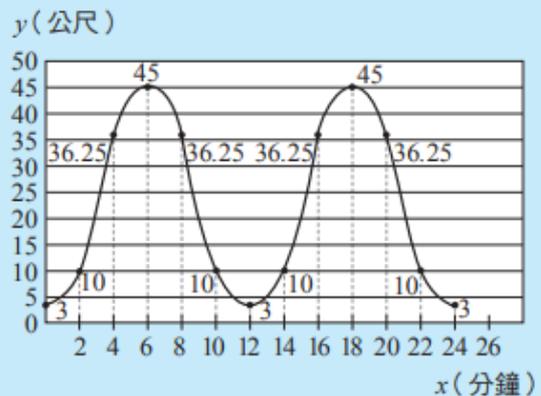


圖 4-36 非直線的函數圖形

資料來源：採自 H8B (頁 73)

三、 兩國函數單元教材編排順序之小結

藉由上述德國與臺灣函數單元教材編排順序之內容，研究者發現德國比臺灣較早進入函數單元，也比臺灣更常使用圖表來表示兩變數之間的關係。德國從六年級起正式介紹德國的坐標平面與函數圖形教學，但是他們對坐標平面的概念準備，從五年級就開始了。起先在自然數與數線的單元中，用一個簡單的第一象限圖來介紹坐標點的概念，然後引進負數之後，將第一象限擴展成四個象限，並且在之後的單元都很自然地將坐標平面融入進題目裡。到了七年級將自變數與應變數的關係以坐標的點來呈現函數圖形，臺灣則以兩變數對應的表格與文字敘述來表示兩變數之間的關係，由此可見德國擅長使用圖表來呈現函數概念。

而兩國正式進入函數單元後，對於函數對應關係各有不同的介紹方式，德國讓學生觀察浴缸水位變化圖來編造一個故事來訴說水位如何變化，利用開放式的問題來讓學生編造背後可能發生的故事，使學生發揮想像力去思考開放式的答案，而在函數圖形上，也搭配函數繪圖器來讓學生觀察函數圖形的特徵。臺灣則舉日常生活的例子並搭配使用表格表示兩變數的對應關係，並未使用坐標圖表與函數繪圖器來呈現函數圖形。由此可見德國很自然地將坐標平面與函數繪圖器融入在函數單元裡。

在線型函數單元中兩國同樣都以直線中的兩點來求出線型函數方程式，不過德國

比臺灣多增加了截距與斜率的概念，利用截距求出方程式，並使用斜率三角形來表示線型函數中斜率的意涵。除了斜率，德國還告訴學生根的概念，利用根可以找到在線型函數 x 軸上的交點。在臺灣根與斜率在高中課程才會提到。

在德國 LS 版八年級教科書函數單元中除了介紹函數與線型函數的概念，也有提到分數型有理函數，並藉由此單元介紹水平漸近線與垂直漸近線的概念，而臺灣在高中甚至大學階段才會提到水平漸近線與鉛直漸近線的概念。由此可見德國 LS 版比臺灣在國中八年級階段較早學到分數型有理函數與漸近線的概念。

第四節 其他單元與線型函數單元的連結分析

本節將分別針對德國 LS 版與臺灣 H 版在其他單元與線型函數單元的連結情形進行比較與分析。

一、 德國

(一) 五年級

1. 直角坐標平面

研究者發現在德國 LS 版六年級教科書就已經出現坐標平面的概念以及兩變數之間的關係，於是往前翻閱五年級教科書發現在第一單元第二節之「數字的插圖」中開始介紹自然數與數線的概念，並說明兩條互相垂直的數線是為了描述點在平面上的位置，進而引導出直角坐標平面的概念，如圖 4-37。

由於這一單元剛開始介紹自然數，因此坐標平面只呈現第一象限。而到了五年級第三單元第一節開始介紹了負數，並在第二節將直角坐標平面擴展成四個象限，如圖 4-38。

德國 LS 版五年級教科書在此小節已介紹完整四個象限的直角坐標平面的表示方式，並且均有將坐標平面融入在之後的單元中。

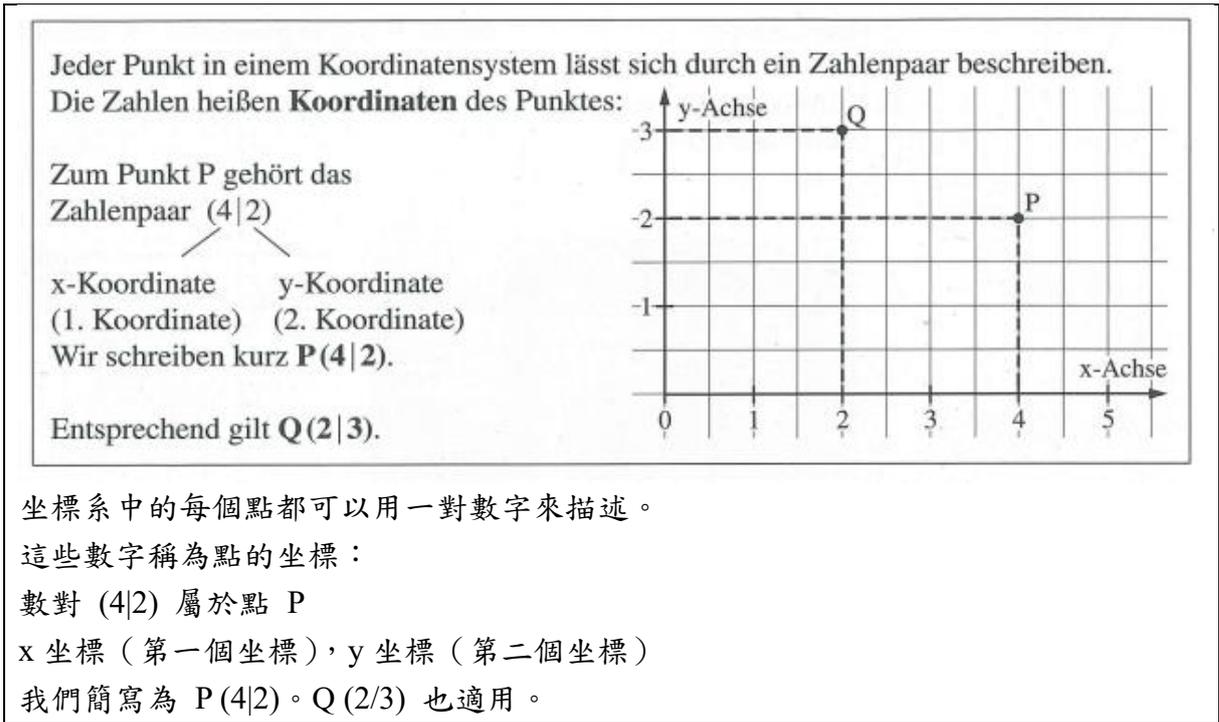


圖 4 - 37 德國 LS 版五年級之直角坐標平面 1

資料來源：採自 L5 (頁 11)

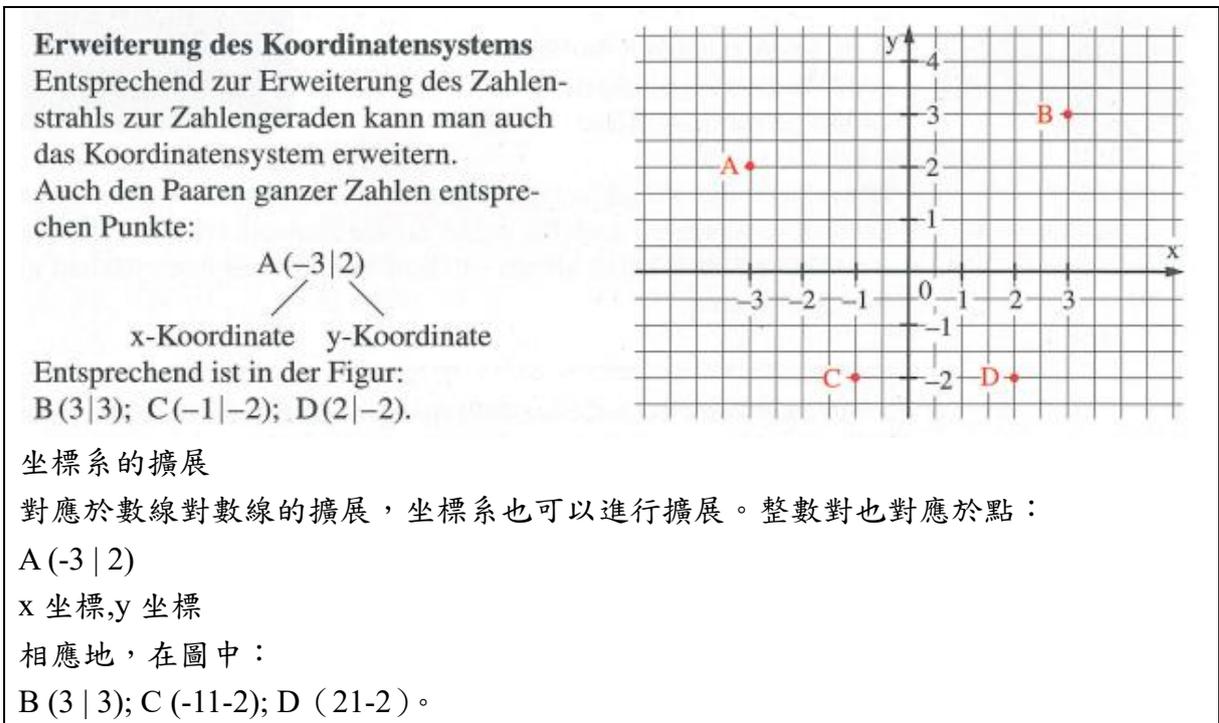


圖 4 - 38 德國 LS 版五年級之直角坐標平面 2

資料來源：採自 L5 (頁 49)

