

作為數學家與數學教育家的李新民校長
單維彰·民國一一四年九月十七日

讀者都知道李新民校長是數學博士、數學教授，本文想要向大家介紹李校長的數學，以及李校長在數學與數學教育上的貢獻，並補述李校長的數學經歷可能有助於中大校務的幾個故事。既然本文旨在介紹李校長的數學面向，我們就從數學開始吧。

無限加總：李新民校長的數學新視野

李新民校長的英文名字是 Shing-Meng Lee，他在民國五十年獲得美國康乃爾大學的數學博士學位，指導教授為艾格紐（Ralph Agnew，1900–86），論文題目為 *On a Two-Parameter Family of Summation Methods*；此文不曾以中文印行，它的要義是推廣一個類型的加總方法：從一個參數的系列方法推廣到兩個參數。除了呈遞一份博士論文給康乃爾大學收存以外，李校長將此作獻給他的數學啟蒙師與人生導師：周鴻經校長，發表在周校長逝世五周年的紀念文集中（Lee，1962）。

所謂「加總」就是把一些數據加起來，這誰不會呢？可李校長研究的是無窮多個數的加總。例如自然組高三學生可能就知道的

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \quad (1)$$

讀者應該都能意會刪節號（…）的意思，所以不再詳加解釋。像算式 (1) 那樣的加總很早就有了，它是現代科技的基石之一，在李校長出生之前，它已經是高等數學的入門基礎，而且有公式可以算出總和。¹

李校長要加總的，是那些在「標準」意義之下無法加總的無窮多個數；在標準的大學一年級微積分課本裡，稱它們為「發散」，例如

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (2)$$

就是發散的：在標準意義之下，不能加總。對於發散的加總問題，數學家並不放棄，他們認為不該一竿子打翻一條船。數學家發現許多所謂發散的加總，其實有「非標準」而且「說得通」的理由，決定它們的總和。更重要的是，這些總和是「有用」的，能用來解決數學、物理和其他科學的疑難雜症。

在算式 (2) 裡面不只有加號，還有減號；這麼說來 (2) 好像不是單純的加總。但數學早就把「減」等化為「加負」，所以 (2) 式也可以改寫為

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots \quad (3)$$

¹ 本文末附註提供稍多相關的科普數學。

因此它是一個貨真價實的加總算式。

$$1-1+1-1+1-1+\dots = \frac{1}{2}$$

這個新的加總方法打開了一扇門，很多以前認為不能加總的規則性數據，變得可以加總了，令人驚訝的結果層出不窮。舉一個最「戲劇性」的例子：

$$1+2+3+4+5+6+\dots = -\frac{1}{12} \quad (4)$$

所有人都能欣賞它的「啟發式」計算過程。首先，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 1-1+1-1+1-1+\dots \\ &= 1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\dots \\ &= 1+(1-2)+(3-2)+(3-4)+(5-4)+(5-6)+\dots \\ &= 1+1-2-2+3+3-4-4+5+5-6-\dots \\ &= 2\times(1-2+3-4+5-6+\dots) \end{aligned}$$

所以

$$1-2+3-4+5-6+\dots = \frac{1}{4}$$

然而

$$\begin{aligned} &(1+2+3+4+5+6+\dots) \\ &- (1-2+3-4+5-6+\dots) \\ &= 1-1+2-(-2)+3-3+4-(-4)+5-5+6-(-6)+\dots \\ &= (2+2)+(4+4)+(6+6)+(8+8)+(10+10)+\dots \\ &= 4\times(1+2+3+4+5+6+\dots) \end{aligned}$$

所以

$$3\times(1+2+3+4+5+6+\dots) = -(1-2+3-4+5-6+\dots) = -\frac{1}{4}$$

於是得到等式 (4) 的結論。

所有正整數的加總，居然是一個負數！這當中肯定有很多我們現在還無法透徹了解的數學，也許再過一百年才能搞清楚吧？這個驚奇的等式很可能在物質的世界裡也是真實的，因為已經有物理的理論使用它，而我們基本上相信物理是真實的。前面舉例的那種數學，是李校長博士論文先備知識。

西塞羅開啟了一個類型的加總方法，他的方法可以用一個參數展延成一系列的算法。在西塞羅之後，許多數學家——包括李校長的指導教授艾格紐——將它變化或再加以展延。李校長的博士論文提出兩個參數的展延，使得西塞羅以及許多前人的加總方法，可以用他的兩個參數調配出來。

