

數學「不確定性」教材與評量之分析規準

許哲毓

國立中央大學學習與教學研究所博士候選人

單維彰

國立中央大學師資培育中心與數學系

一、前言

早在民國 94 年，中小學數學科課程綱要評估與發展研究就發現國外的不確定性教育時程規劃比臺灣早，且內容較豐富（陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛，2005）。然而九年一貫數學領域 97 課綱在這方面的改變不大，以致於民國 101 年統計教育研究—人才培育與資訊整合總計畫之成果報告，仍認為我國的數學教育未提供學生理解資料變異性和不確定性的學習機會（林福來，2012）。乃至於十二年國民基本教育數學領域綱要之前導研究，為新課綱提出了八項建議，其中第一項就是「不確定性與數據處理」（林福來、單維彰、李源順、鄭章華，2013）。即便 108 數學領域課程綱要將原本集中於 9 年級的統計教學，改分布於 7、8、9 年級，但是整體內容並無改變，而機率內容也幾乎沒有變動，除了在 6 年級增加「可能性」條目以外，仍然僅偏重古典機率，且集中於 9 年級（教育部，2018）。也就是說，陳宜良等人十三年前發現的我國不確定性與數據處理的教育狀況，至今改變不多。

因應以上狀況，本文作者團隊打算長期投入關於「不確定性」教育的課程與教學研究。為了支援此系列的研究，本文提出一套規準，用以分析「不確定性」的教材與評量。此規準分為知識和認知兩個向度，借鑑「不確定性」之教育內涵與大型教育評量而設計。本文介紹此規準之後，運用它來分析國際數學與科學教育成就趨勢調查（Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS）的「資料與機率」試題，成功顯示該國際評量在西元 1999 至 2011 年之間，在前述主題的評量重點與風格，發生了明顯的改變。

二、不確定性的內涵

經濟合作暨發展組織（Organisation for Economic Co-operation and Development, OECD）將機率與統計概括在「不確定性」（uncertainty）的概念下，並將之定義為「理解生活中各種造成變異的成因、測量時所隱含的不確定性，具有量化和解釋變異的能力，以及處理機率統計問題的能力。」（臺灣 PISA 國家研究中心，2013）。本文採用 OECD 的用語，將數學教育中關於數據處理、統計與機率的內容，概稱為「不確定性」。

在機率方面，本文採用 Shaughnessy（1992）統整的四種類型：古典機率（classical probability），頻率機率（frequentist probability），主觀機率（subjective probability），和形式機率（formal probability）。因為中學階段不涉及形式機率，故不納入規準。古典機率與頻率機率的說明，請看表一，至於主觀機率的意思是以個人信念或既有經驗而決定其值，它可以隨著新訊息的出現而調整其判斷，而後者又可以用來解釋人們獲得新資訊之後，如何合理化自身信念的形成和改變（Borovcnik, Bentz & Kapadia, 1991）。因為主觀機率在完整機率思維中的重要性，108 數學領綱在高中階段將其引入，所以本文也將它納入規準。

在統計方面，Garfield、delMas 與 Chance（2003）提出統計認知分為統計知識、統計推理、統計思考等三大類型，並延伸其所屬概念，多達 17 項。李健恆與楊凱琳（2012）曾以此架構分析我國教科書的統計主題，證實它們也適合用來分析我國的教材。但是前述規準的細項偏多，且缺少機率主題，因此本文在執行實驗分類之後，予以酌量整併成三個細項，並用 Shaughnessy 統整的機率類型補足機率主題的三個概念細項，組成本規準的知識向度，定義於表一。

三、大型教育評量

在國際上，大型教育評量都有不確定性的主題。如 TIMSS 的「資料與機率」、國際學生能力評量計畫（the Programme for International Student Assessment, PISA）的「不確定性與資料分析」、以及美國國家教育進展評測（National Assessment of Educational Progress, NAEP）的「統計及機率」，雖然名稱不同，但其內涵皆為本文所謂的「不確定性」。在此主題下，TIMSS 將其評量內容劃分為資料的整理與呈現、數據的詮釋、以及機率等三個單元，PISA 劃分為數據資料的：產生、分析與視覺化呈現、機率或趨勢、以及推論等四個單元，至於 NAEP 則粗分為機率和統計兩單元。