(二) 六年級

1. 兩變數之間的關係

在德國 LS 版六年級第八單元第六節之「兩個變數用於坐標軸」中就已經開始使用直角坐標平面來圖示兩個變數之間的關係，如圖 4-39。

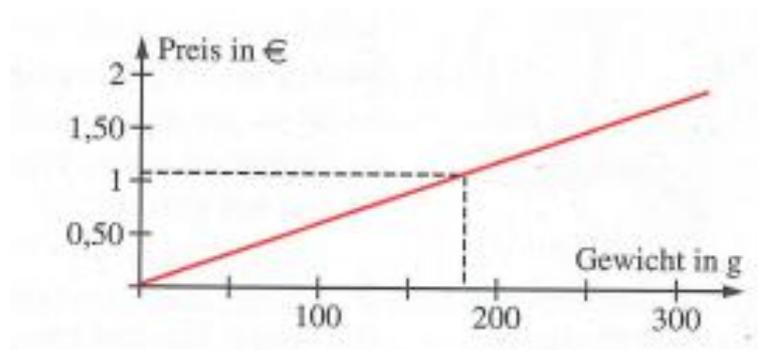


圖 4-39 兩個變數用於坐標軸

資料來源：採自 L6 (頁 187)

此例題中，兩個變數之間的關係圖形以直線方式來呈現，在此為函數圖形與線型函數建立了基礎概念。

(三) 七年級

1. 代數式

在德國 LS 版七年級第三單元第一節「變數的規則」中，開始以英文字母表示變數或是表示一個代數式，如圖 4-40。

<p>$A(x)$ wird gelesen: A (in Abhängigkeit) von x</p>	<p>Zweckmäßig ist es, den Term abkürzend mit einem Buchstaben zu bezeichnen, z. B. im obigen Zusammenhang den Flächeninhalt mit A. Da er von der Länge x der Zündhölzer abhängt, schreibt man:</p> $A(x) = 3 \cdot x^2.$ <p>$A(6\text{ cm}) = 3 \cdot (6\text{ cm})^2 = 108\text{ cm}^2$ gibt den Termwert für $x = 6\text{ cm}$ an.</p>
--	--

圖 4-40 以英文字母表示變數或一個代數式

資料來源：採自 L7 (頁 52)

在圖 4-40 中， x 表示正方形的邊長， $3x^2$ 表示三個正方形的面積，並且使用

$A(x)$ 來表示 $3x^2$ 這個代數式，在課文旁邊的提示說明 $A(x)$ 的值取決於 x 的值，在此為之後的函數單元建立兩變數之間的關係能以兩種英文字母符號來表示的概念。

2. 自變數與應變數

在德國 LS 版七年級第三單元第四節「自變數與應變數」中，開始將自變數和應變數的關係與直角坐標平面做結合，每一組自變數與應變數的數對都能表示直角坐標平面上的一個點，而直角坐標平面上的這些點可以形成此式子的圖形，以式子 $T(x) = x^2 - 1$ 為例子，如圖 4-41。從「自變數與應變數」單元開始將自變數與應變數以點的形式標示在直角坐標平面中，得以建立函數圖形的概念。

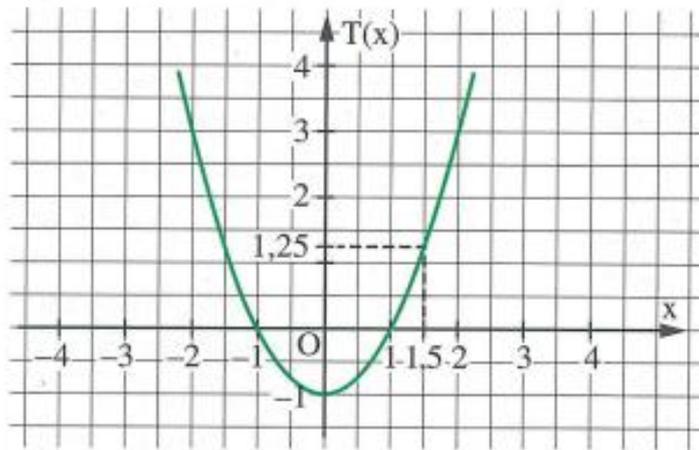


圖 4-41 代數式 $T(x)$ 在直角坐標平面形成的圖形

資料來源：採自 L7 (頁 63)

3. 方程

在德國 LS 版七年級第五單元第一節「方程」中，主要介紹一元方程的形式，課文舉例 $2x + 3 = 27$ 或 $-7 + 4x = 2x + 5$ 以及 $4 - x^2 = x^3 + 3$ 都屬於方程，此時只有一個未知數，還未進入二個變數。為了求出方程的解，課文提供兩種方法，以 $-7 + 4x = 2x + 5$ 為例子。第一種方法是代數字進入 x 觀察等號兩邊是否相等，如圖 4-42；第二種方法是藉由第三章第四單元的概念，將兩個方程式的圖形呈現在直角坐標平面中，而兩圖形交點的 x 值即為方程的解，如圖 4-43。第二種方法在此引導學生利用圖形交點求出方程的解，以建立對函數圖形的概念。

Erste Vorgehensweise:

	für x einsetzen	linke Seite	rechte Seite	
$-7 + 4x = 2x + 5:$	$x = -2:$	$-15 \neq 1$		Die linke Seite wächst stärker; die beiden Werte kommen sich näher.
	$x = -1:$	$-11 \neq 3$		
	$x = 0:$	$-7 \neq 5$		
	$x = 5:$	$13 \neq 15$		
	$x = 6:$	$17 = 17$		Hier stimmen die Werte überein.
	$x = 7:$	$21 \neq 19$		Die Werte entfernen sich voneinander.
	$x = 8:$	$25 \neq 21$		

Die Zahl 6 ist also eine Lösung der Gleichung. Da die linke Seite stärker anwächst als die rechte Seite, wenn man größere x -Werte einsetzt, ist 6 die einzige Lösung.

圖 4-42 以代數字進入 x 觀察是否等號成立

資料來源：採自 L7 (頁 99)

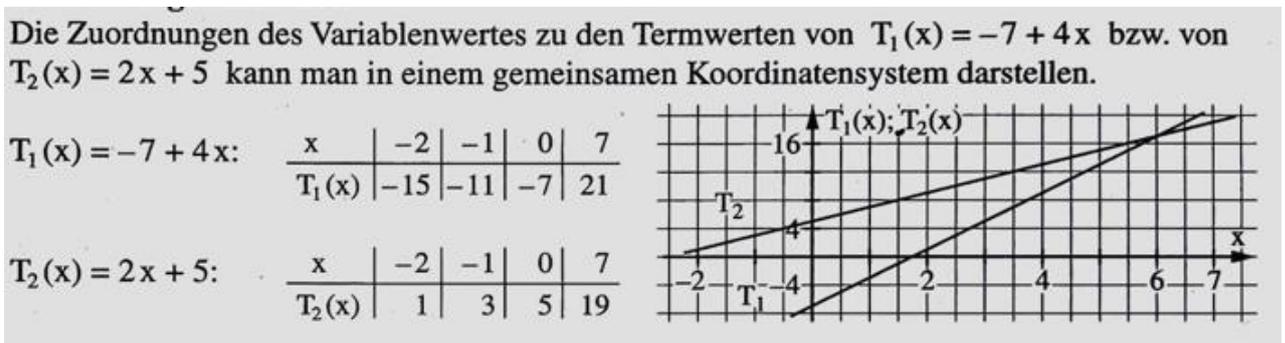


圖 4-43 以圖形交點求方程的解

資料來源：採自 L7 (頁 99)

(四) 八年級

1. 正比

在德國 LS 版八年級第一單元第一節「正比」中，引入兩變數對應關係的符號表示方式，課文以電纜當作生活例子。每根電纜長度 x 公尺對應一定的重量 M 公克，在數學上以符號「 $x \mapsto M$ 」來表示，讀作「 x 對應 M 」，例如 $1m \mapsto 240g$ 表示 1 公尺電纜重 240 公克。兩變數對應關係的符號表示方式確立後，文中接著利用重量與價錢的對應表示與方程式的圖形來定義正比方程式，以 $m \mapsto P$ 表示重量對應價錢的關係， $P = qm$ 表示正比方程式，並且以圖形來呈現，如圖 4-44。在「正比」單元中將對應符號與方程式結合，藉以建立學生之後在函數對應關係的表示方式。