師生情誼：數學教育路上的淵源

李校長的數學教育始於中央大學。他在民國二十三年畢業於中央大學實驗學校高中部（又稱中大實中，今為南京師大附中），應屆考上中央大學機械工程系，卻因為家裡籌不出學費而休學。次年復學時，申請轉入算學系，所以他可能並沒有修過機械系的課。「算學」是數學在中國的傳統名稱，「數學」則是晚清從日本傳入的（数学）。從清末到民初，各大學有稱算學系的、有稱數學系的，兩種名稱並行不悖。但民國二十四年李校長在南京進入算學系時，在上海成立了學術團體「中國數學會」（中華民國數學會的前身），可能是「數學」譯名勝過「算學」本名的象徵。

民國二十六年七七事變象徵一個大變局的開始。那年暑期羅家倫校長帶領中央大學從南京遷往重慶沙坪壩，李新民想必與許多中大學生一樣長途跋涉到四川，於十一月恢復上課，成為算學系三年級學生，而周鴻經則是算學系的新聘教授。在那裡，周鴻經與李新民開始了師生的情誼。周鴻經（Chow, Hung-Ching, 1902–57）是開創臺灣數學教育與數學學術的時代偉人，本校數學系與統計所位處的鴻經館，就是以他命名的；鴻經館落成時，在一樓穿堂懸掛了他的畫像。

周鴻經是中央大學在大陸的最後一任校長。周校長也是中央大學（其前身東南大學）算學系的畢業生（民國十六年），因為在（北京）清華大學講授微積分的表現極優，受到器重，校方本來要資助他到美國留學，但是他考取了中英庚款留學英國的公費生，去了倫敦大學學院（University College London）。民國二十六年春，他提出兩篇論文，都跟無窮多個數的加總有關；他的口試委員主席是當時世界頂尖的數學家哈代（G. H. Hardy, 1877–1947），而哈代身後出版的加總方法專書（Hardy, 1949）是周校長的指導教授鮑桑達（L. S. Bosanquet, 1903–84）幫忙整理的；這本書是李校長博士論文的主要參考文獻。

周鴻經本來要繼續做博士論文，而題目就是西塞羅加總方法的一種延伸。在這裡，我們看到周、李二代數學家的學術傳承脈絡，其實也可以看到臺灣早期數學學術研究的路線徵兆。民國二十六年爆發了全面抗戰，周鴻經像當年很多海外青年一樣，急著報國而放棄了博士班的學業。鮑桑達感到甚為可惜，他認為周鴻經只要再留一年必定可以獲得博士學位，但周鴻經報國心切，毅然返回共赴國難，受羅家倫校長聘為中央大學算學系教授，直接到重慶校區就任。

周鴻經是非常少數在戰爭中肩負繁重的教學與行政工作，同時持續發表學術論文的教授。在他返國之後，於戰亂與遷徙中發表了 22 篇數學論文，其中 19 篇發表在英國的三種期刊上（例如 Chow, 1939）。雖然周鴻經在行政職務上一直做到中央大學校長，但是他對於學術位階另有堅持。中央研究院數學所遷至臺灣的早期，當局請他擔任所長，他就表明自己只有碩士學位，資格不足，自願改稱代理所長。倫敦的鮑桑達教授一直關注著周校長，他認為周鴻經發表的學術論文質量已經足夠，主動替他爭取倫敦大學的博士學位。遺憾的是，周鴻經還沒領

到博士學位證書，就在 55 歲的壯年，因為猛爆發作的肝病辭世了。周校長的英年早逝，很顯然是積勞成疾。

在抗日戰爭以及國共內戰的動盪下，李校長 46 歲才獲得博士學位。他在民國三十八年來台灣時，雖然僅有中央大學數學系的學士學位，但已經有十年的大專教學資歷，受聘為師範大學（其前身省立師範學院）數學系副教授。當年臺大和師大擁有臺灣唯二的數學系，外加中研院數學所，這三個單位是大陸來臺數學家的棲身之地，也是臺灣幾乎從零開始發展高等數學教育的搖籃。周鴻經合聘於中研院和臺大，他在臺大數學系教了王九達。王九達被譽為語文和數學的雙重天才，民國四十三年臺大畢業，四十八年獲史丹福大學數學博士學位，時年 25 歲，是臺灣的第一位數學博士。李校長當時雖然受聘於師範大學，但是也支援臺灣大學的數學系與共同必修課程；有一段時間，他每週到台大兼八堂課。