本文提出的規準，將從 TIMSS 和 PISA 的公告試題中，挑選部分細目的代表性範例，詳於第四節。另外，本規準的認知向度概念細項，是從 NAEP 的評量架構修訂而來，它們是：概念理解、程序執行、解題思考。概念理解是指學生能以記憶性的知識來辨識、轉換數學概念或原理，並以文字語言說明之。程序執行是指在演算的過程中，能選擇適當的公式執行解題，並能以紙筆正確地計算，檢驗結果的正確性。解題思考是指從資料中逐漸辨識與組織，形成數學問題，同時運用相關數學知識，採取適當的運算來得到答案，並能驗證這些答案的合理性與正確性（林原宏，2013；NAEP, 2013）。我國大學入學考試中心，以及臺灣學生學習成就評量資料庫，也都採用上述認知層次進行數學試題的分類（林福來，1994；蕭儒棠、吳慧珉等，2017）。

本規準直接沿用 NAEP 的概念理解、程序執行兩個細項，但是為了更有效地分析不確定性課程的內容，把解題思考細分為「數學思維的解題思考」與「不確定性思維的解題思考」，組成認知向度的四個概念細項，詳述於第四節。分解「解題思考」的緣由之一是 Schield（2004）再次界定統計素養，提出應用不確定性思維更勝數學思維的論述，並綱舉以下三大方向：著重在解讀表格與圖表，更甚於樣本分布；著重在社會政策中的統計論點品質，更甚於最適於數據的統計模型選擇；著重在如何用統計來支持論點，更甚於統計方法的數學理論。這樣的見解符合現代社會所需之能力，本文亦據以作為對比「不確定思維」與「數學思維」之參照，定義於表二。

四、「不確定性」課程的分析規準

前兩節說明了「不確定性」知識與認知向度之獨特性，有別於一般數學。若我們想深入「不確定性」課程內涵的研究，則需要一套專門的規準，而本文提出一套這樣的分析規準。本規準分為知識向度：主觀機率、古典機率、頻率機率、統計量、圖表判讀、圖表製作，與認知向度：概念理解、程序執行、數學思維的解題思考、不確定性思維的解題思考。各概念細項說明於表 1 和表 2。

表 1 「不確定性」知識向度各概念細項的定義

概念	定義
主觀機率	指一個事件發生的機率由某人決定，包括設計上的安排設定，或者根據相信的程度而評定。
古典機率	假設樣本空間 S 中的每一個樣本出現機會均等，則事件 A 發生的機率 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ，其中 $n(*)$ 表示樣本個數。
頻率機率	用實驗設計所觀察的事件發生相對次數，當作事件發生的機率。
統計量	對數據進行運算而獲得統計知識，不涉及圖表者。
圖表判讀	對圖表進行報讀、詮釋和判斷而獲得統計知識。
圖表製作	將原始數據或統計量依指定的或適用的圖表繪製出來。

表 2 「不確定性」認知向度各概念細項的定義

認知向度	定義
概念理解	能以記憶性的知識來辨識、轉換機率或統計的概念或原理。
程序執行	能選擇適當的機率或統計定義、公式執行計算，能判讀圖表呈現的資訊，能製作指定的圖表，並能檢驗結果的正確性。
數學思維的解題思考	遭遇不確定的情境時，能組織機率或統計的知識，根據定義、定理或公式做「確定」的演算或推論，以解決問題。
不確定性思維的解題思考	遭遇不確定的情境時，能組織機率或統計的知識，必要時輔以計算，在「不確定」的前提之下做出合理的判斷或決策。

礙於篇幅限制，我們不為以上概念一一舉例，僅就本規準之較獨特細目，用 TIMSS 和 PISA 的試題舉例說明。

例一：古典機率、不確定性思維的解題思考。取自「TIMSS 2011 八年級數學試題」（臺灣師範大學科學教育中心，2011，頁 7），引述如下。

一部機器內有 100 顆糖果，當手桿轉一次時，機器就會掉出一顆果。此機器中藍色、粉紅色、黃色與綠色糖果的數量都相同，將它們混合在一起。美美轉一次手桿，得到粉紅色糖果。小智是下一個要轉手桿的人。請問，小智會得到粉紅色糖果的可能性為何？

1. 可以確定他得到的糖果是粉紅色。
2. 他得到的機會比美美的大。
3. 他得到的機會和美美一樣大。
4. 他得到的機會比美美小。

此題特別強調「混合在一起」顯示它屬於古典機率類型。在認知層次上，此題採用較大的數據（100 顆糖果），故判斷不是概念理解；題幹沒有明顯的演算提示，故判斷不是程序執行。因為待答選項刻意不使用數值，顯示提問的用意不在於古典機率的數學計算，所以歸類為不確定性思維的解題思考。