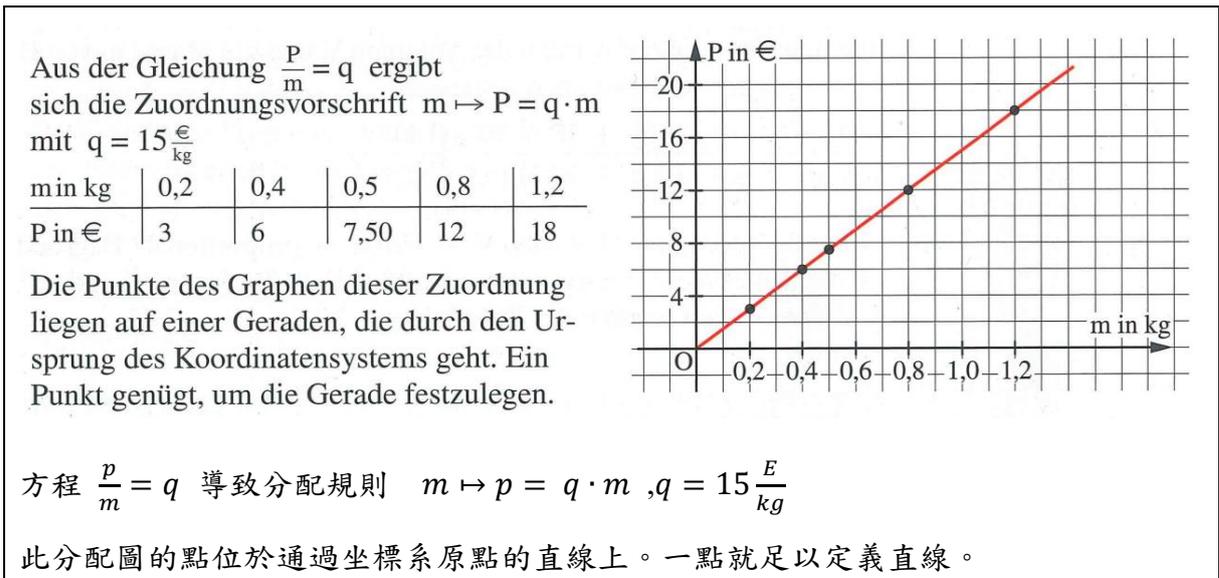


圖 4-44 正比關係方程式

資料來源：採自 L8 (頁 11)

2. 斜率

介紹完正比方程式之後開始進入函數單元，在 LS 版教科書八年級第二單元第三節「函數與圖形：根與斜率」中，課文以方程式 $y = mx$ 做 y 與 x 的比值為 m 來引導出正比函數 $f: x \mapsto mx$ ，同時也利用正比函數來推導斜率三角形的概念，如圖 4-45。

3. 二元一次方程式

介紹完線型函數後，進入第四單元「方程與方程組」，第一節介紹「兩個變數的線型方程」，也就是二元一次方程式。研究者發現在此單元中，LS 版繪製二元一次方程式的圖形除了找出線上兩個點外，也可將二元一次方程式轉換成線型函數 $y = mx + t$ 的形式，並且使用斜率與 y 截距找出兩個點畫出直線，如圖 4-46。

4. 二元一次方程式組

接著第四單元第三節介紹「兩個變數的線型方程組」，也就是二元一次聯立方程式，如圖 4-47。此題找出共同解的方法也是將二元一次方程式轉換成線型函數 $y = mx + t$ 的形式，利用 y 坐標相同的概念，再次使用代入消去法求解，而代入消去法在第四節才正式介紹。研究者發現第五節的標題是「加法」消去法，課文主要以加法來做教學。文中提到若兩方程中某個變數的係數互為相反數，則以兩個方程相加來消除變數；若兩方程中某個變數的係數相同，則以兩個方程相減來消除該變數。

研究者將德國 LS 版線型函數教材編排結構整理如圖 4-48。

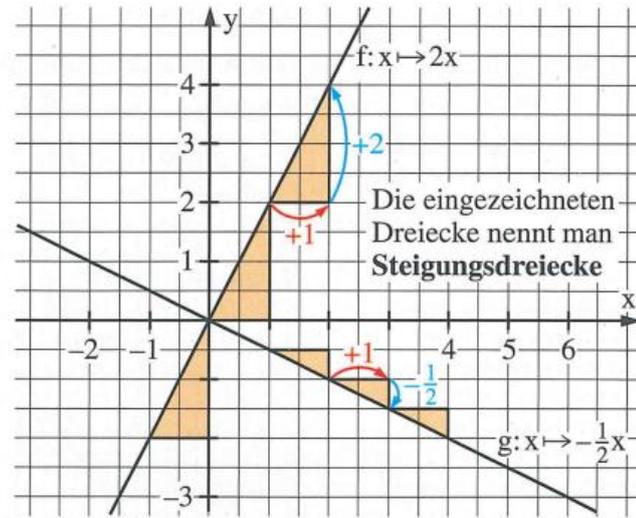


圖 4-45 正比函數與斜率三角形

資料來源：採自 L8 (頁 33)

Beispiel 1

a) Gib zwei Lösungen von $5x - 3y = -9$ an.
 b) Beschreibe zwei Möglichkeiten, die zu der Gleichung gehörende Gerade zu zeichnen.
 c) Zeichne die Gerade und lies eine weitere Lösung ab.

Lösung:

a) $5x - 3y = -9 \quad | -5x$
 $-3y = -5x - 9 \quad | :(-3)$
 $y = \frac{5}{3}x + 3$

z. B. für $x = -3$ erhält man $y = -2$
 und für $x = 0$ erhält man $y = 3$.
 $(-3|-2)$ und $(0|3)$ sind Lösungen.

b) 1. Möglichkeit:
 Man trägt die beiden gefundenen Lösungen als Punkte in ein Koordinatensystem ein und verbindet sie geradlinig.
 2. Möglichkeit:
 Aus der nach y aufgelösten Form der Gleichung $y = \frac{5}{3}x + 3$ entnimmt man die

Steigung $m = \frac{5}{3}$ und den y -Achsenabschnitt $t = 3$ und zeichnet damit die zur Gleichung gehörende Gerade.

c)

圖 4-46 LS 版二元一次方程式圖形

資料來源：採自 L8 (頁 63)

Lösung:

x : Anzahl der kleineren Packungen
 y : Anzahl der größeren Packungen
 Anzahl der Umschläge: $x + 2y = 10$
 $y = -\frac{1}{2}x + 5$
 Anzahl der Briefbögen: $x + 6y = 18$
 $y = -\frac{1}{6}x + 3$

Schnittpunkt der beiden Geraden: $(6|2)$.
 Julia sollte sechs kleine und zwei große Packungen kaufen.

圖 4-47 LS 版求解二元一次聯立方程式

資料來源：採自 L8 (頁 68)

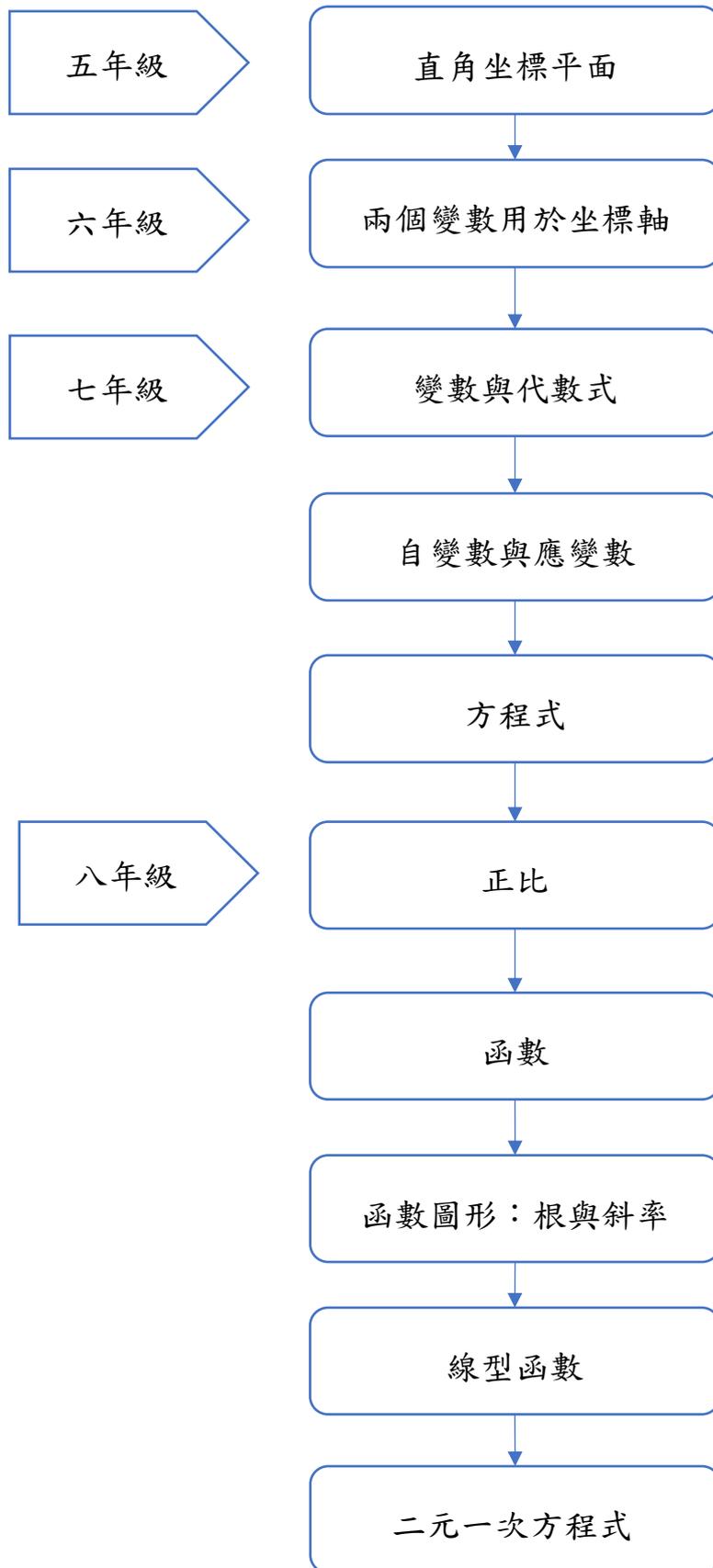


圖 4 - 48 德國 LS 版線型函數教材編排結構圖

二、臺灣

(一) 七年級

1. 一元一次方程式

在臺灣七上教科書第三章一元一次方程式之第一單元「式子的運算」中，舉實際生活例子來以符號或英文字母表示一個數或是表示一個代數式，為學生日後理解函數概念打下基礎，如圖 4-49。