例二：統計量、不確定性思維的解題思考。取自「PISA 數學樣本試題」（臺灣 PISA 國家研究中心，2015，頁 62），引述如下。

在 Zedland 國家，為了要瞭解這次選舉的總統支持度，進行了一些民意調查。有四家報社各自進行全國性的民調。這四家報社的民調結果如下：

1. 報社 1：36.5%（在 1 月 6 日進行民調，隨機選取 500 個具有投票權的國民作為樣本）
2. 報社 2：41.0%（在 1 月 20 日進行民調，隨機選取 500 個具有投票權的國民作為樣本）
3. 報社 3：39.0%（在 1 月 20 日進行民調，隨機選取 1000 個具有投票權的國民作為樣本）
4. 報社 4：44.5%（在 1 月 20 日進行民調，選取 1000 個進行電話投票的讀者）

假如選舉是在 1 月 25 日，哪一家報社的民調結果最能夠預測總統的支持度？請給兩個理由來說明你的答案。

此題沒有圖表，純以文字描述數據資料，顯示它屬於統計量類型。在認知層次上，此題是根據已知數據進行推論，故判斷不是概念理解亦非程序執行。且問題是選定某報社具備最佳預測效果的論述，而非統計量的數學推論，所以歸類為不確定性思維的解題思考。

例三：統計量、數學思維的解題思考。取自「TIMSS 2011 八年級數學試題」（臺灣師範大學科學教育中心，2011，頁 8），引述如下。

真實漢堡公司擁有 5 家餐廳，這 5 家餐廳所雇用的員工人數分別為：12、18、19、21、30 人。

1. 這 5 家餐廳員工人數的平均數為何？
2. 這 5 家餐廳員工人數的中位數為何？
3. 如果有 30 位員工的這家餐廳增加它的員工人數到 50 人，這樣對中位數和平均數分別有怎樣的影響？

此題為題組型的題目，以最高層次的子題作為整題的歸類。題幹沒有圖表，純以文字描述數據資料，顯示它屬於統計量類型。在認知層次上，雖然 A、B 子題為計算統計量的程序執行，但 C 子題明顯超越程序執行的層次。C 子題的解題思維是根據中位數、平均值的數學定義做確定的推論，所以歸類為數學思維的解題思考。

五、TIMSS「資料與機率」評量試題的風格轉變

為了試驗本文所設計的規準，對不確定性教材或試題的分析效力，作者將 TIMSS 公告的「資料與機率」評量試題，按照本文規準重新分類。因為 PISA 僅公布了示範例題，而非完整的真實試題，缺乏可信的代表性，所以不作分析。

TIMSS 公布的「資料與機率」試題數量如下：西元 1999 年 10 題、2003 年 11 題、2007 年 10 題、2011 年 12 題，總共 43 題，即為本節的分析樣本。使用第四節的規準重新歸類 TIMSS 的相關試題之後，能夠呈現出 TIMSS 在西元 1999 年到 2011 年之間，在不確定性評量的題型風格上，有明顯的變化趨勢。此變化趨勢一方面可以佐證本規準的實用性，另一方面也可以視為 TIMSS 對於不確定性教育目標的看法，在那十二年間所發生的轉變。

因為篇幅的限制，而且本文的目的僅為提出一套規準，所以本文不列舉完整的分析結果，僅指出 TIMSS 「不確定性」試題風格的兩項明顯變化：

1. 在知識向度上，TIMSS 在 2007 年之前沒有「圖表製作」的題型，而 2007 年出現 1 題、2011 年出現 2 題。此現象或可解釋為對於實作能力的重視，以及為了將統計資訊轉化為頻率機率所做的準備。
2. 在認知向度上，概念理解層次的試題逐年減少，不確定性思維的解題思考題逐年增加，如圖 1。這樣的風格，凸顯「不確定性」的評量目標，逐漸從概念性的知識判斷，轉變為利用已知或解讀的數據來進行判斷或決策的能力。