① 以符號代表數

國小時曾經學過用「□、△、○」、「甲、乙、丙」等文字或符號代表未知的數並記錄問題，再以算式填充題的方式解題。後來又以英文字母 x 、 y 、 z 等代表未知的數。例如：

(1) 長方形的寬 x 公分，長比寬多 5 公分，則長就是 $(x+5)$ 公分。

(2) 弟弟比哥哥小 2 歲，如果哥哥今年是 x 歲，則弟弟今年就是 $(x-2)$ 歲。

(3) 演唱會門票一張 1500 元，買 x 張要 $(1500 \times x)$ 元。

(4) 心凌買 3 支熱狗共用了 y 元，則每支熱狗的價格是 $(y \div 3)$ 元。

像 $x+5$ 、 $x-2$ 、 $1500 \times x$ 、 $y \div 3$ 等，由文字和數字組成的算式，稱為**代數式**。

圖 4-49 以符號代表數

資料來源：採自 T7A (頁 151)

2. 二元一次方程式

而到了臺灣七下教科書第一章二元一次方程式中，學生開始理解兩個變數之間關係，在這個階段，教材著重於使用兩個符號來代表兩個未知數，並且與生活實例連結，有助於學生進一步探索和理解函數關係，如圖 4-50。

③ 二元一次方程式

安琪買了每個 25 元的麵包 x 個和每瓶 20 元的果汁 y 瓶，共花了 230 元。

每個 25 元的麵包 x 個，共需 $25x$ 元；
每瓶 20 元的果汁 y 瓶，共需 $20y$ 元。
因為共花了 230 元，所以可列等式
 $25x + 20y = 230$ 。



像 $25x + 20y = 230$ 這種含有兩種未知數(二元)，且這兩種未知數的次方都是一次的等式，稱為二元一次方程式。

圖 4-50 二元一次方程式

資料來源：採自 T7B (頁 13)

而在此單元例題 8 中，如圖 4-51，將 x 以任意指定的數代入二元一次方程式時，都可以求出相對應的 y 值，說明一個二元一次方程式有無限多組解。在此例題中引導學生了解每一個 x 對應到唯一一個 y ，藉此建立對函數定義的基本概念。

例 8 求二元一次方程式的解

找出二元一次方程式 $2x + 3y = 12$ 的任意三組解。

圖 4-51 求二元一次方程式的解

資料來源：採自 T7B (頁 15)

3. 直角坐標平面

在臺灣七下教科書第二章直角坐標平面中，在學習直角坐標平面時開始將代數和幾何的概念聯結起來。在此單元中學生將學習如何將兩個變數在直角坐標平面上以數對來表示，並開始理解函數圖形和代數式之間的關係，如圖 4-52。

② 直角坐標

為了方便描述在平面上某個點的位置，我們可以在平面上作兩條互相垂直而且有共同原點的數線，如圖一。其中，
水平的數線稱為 **x 軸（橫軸）**，一般以向右的箭頭表示正向；
鉛垂的數線稱為 **y 軸（縱軸）**，一般以向上的箭頭表示正向。
這兩條數線所在的平面稱為 **直角坐標平面**，簡稱 **坐標平面**。

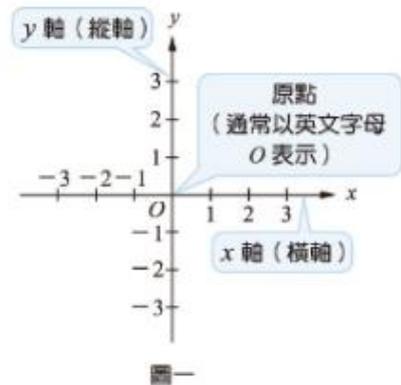


圖 4 - 52 直角坐標平面

資料來源：採自 T7B（頁 56）

4. 二元一次方程式的圖形

在臺灣七下教科書第二章二元一次方程式的圖形中，將方程式的概念與其幾何意義結合，在此單元中學生要理解方程式與其在直角坐標平面上的圖形之間的關係。如圖 4-53，二元一次方程式的圖形藉由找出五組解標示在坐標平面上，五個點中任意兩點連線所形成的圖形會是一條直線，在此同時也能發現這五個點剛好都在這條直線上，此題藉此說明二元一次方程式在坐標平面上的圖形都是一條直線，並且直線上任何一點都是方程式的一組解。

2 二元一次方程式的圖形

1. 找出二元一次方程式 $3x+2y=6$ 的任意五組解，並標示在坐標平面上。
2. 承 1，通過任意兩點畫一條直線，觀察這些點是否都在這條直線上？

1. 將 x 分別以 -2 、 -1 、 0 、 1 、 2 代入，
求出對應的 y 值，如下表：

x	-2	-1	0	1	2
y	6	$\frac{9}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	0

將上述五個點標示在坐標平面上。

2. 連接 $(2, 0)$ 、 $(0, 3)$ 畫一條直線，
可以發現這些點都位在這條直線上。

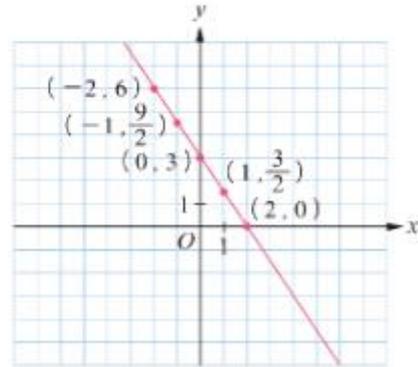


圖 4-53 二元一次方程式的圖形

資料來源：採自 T7B (頁 74)

5. 正比方程式

在臺灣七下教科書第三章正比單元中，藉由漫畫與日常生活情境結合，並以表格呈現漂白水與清水對應關係的比例，說明正比的同比例性，如圖 4-54。H 版在這裡並未呈現正比方程式的圖形，而是到了八年級函數的應用才說。

1 正比

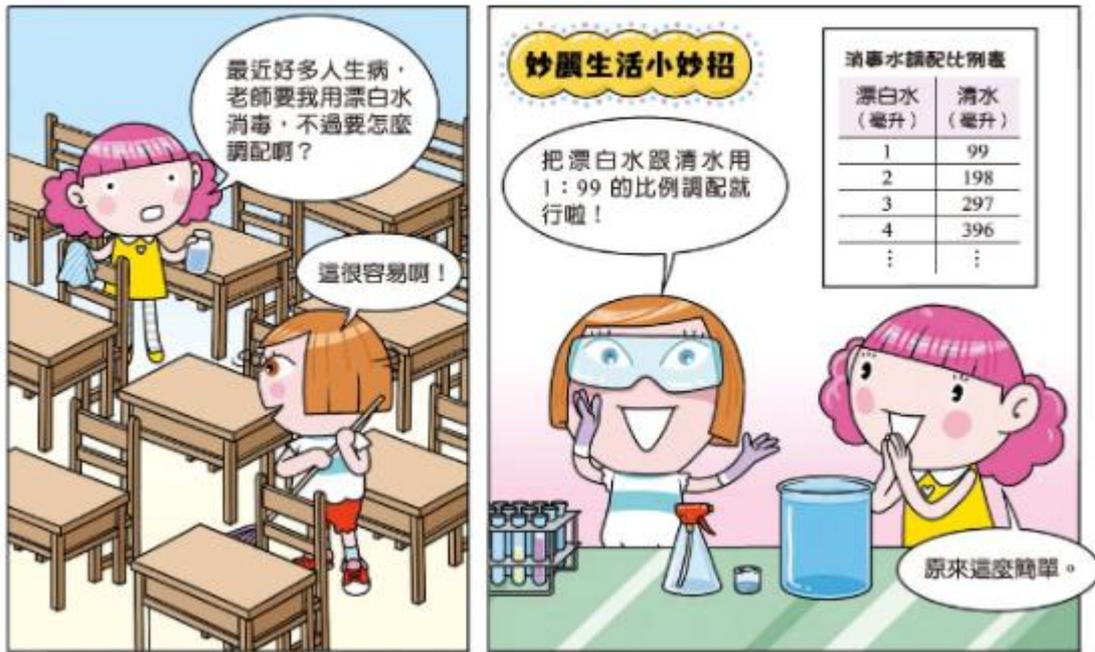


圖 4 - 54 正比的同比例性

資料來源：採自 T7B (頁 118)

(二) 八年級

1. 函數的應用

臺灣八下教科書第二章開始進入線型函數單元，在函數的應用小節中利用正比關係 $y = kx$ ($k \neq 0$) 來和函數做結合，如圖 4-34。另外也將二元一次方程式的圖形與函數概念結合，將日常生活例子與函數聯結並將其圖形在坐標平面上呈現，如圖 4-35。