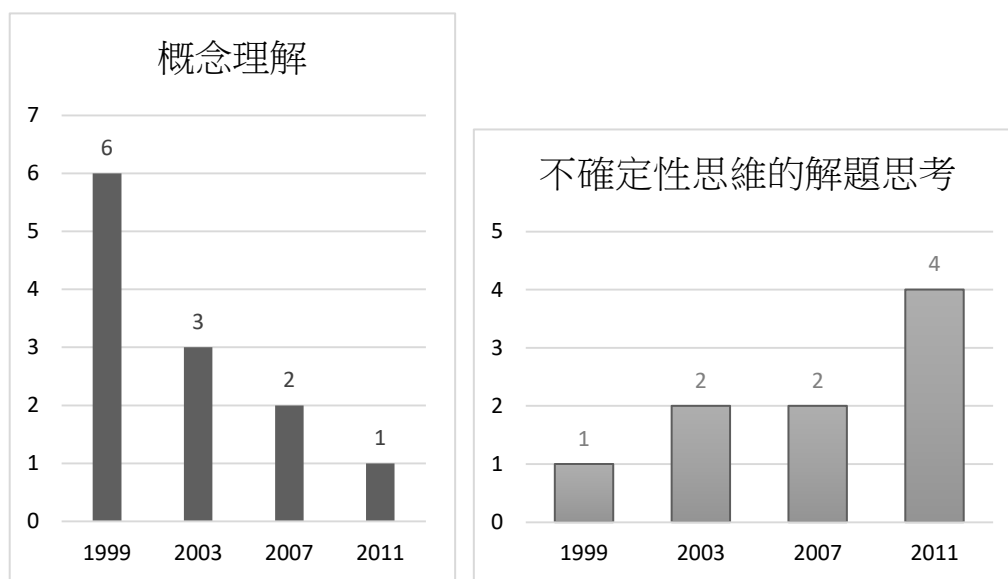


圖 1 「概念理解」與「不確定性思維的解題思考」之 12 年問題數消長

六、結語與建議

本文提出之「不確定性」分析規準，涵括了國際教育組織與作者研究團隊，對於中學階段「不確定性」課程內容在知識與認知兩個向度的主張。試用在 TIMSS 試題而發現其風格轉變，顯示此規準具備基本的實用性。本文作者團隊將依此規

準，著手新一代「不確定性」數學課程模組的開發與研究。期望這一系列的教學與課程實踐研究，能提升我國學生在「不確定性」方面的素養。此外，也歡迎數學教育同仁跟我們一起運用此規準，分析「不確定性」課程的教科書、教材與評量內容，促進「不確定性」教材與教法的創新與改良，一起豐富我國「不確定性」數學教育的內涵。

參考文獻

- 李健恆、楊凱琳（2012）。從統計認知面向與圖表理解角度分析國中數學教科書的統計內容。*教科書研究*，5（2），31-72。
- 林原宏（2013）。TASA 數學學習評量結果及補救教學。取自 <http://www.ceag.kh.edu.tw/kmsln/file.php?fid=20433>。
- 林福來（1994）。八十三年度基礎科目數學科試題研發工作計劃。臺北市：大學入學考試中心。
- 林福來（2012）。統計教育研究—人才培育與資訊整合總計畫。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告（編號 98-2511-S-003-004-M）。臺北市：國立臺灣師範大學。
- 林福來、單維彰、李源順、鄭章華（2013）。「十二年國民基本教育領域綱要內容前導研究」整合型研究子計畫三：十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究研究報告（編號：NAER-102-06-A-1-02-03-1-12）。新北市：國家教育研究院。
- 教育部（2018）。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域。臺北市：作者。
- 陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛（2005）。中小學數學科課程綱要評估與發展研究。取自 <http://www.math.ntu.edu.tw/~chern/highschoolmath/中小學數學科課程綱要評估與發展研究.pdf>。
- 臺灣 PISA 國家研究中心（2015）。PISA 數學樣本試題。取自 http://pisa.nutn.edu.tw/download/sample_papers/2009/2011_1223_mathematics.pdf。
- 臺灣師範大學科學教育中心（2011）。TIMSS 2011 八年級數學試題。取自 http://www.sec.ntnu.edu.tw/timss2011/downloads/T11_G8_M05.pdf ；
http://www.sec.ntnu.edu.tw/timss2011/downloads/T11_G8_M06.pdf。

- 蕭儒棠、曾建銘、謝佩蓉、黃馨瑩、吳慧珉、陳冠銘、蔡明學、謝明娟、謝進昌（2017）。大型教育調查研究實務：以 TASA 為例。新北市：國家教育研究院。
- Borovcnik, M., Bentz, H. J., & Kapadia, R. (1991), A probabilistic perspective, In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education*(pp. 27-71), Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Garfield, J., delMas, R., & Chance, B. (2003). *The web-based ARTIST: Assessment resource tools for improving statistical thinking project*. Paper presented at AERA annual meeting. Retrieved from https://app.gen.umn.edu/artist/articles/AR EA_2003.pdf
- National Assessment of Educational Progress. (2013). *What does the NAEP mathematics assessment measure??* Retrieved from <https://nces.ed.gov/nationsreportcard/mathematics/whatmeasure.aspx>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2009). *PISA 2009 Assessment framework: Key competencies in reading, mathematics and science*. Paris: OECD Publications.
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: National Council of Teachers of Mathematics and MacMillan.