研究者將臺灣線型函數教材編排結構整理如圖 4-55。

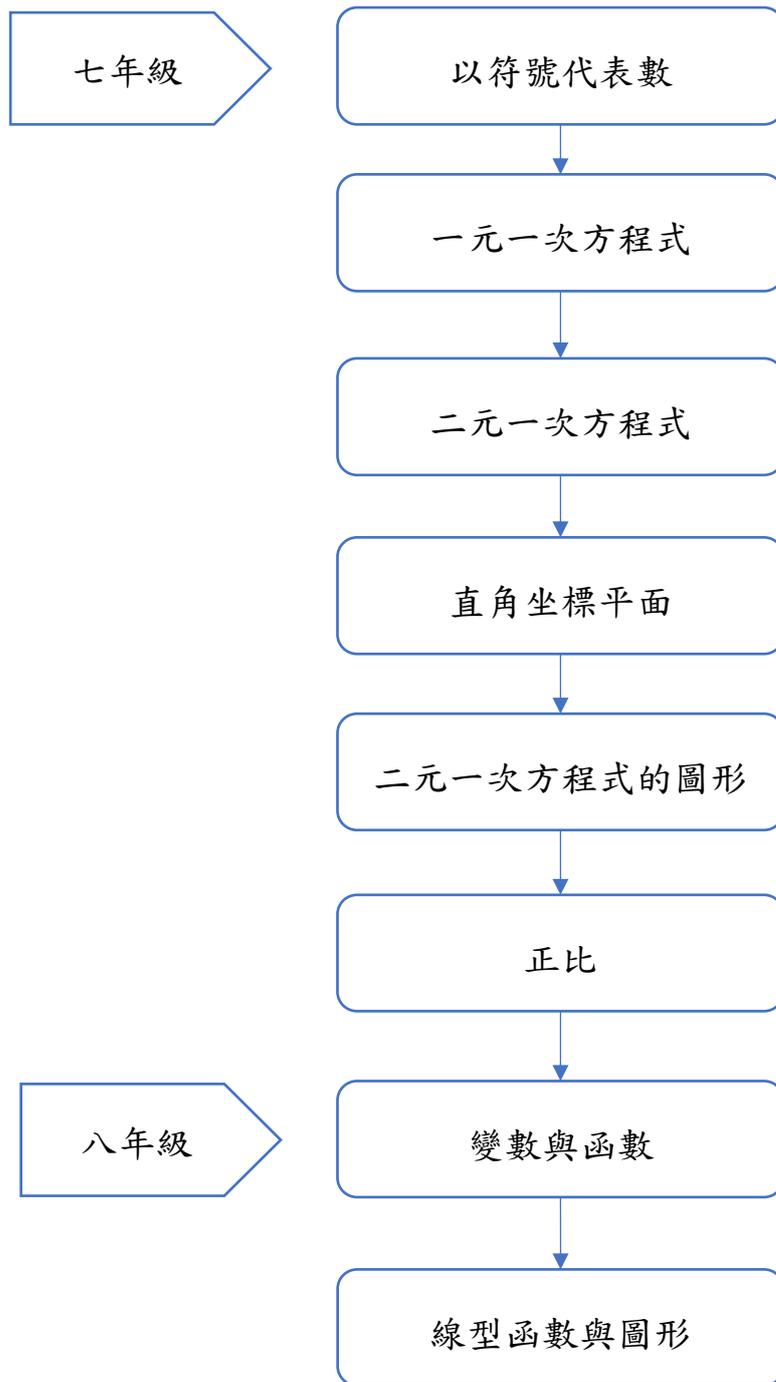


圖 4 - 55 臺灣 H 版線型函數教材編排結構圖

三、兩國之其他單元與線型函數單元的連結分析小結

藉由上述德國與臺灣其他單元與線型函數單元的連結內容可以得知，德國 LS 版五年級時就開始介紹直角坐標平面，而臺灣 H 版在七年級時才開始引入直角坐標平面，並且在單元二元一次方程式後再獨立一個章節介紹如何繪製二元一次方程式的圖形。德國 LS 版並未向臺灣 H 版一樣有獨立章節介紹直角座標平面圖型如何繪製，德國 LS 版簡單介紹何謂直角坐標平面後，直接自然地將坐標平面融入在之後的任何單元裡，這是兩國在直角坐標平面截然不同的地方。

在德國 LS 版六年級與七年級開始介紹兩個變數用於坐標軸以及自變數與應變數的定義，此時尚未正式進入函數的定義。而臺灣 H 版則是到八年級正式進入函數單元時才正式介紹自變數與應變數以及將坐標融入在函數裡，此時也可以得知德國從六年級開始比臺灣早進入函數單元的概念。

兩國在進入函數單元前，都有介紹正比單元，臺灣 H 版在七年級進入正比，德國 LS 版則在八年級才提到正比。如圖 4-38 所示，LS 版在「正比」單元提到正比方程式與正比對應關係，並且在「函數和圖形：根與斜率」單元中提到以方程式 $y = mx$ 做 y 與 x 的比值為 m 來引導出正比函數 $f: x \mapsto mx$ ，如圖 4-39；臺灣 H 版在「函數的應用」單元中，以調整小考分數的生活情境做開頭，並且以正比關係 $y = kx (k \neq 0)$ 來和函數做結合，藉由正比關係引導出當 y 與 x 成正比關係時，其圖形為通過原點的斜直線。如圖 4-29。兩國在函數單元中皆有提到正比方程式就是屬於線型函數，且兩國在正比單元皆以「 $y = kx$ 」表示 x 與 y 為正比關係式。但德國 LS 版在正比單元中有引入兩變數對應關係的符號表示方式，在課文中上以符號「 $x \mapsto M$ 」來表示「 x 對應 M 」。

兩國在八年級開始正式進入函數單元，德國 LS 版介紹函數關係使用大量的直角坐標平面圖來表示兩變數的對應關係與所呈現的方程式圖形，如圖 4-5 與圖 4-6。為了定義明確對應的關係，以「 $x \mapsto y$ 」來表示每一個自變數 x 都恰有一個應變數 y 與它對應，課文中也有說明常見的函數相關名詞，在此也介紹了定義域與值域的概念；而臺

灣 H 版介紹函數關係使用文字敘述搭配兩變數關係的表格，如圖 3-8 與圖 4-19，課文中僅提及函數定義與函數值的概念，並未提到定義域與值域的概念。

兩國在線型函數單元中描繪線型函數的圖形均以求出直線方程式的兩個點來畫出線型函數圖形，德國 LS 版僅以文字說明如何繪製線型函數圖形的方法，而臺灣 H 版則有繪製線型函數的例題與練習題，可見臺灣 H 版著重在學生描點繪圖的經驗。相較於臺灣 H 版，德國 LS 版在線型函數單元中提到當 x 增加 1 單位，對應的 y 增加 m 單位，與直線所形成的三角形稱為**斜率三角形**，藉以推導線型函數中斜率的概念。另外德國 LS 版也有提到函數圖形與 x 軸的交點是一個特殊點，此特殊點的 x 坐標稱為此函數 f 的根，函數 f 的每個根都是方程式 $f(x) = 0$ 的解，而臺灣在高中才提到根與斜率的概念，由此可見德國比臺灣較早學到根與斜率的概念。

在德國 LS 版八年級教科書函數單元中除了介紹函數與線型函數的概念，也有提到分數型有理函數，並藉由此單元介紹水平漸近線與垂直漸近線的概念，而臺灣在高中甚至大學階段才會提到水平漸近線與鉛直漸近線的概念。由此可見德國 LS 版比臺灣在國中八年級階段較早學到分數型有理函數與漸近線的概念。

德國 LS 版在八年級教完線型函數單元後進入兩個變數的方程與方程組，也就是二元一次方程式與二元一次聯立方程式，此單元告訴學生除了找出線上兩個點畫直線，也可將二元一次方程式轉換成線型函數 $y = mx + t$ 的形式，並且使用斜率與 y 截距找出兩個點畫出直線。而臺灣 H 版則是先在七年級教二元一次方程式與圖形，告訴學生將 x 以任意指定的數代入二元一次方程式時，都可以求出相對應的 y 值，說明一個二元一次方程式有無限多組解，連結函數對應關係的概念。H 版因八年級開始才教線型函數，並未將二元一次方程式與線型函數的概念做聯結。

第五章 結論與建議

本章將針對研究目的，根據第四章研究的結果，分為二節來給出結論與建議。第一節將根據本研究結果提出結論，並依據此結論在第二節提出建議。

第一節 結論

一、教科書內容頁數、單元數、教學例題數之佔比

圖 5-1 為德國 LS 版與臺灣 H 版函數內容頁數佔比對照圖，圖中顯示臺灣 H 版函數內容頁數佔比(7.6%)與 LS 版函數內容頁數佔比(6.3%)差異不大，H 版函數內容比例較 LS 版函數內容佔比例略高一些。

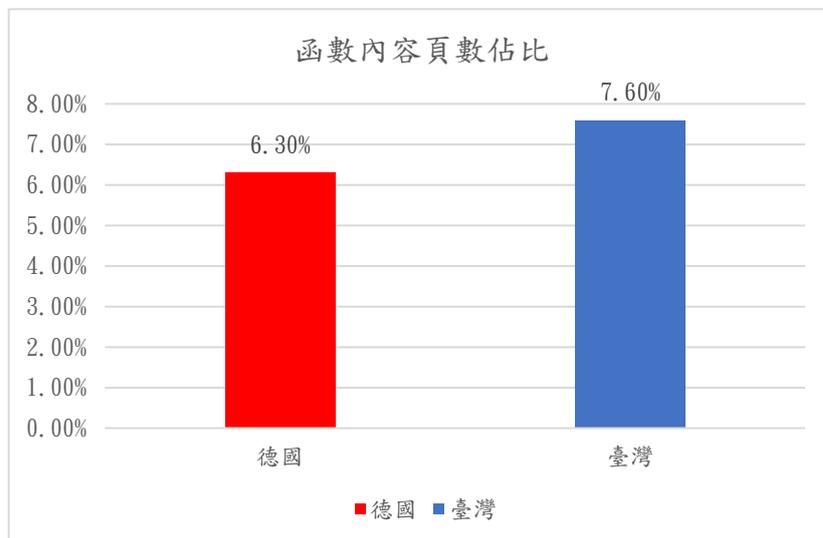


圖 5 - 1 德國 LS 版與臺灣 H 版函數內容頁數佔比對照圖

圖 5-2 為德國 LS 版與臺灣 H 版函數單元與小節佔比對照圖，LS 版函數單元佔比(21.7%)明顯高於 H 版函數單元佔比(11.1%)，而兩國函數單元小節佔比則相差不大。從圖 5-2 與表 4-2 可以看出 LS 版在六年級與七年級各別安排一個基礎的函數概念單元，到八年級將函數單元正式介紹，並再細分三個單元進行加深加廣。LS 版對於函數課程的安排重視螺旋式的發展。

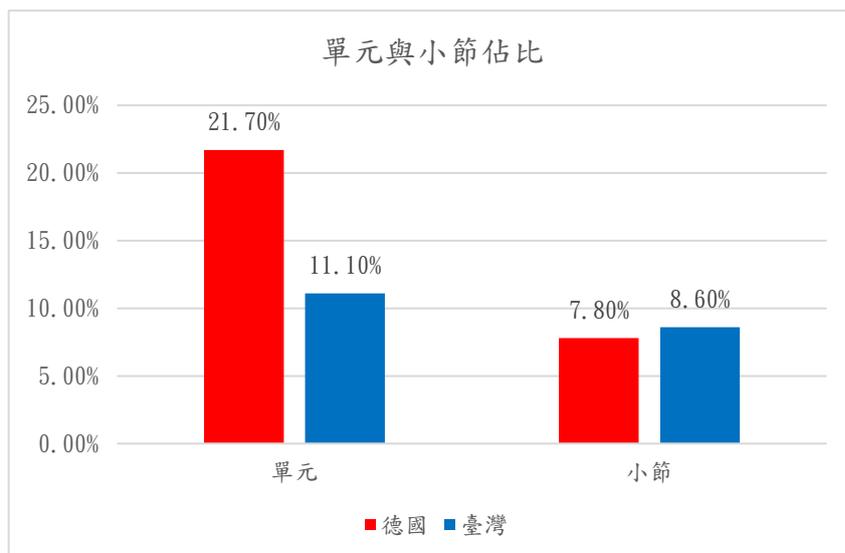


圖 5-2 德國 LS 版與臺灣 H 版函數單元與小節佔比

圖 5-3 為德國 LS 版與臺灣 H 版函數教學例題分布圖，德國 LS 版從六、七年級開始出現函數概念例題，八年級正式進入函數單元，而 H 版則只安排在八年級進行，兩版教學例題數差異不大。此圖顯示德國從六年級開始學習函數概念，比臺灣較早開始進入函數單元的相關例題。

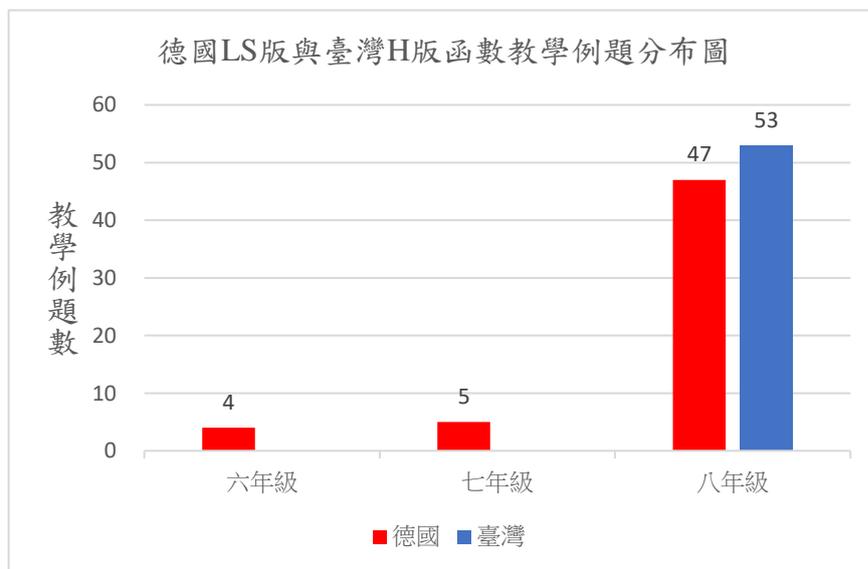


圖 5-3 德國 LS 版與臺灣 H 版函數教學例題分布圖

二、教學例題之認知需求層次

圖 5-4 為德國 LS 版與臺灣 H 版線型函數與非直線對應關係教學例題比例，從此圖中可得知臺灣(87%)在線型函數教學例題比德國(66%)的比例來的高，而在非直線對應關係教學例題比例中，德國(34%)相對於臺灣(13%)有較高的比例。此圖顯示在函數對應關係上，臺灣比較著重在線型函數的對應關係，而較少提及非直線對應關係的例題與圖形；德國除了基本的線型函數的例題與圖形之外，也引進了許多非直線對應關係的例子來教導學生理解函數的定義與所呈現的函數圖形。

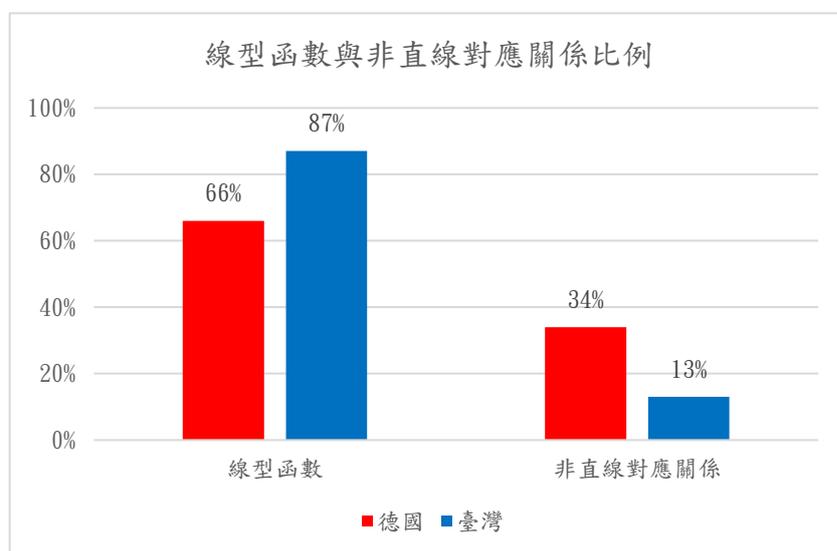


圖 5-4 德國 LS 版與臺灣 H 版線型函數與非直線對應關係比例

圖 5-5 為德國 LS 版與臺灣 H 版教學例題之認知需求層次比例，在概念理解、無連結的程序性問題，有連結的程序性問題與做數學的問題中，德國 LS 版與臺灣 H 版的教學例題皆以「無連結的程序性問題」為最多，而德國 LS 版與臺灣 H 版均沒有做數學的問題。臺灣(32%)在概念理解的教學例題比例比德國(14%)高，但臺灣(17%)在有連結的問題教學例題比例比德國(23%)少。可見臺灣 H 版可能比較在乎學生「知道」什麼，而德國 LS 版比較在乎學生「能做」什麼。

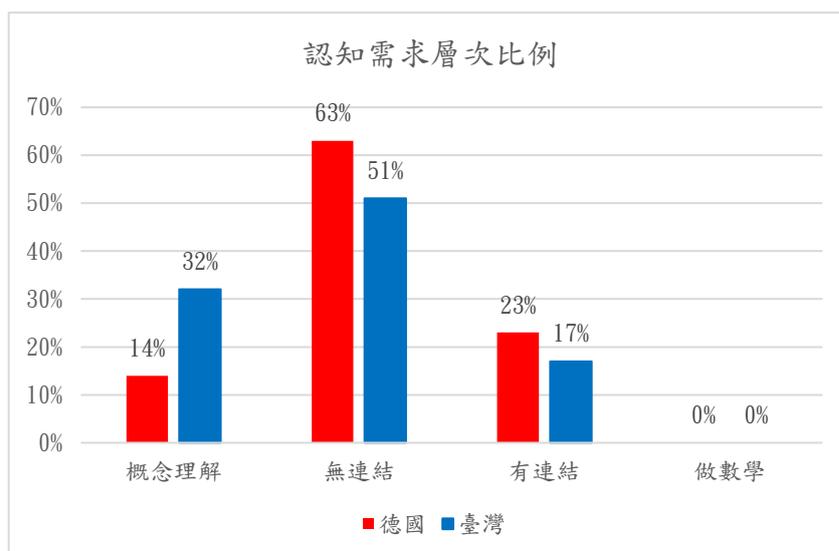


圖 5 - 5 德國 LS 版與臺灣 H 版教學例題之認知需求層次比例

三、函數單元教材編排順序

由第四章第三節的結果可以得知，德國擅長使用圖表來呈現函數概念，也很自然地將坐標平面與函數繪圖器融入在函數單元裡，並且在線型函數中加入截距與斜率的概念，利用截距與斜率求出現線型函數方程式。除了斜率，德國還告訴學生根的概念，函數 f 的每個根都是方程式 $f(x) = 0$ 的解。

表 5-1 為德國 LS 版與臺灣 H 版函數單元編排順序表，根據表 5-1 結果顯示，以線型函數教材順序來說，可以看出德國 LS 版教材分散六至八年級，臺灣 H 版則集中在八年級。由此推知德國 LS 版線型函數教材隨著年級提升將基本架構加深加廣，而臺灣 H 版線型函數教材則在八年級集中教學。

表 5 - 1 德國 LS 版與函數 H 版單元編排順序表

年級	德國 LS 版	臺灣 H 版
六年級	8. 百分比計算與圖形 8-6 兩個變數用於坐標軸	
七年級	3. 代數式的化簡 3-4 自變數與應變數	

八年級	2. 函數	2. 線型函數 2-1 變數與函數 2-2 線型函數與圖形
	2-1 明確對應的函數	
	2-2 函數和函數式	
	2-3 函數與圖形：根與斜率	
	3. 線型函數	
	3-1 線型函數	
	3-2 函數式的規定	
	3-3 線型函數與方程式	
	6. 分數型有理函數	
	6-1 分數型有理函數的性質	

四、其他單元與線型函數的連結分析

表 5-2 為德國 LS 版與臺灣 H 版其他單元與線型函數的連結單元表，由第四章第四節的結果可以得知，德國 LS 版五年級時就開始介紹直角坐標平面，並自然地將坐標平面融入在之後的任何單元裡。在六年級與七年級開始介紹兩個變數用於坐標軸以及自變數與應變數的定義。德國在「正比」單元提到正比方程式與正比對應關係，並且在「函數和圖形：根與斜率」單元中提到以方程式 $y = mx$ 做 y 與 x 的比值為 m 來引導出正比函數 $f: x \mapsto mx$ ，並且德國在正比單元中有引入兩變數對應關係的符號表示方式，在課文中以「 $x \mapsto M$ 」來表示「 x 對應 M 」。

德國開始正式進入函數單元後，介紹函數關係使用大量的直角坐標平面圖來表示兩變數的對應關係與所呈現的方程式圖形，為了定義明確對應的關係，以「 $x \mapsto y$ 」來表示每一個自變數 x 都恰有一個應變數 y 與它對應，課文中也有說明常見的函數相關名詞，在此也介紹了定義域與值域的概念

德國 LS 版在線型函數單元中提到當 x 增加 1 單位，對應的 y 增加 m 單位，從直線上一點，向右 1 單位的水平線段，與直線所形成的三角形稱為斜率三角形，藉以推

導線型函數中斜率的概念。另外德國 LS 版也有提到函數圖形與 x 軸的交點是一個特殊點，此特殊點的 x 坐標稱為此函數 f 的根，函數 f 的每個根都是方程式 $f(x) = 0$ 的解，而臺灣在高中才提到根與斜率的概念，由此可見德國比臺灣較早學到根與斜率的概念。

德國 LS 版在八年級教完線型函數單元後進入二元一次方程式，提到除了找出線上兩個點畫直線，也可將二元一次方程式轉換成線型函數 $y = mx + t$ 的形式，並且使用斜率與 y 截距找出兩個點畫出直線。

表 5-2 德國 LS 版與臺灣 H 版其他單元與線型函數的連結單元表

年級	德國 LS 版	臺灣 H 版
五年級	直角坐標平面	
六年級	兩個變數用於坐標軸	
七年級	變數與代數式	以符號代表數
	自變數與應變數	一元一次方程式
	方程式	二元一次方程式
		直角坐標平面
		二元一次方程式的圖形
		正比
八年級	正比	變數與函數
	函數	線型函數與圖形
	函數圖形：根與斜率	
	線型函數	
	二元一次方程式	

第二節 建議

根據本研究之研究結果，研究者認為臺灣 H 版數學教科書較為缺乏並建議教材設計者可參考之內容：

一、 認知需求層次內容

臺灣 H 版教科書在認知需求層次分類之無連結的程序性問題與有連結的程序性問題比例中，均比德國 LS 版少，而概念理解的問題比德國 LS 版高出很多，研究者建議臺灣 H 版能增加無連結與有連結的程序性問題比例，使臺灣學生能夠接觸到更多種類題目。另外德國 LS 版與臺灣 H 版在教科書「教學例題」中均無出現做數學的問題，為什麼兩版在教學例題均未出現做數學的問題？研究者認為也許是因為在教學例題中，學生剛開始接觸新的概念，還沒經過大量的程序性題目來熟練數學概念，可能沒辦法那麼快熟悉相關數學知識以及馬上具備探索與研究該知識概念的能力，研究者建議可以嘗試在教學例題中增加做數學題目的類型，提升學生的創造力與推理能力，提高學生在認知需求層次的發展。

二、 開放式討論之問題

德國 LS 版在函數單元中課文引導例題出現許多開放式問題讓學生思考與創造，臺灣教科書則沒有開放式討論的問題，大多為探索活動，而探索活動的題型也屬於封閉性問答，研究者建議臺灣教科書可以增加一些有趣且多元的開放式問答讓學生思考與創造，提升學生的創作力與推理能力。

三、 結合科技繪製函數圖形

德國 LS 版在學生學會函數的定義與描繪函數圖形後，使用函數繪圖器描繪函數圖形並計算何時出現最小值，讓學生使用資訊科技來更了解函數圖形的變化，也利用科技來計算估計值，充分將計算機與數學課程結合。而臺灣教科書在函數單元讓學生有描點繪圖的經驗後，接著是以代數題目加強練習，未將計算工具和函數結合應用。

在「素養導向系列：中學數學教材教法」(單維彰(主編)，謝豐瑞，鄭章華，吳

汀菱，曾明德，2020) 中，提到數學教學應培養學生正確使用工具的素養，計算工具應該自然地融入數學課程中，包括試算表與數學軟體等計算工具，除了可以讓學生從事試驗與探究，也能讓學生建立真正實數的數感。研究者認為教師在學生有描點繪圖的經驗後，可以使用電腦繪圖加強觀察函數圖形的特徵，並解釋其意涵，使學生更理解函數的意義，能增進學生數學與計算機的能力應用，也提供機會讓學生建立真正實數的數感。

四、 直角坐標平面與斜率

德國 LS 版在五年級時就已經開始使用直角坐標平面，並融入在之後各個單元內，以至於在六年級時就開始進入兩變數之間的關係單元，研究者建議臺灣教科書也可以在國小五年級或六年級就引進直角坐標平面並且先學習簡單的變數之間的關係，有助於後續函數概念的學習發展。

而德國 LS 版在線型函數單元中就已經提到斜率的概念，並且利用斜率的概念求出線型函數的方程式，而臺灣教科書斜率的概念則在高中一年級才提到。研究者建議在國中八年級的線型函數單元中可以增添斜率的概念，幫助學生利用斜率的概念解決更多線型函數的問題。

五、 坐標圖表融入函數單元

德國從六年級開始使用坐標圖表來呈現兩變數之間的關係，到八年級後頻繁的使用坐標圖表表示複雜的函數圖形，即使沒有教二次函數或是有理函數等概念，德國還是將這些函數的圖表呈現出來，研究者認為呈現函數圖表可以讓學生了解各式各樣的變數關係，也可以使用電腦繪圖器幫助學生理解函數方程式的圖形特徵。研究者建議臺灣教科書也可以自然地放入坐標圖表，讓學生提早發現函數圖形的特徵，並搭配電腦繪圖器繪製圖形，使學生對函數不再覺得抽象，能對函數有真正的數感。

六、 LS 版螺旋式課程

本次研究可以發現德國在五年級開始學習直角坐標平面，六年級時將兩個變數使用坐標軸來呈現，並且之後的單元都「自然」的呈現坐標軸。而到了七年級學習自變

數與應變數的概念時，雖然沒有提到二次函數的定義與概念，但德國把二次函數的圖形「自然」地呈現出來，並直接告訴學生自變數與應變數的數對都能表示坐標軸中的一個點，而這些點的集合可以形成此函數的圖形。到了八年級開始正式介紹函數概念與定義，德國因「自然」使用電腦繪圖工具，二次函數的繪圖又「自然」地呈現出來。雖然二次函數是九年級的課程，但德國早在七、八年級就埋下伏筆。而在線型函數單元中學到線型函數 $y = mx + t$ 的形式，以及斜率與截距的概念，到了二元一次方程式單元又再拿出來使用並畫出圖形。研究者還發現在線型函數單元求解交點時（圖 4-24），因為 y 坐標相同，德國也悄悄的使用代入消去法來求出 x 坐標，而到了第四章方程與方程組，第四節才開始正式介紹「代入消去法」。由此得知，德國每個單元幾乎都在埋伏筆，相當重視螺旋式的編排課程。

相較 H 版的函數概念與線型函數單元則被集中在八年級教學。研究者認為集中式教學有助於當下可以大量進程序性操作的練習，使其對數學概念精熟。以研究者在國中教學現場的經驗發現，由於函數概念較為抽象，學生在八年級下學期學完函數之後，後面的單元就再也沒有接觸到函數的概念，直到九年級下學期學二次函數才又重新學習函數的概念，九年級的學生在二次函數中對函數的定義感到陌生，已經忘得一乾二淨。也許是因為沒有複習而遺忘已學過的概念，教師需再重頭教學一遍，故研究者猜測臺灣教師較不喜歡集中式教學。

研究者認為螺旋式課程編排有助於幫助學生將已學過的內容慢慢內化成長期記憶，並使課程持續加深加廣，透過螺旋式的學習，學生能不斷復習所學，並能逐步將所學融會貫通，形成數學素養。研究者建議臺灣函數教科書也能嘗試以螺旋式的編排方式，效仿德國在六、七年級就引進一些基本的函數概念，並結合日常生活，等到八年級正式學習函數時，學生也許會認為函數不再那麼抽象，而是「自然」發生在日常生活中。

七、函數對應關係的表示方式

本次研究可以發現德國 LS 版在「正比」單元中，引入兩變數對應關係的符號

「 $x \mapsto M$ 」來表示對應關係，之後在「明確對應的函數」單元中，以「 $x \mapsto y$ 」來表示每一個自變數 x 都恰有一個應變數 y 與它對應，這樣的對應關係稱為「函數」。而到「函數和函數式」單元中，以表 4-8 呈現常見的函數相關名詞，其中函數 f 就以「 $x \mapsto 0.5x^2 - 2$ 」來表示函數關係，從這裡可以看到德國使用了「映射」(maps to) 符號，這是我國在國中和高中都沒有介紹的符號；但是大學的教科書裡常見。這種表達方式對應了函數的一種概念心像，就是「函數是把輸入 (input) 變成輸出 (output) 的機制」，而 H 版介紹函數概念時則是用輸送帶的圖來表示輸入至輸出的概念，如圖 4-29。而在表 4-8 也可以看到德國細分「函數式」、「函數方程式」的溝通方式，在臺灣也是少見的。研究者建議未來數學課綱也可以參考德國的映射符號、函數式與函數方程式的表示方式，映射符號就在正比單元與函數單元中自然地使用，讓學生理解函數輸入至輸出的概念，而函數式與函數方程式的表示方式也能使學生自然區分函數與方程式的差別。

參考文獻

- 宋嘉寧 (2021)。中國大陸與臺灣中學教材之平面幾何與坐標幾何分析比較。國立中央大學數學系碩士論文。取自 <https://hdl.handle.net/11296/y96738>
- 林致宇 (2021)。德國與臺灣七年級數學素養教科書一元一次方程式單元之分析。國立嘉義大學數理教育研究所碩士論文。取自 <https://hdl.handle.net/11296/b5p8a7>
- 康育綺 (2019)。德國初中階段的統計教科書研究。國立中央大學數學系碩士論文。取自 <https://hdl.handle.net/11296/gffu84>
- 張玟溢 (2020)。臺灣、美國、新加坡國中函數主題教材之比較研究。國立嘉義大學數理教育研究所碩士論文。取自 <https://hdl.handle.net/11296/ufkmbj>
- 教育部 (2014)。十二年國民基本教育課程綱要-總綱。台北市：教育部。
- 教育部 (2018)。十二年國民基本教育課程綱要-數學領域。台北市：教育部。
- 陳豐詣 (2024)。台灣和德國在國中二次函數數學素養內容之比較研究。國立嘉義大學數理教育研究所碩士論文。取自 <https://hdl.handle.net/11296/btj44y>
- 單維彰 (主編)，謝豐瑞，鄭章華，吳汀菱，曾明德 (2020)。素養導向系列：中學數學教材教法。台北市：教育部。
- 黃雅萱 (2020)。德國六至九年級數學教科書機率單元之內容分析。國立中央大學數學系碩士論文。取自 <https://hdl.handle.net/11296/8sgk4w>
- 鄭夙君 (2014)。台灣、大陸與新加坡國中函數單元內容之研究。國立嘉義大學師範學院數理教育研究所碩士論文。取自 <https://hdl.handle.net/11296/jszvg7>
- 鎖鳳琴 (2017)。臺灣、新加坡與芬蘭國中數學教科書函數單元教材之比較。國立嘉義大學師範學院數理教育研究所碩士論文。取自 <https://hdl.handle.net/11296/ry9cf5>
- Kultusministerkonferenz (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss. Retrieved from https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf

National Assessment of Educational Progress. (2013). What does the NAEP mathematics assessment measure? Retrieved from

<https://nces.ed.gov/nationsreportcard/mathematics/whatmeasure.aspx>

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An 87 analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33 ,455-488.

Stein, M.K., Smith, M.S., Henningsen, M.A. & Silver, E.A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. NY: Teacher College Press

附錄

附錄一

為了節省篇幅，將 LS 版函數單元教學例題題目整理於電子檔，網址如下：
<https://shann.idv.tw/Teach/mathedu/zeng2024.pdf>

附錄二

主題類目分類結果

主題	德國 LS 版題目	臺灣 H 版題目
線型函數	7-3-4-1(a)	8-2-1-1 (1)
	7-3-4-1(b)	8-2-1-1 (2)
	7-3-4-1(c)	8-2-1-1 (3)
	7-3-4-2	8-2-1-5 (2)
	8-2-2-2 (a-1)	8-2-1-6
	8-2-2-2 (c-1)	8-2-1-7 (1)
	8-2-2-2 (d)	8-2-1-7 (2)
	8-2-2-2 (e)	8-2-1-8 (1)
	8-2-3-1 (a)	8-2-1-8 (2)
	8-2-3-1 (b)	8-2-1-9
	8-2-3-2 (a)	8-2-1-10
	8-2-3-2 (b)	8-2-1-11
	8-2-3-2 (c)	8-2-1-12
	8-2-3-3 (a)	8-2-1-13 (1)
	8-2-3-3 (b)	8-2-1-13 (2)
	8-2-3-4	8-2-1-14 (1)
	8-3-1-1 (a)	8-2-1-14 (2)
	8-3-1-1 (b)	8-2-2-1
	8-3-1-1 (c)	8-2-2-2
	8-3-1-2 (a)	8-2-2-3
	8-3-1-2 (b)	8-2-2-4 (1)
	8-3-1-3	8-2-2-4 (2)
	8-3-1-4	8-2-2-5
	8-3-2-1	8-2-2-6 (1)
	8-3-2-2 (a)	8-2-2-6 (2)
	8-3-2-2 (b)	8-2-2-7 (1)
	8-3-2-3	8-2-2-7 (2)
	8-3-2-4	8-2-2-8
	8-3-3-1 (a)	8-2-2-9 (1)
	8-3-3-1 (b)	8-2-2-9 (2)
	8-3-3-1 (c)	8-2-2-10
	8-3-3-2 (a)	8-2-2-11 (1)
	8-3-3-2 (b)	8-2-2-11 (2)
	8-3-3-2 (c)	8-2-2-12 (1)

	8-3-3-2 (d) 8-3-3-3 8-3-3-4	8-2-2-12 (2) 8-2-2-13 (1) 8-2-2-13 (2) 8-2-2-14 (1) 8-2-2-14 (2) 8-2-2-14 (3) 8-2-2-15 (1) 8-2-2-15 (2) 8-2-2-16 (1) 8-2-2-16 (2) 8-2-2-17
非直線對應關係	6-8-6-1 (a) 6-8-6-1 (b) 6-8-6-1 (c) 6-8-6-2 7-3-4-3 8-2-1-1 8-2-1-2 (a) 8-2-1-2 (b) 8-2-1-2 (c) 8-2-1-3 8-2-1-4 8-2-2-1 (a) 8-2-2-1 (b) 8-2-2-1 (c) 8-2-2-2 (a-2) 8-2-2-2 (c-2) 8-2-2-3 8-2-3-5 (a) 8-2-3-5 (b)	8-2-1-2 (1) 8-2-1-2 (2) 8-2-1-3 8-2-1-4 8-2-1-5 (1) 8-2-2-18 8-2-2-19 (1) 8-2-2-19 (2)

德國 LS 版之認知需求層次分類結果

認知需求層次 主題	概念理解問題	無連結的 程序性問題	有連結的 程序性問題	做數學的 問題
線型函數	8-2-2-2 (a-1) 8-3-1-1 (b) 8-3-3-1 (a)	7-3-4-1(a) 7-3-4-1(c) 8-2-2-2 (c-1) 8-2-2-2 (d) 8-2-2-2 (e) 8-2-3-2 (a) 8-2-3-2 (b) 8-2-3-2 (c) 8-2-3-4 8-3-1-1 (c) 8-3-1-2 (a) 8-3-1-2 (b) 8-3-1-3 8-3-2-2 (a) 8-3-2-2 (b) 8-3-2-3 8-3-2-4 8-3-3-2 (a) 8-3-3-2 (b) 8-3-3-2 (c) 8-3-3-2 (d) 8-3-3-3 8-3-3-4	7-3-4-1(b) 7-3-4-2 8-2-3-1 (a) 8-2-3-1 (b) 8-2-3-3 (a) 8-2-3-3 (b) 8-3-1-1 (a) 8-3-1-4 8-3-2-1 8-3-3-1 (b) 8-3-3-1 (c)	
非直線對應關係	6-8-6-1 (a) 6-8-6-1 (b) 6-8-6-1 (c) 6-8-6-2 8-2-2-2 (a-2)	7-3-4-3 8-2-1-2 (a) 8-2-1-2 (b) 8-2-1-2 (c) 8-2-1-3 8-2-2-1 (a) 8-2-2-1 (b) 8-2-2-1 (c) 8-2-2-2 (c-2) 8-2-2-3 8-2-3-5 (a)	8-2-1-1 8-2-1-4	

		8-2-3-5 (b)		
--	--	-------------	--	--

臺灣函數教科書之認知需求層次分類結果

認知需求層次 主題	概念理解問題	無連結的 程序性問題	有連結的 程序性問題	做數學的 問題
線型函數	8-2-1-1 (1) 8-2-1-1 (2) 8-2-1-1 (3) 8-2-1-5 (2) 8-2-1-6 8-2-2-7 (1) 8-2-2-7 (2) 8-2-2-15 (1) 8-2-2-16 (1)	8-2-1-7 (1) 8-2-1-7 (2) 8-2-1-8 (1) 8-2-1-8 (2) 8-2-1-9 8-2-1-10 8-2-1-11 8-2-1-12 8-2-2-1 8-2-2-2 8-2-2-3 8-2-2-4 (1) 8-2-2-4 (2) 8-2-2-5 8-2-2-6 (1) 8-2-2-6 (2) 8-2-2-8 8-2-2-9 (1) 8-2-2-9 (2) 8-2-2-10 8-2-2-11 (1) 8-2-2-11 (2) 8-2-2-12 (1) 8-2-2-12 (2) 8-2-2-13 (1) 8-2-2-13 (2) 8-2-2-14 (2)	8-2-1-13 (1) 8-2-1-13 (2) 8-2-1-14 (1) 8-2-1-14 (2) 8-2-2-14 (1) 8-2-2-14 (3) 8-2-2-15 (2) 8-2-2-16 (2) 8-2-2-17	
非直線對應關係	8-2-1-2 (1) 8-2-1-2 (2)			

	8-2-1-3 8-2-1-4 8-2-1-5 (1) 8-2-2-18 8-2-2-19 (1) 8-2-2-19 (2)			
--	---	--	--	--