臺灣的第一代數學教師很多來自大陸，而他們大多因為戰亂沒有繼續進修，直到時局穩定而且家庭安頓之後，才申請獎學金出國留學。李校長於民國四十三年秋季赴美國留學，一年就獲得西北大學的數學碩士學位，再轉往康乃爾的博士班，四十五年春季通過資格考。雖然李校長彼時應該已經有一定的數學功力，但如此急速的學習與考試，他也積勞成疾了。三月的資格考後，李校長感到「身體衰弱不堪，精神疲乏，常通夜失眠」，想要休學回臺。但指導教授艾格紐說他一年內必可獲得博士學位，勸他堅持一下。正猶豫間，他「陪朋友爬登康奈爾大學圖書館最上層的鐘樓，回寓後感到特別不舒服，當晚吐血」（李新民，1985；頁 138），於是下定決心放棄獎學金返國。他剛辦妥手續，還專程到紐約市向胡適辭行，卻收到恩師周鴻經的來信，說他受美國大使館新聞處推薦，在四十五學年（1956 年秋季至 1957 年暑期）到美國訪問，特別高興要到康乃爾「與弟在美相處一年，亦一快事」。但是李新民休學返臺的行動已經來不及逆轉，於是他們錯過了康乃爾「朝夕相處」的機會。李新民非常懊惱，周鴻經反而來信安慰他：「思慮最足傷人，我深有此經驗。……凡事在猶豫不決之時，最令人痛苦。既決定之後，即不必再作計較。」還叮嚀他「第一要顧及身體的健康」。

萬萬沒想到的是，周鴻經竟然在康乃爾驟然病逝了！而且消息傳到臺灣的時候，李新民正在幫周鴻經整理他離開倫敦之後發表的全部論文，準備寄給鮑桑達完成頒發博士學位給周鴻經的程序。人生固然無常，但斯人何辜此情何堪；李校長一輩子追悔此事，每每談起都要落淚。

周、李二位中大校長的情義之深，並非尋常師生可比，下面這則往事可以幫助我們想像兩人的交情。日本投降後，中央大學遷回南京，周鴻經就任校長，內戰局勢急遽變化，他再度面臨遷校難題。後來變化太快，無處可走，周校長在危難中一直堅持到南京撤守那天。李新民是湖南人，當時任教於全國唯一的國立師範學院（現為湖南師範大學）。因為「中大校事不易為」周校長本擬將妻兒托給李新民，而後者也在湖南做好準備，但周師母在臨行前夜忽感厭倦，決定不走了。

大局急轉直下，反而周校長先隨中央研究院數學所撤退到臺灣，李新民後來在共軍佔據湖南師範學院之日開始逃難，由陸路抵達桂林，之後陸路已經不通，周鴻經幫忙籌措旅費，讓李氏夫婦搭飛機經香港到臺灣，接待他們住在自己家裡，並且幫他接洽師大數學系的教職。

數學搖籃：創建單位與培育人才

李新民因病從康乃爾回來時，比他年輕八歲的徐道寧是師大數學系助教，獲德國的獎學金赴哥丁根留學。李新民在民國四十九年春季回康乃爾去完成他的博士學位。李、徐兩人在民國五十年先後獲得數學博士學位，都回到師大數學系，李校長從五十一學年起兼系主任；徐道寧升為副教授，但是她的生涯很快轉到了清華大學。

中大數學系退休的柯慧美教授，民國五十年從師範大學數學系畢業後留任助教。她只在大一（四十六學年）讓李新民教過微積分，跟老師不熟，但是同學間都傳頌李新民老師的公平公正，她還記得民國五十一年期盼老師回國當系主任的心情。柯慧美說，雖然李新民主任不常在辦公室，但是對每位助教的工作態度與行蹤瞭如指掌。五十一年畢業的曹恆平說，李新民一上任就把賴漢卿從嘉義女中召回師大擔任助教，此舉成就了一名臺灣的一流數學家；賴漢卿獲民國五十九年中山學術獎，成為重要的數學導師。

李新民倚重的另一位助教是李巡伯。柯慧美說李巡伯是從軍中退伍考進師大數學系的學長。筆者曾聽過父親多次感慨：他想要自願退伍報考師大，無奈長官大發雷霆，不准他退伍。這麼說來，李巡伯遇到了善心的長官。

李新民不常在系主任辦公室的原因之一是：他同時受命籌辦清華大學數學研究所。民國四十五年，清華大學於新竹復校，開辦原子科學研究所。民國五十一年，梅貽琦校長病逝，陳可忠教務長代理，商請李新民創辦數學研究所。清華數研所是臺灣清華的第二個教學單位，也是臺灣的第二個數學研究所；清華在民國五十三年恢復大學部時，也是由核工系與數學系先發。李新民開創清華數學系所，擔任十年主管，前面五年同時兼師大數學系主任。這十年前後，臺灣的數學學術與教育風景完全改觀。雖然臺大較早在民國四十九年成立數學研究所，但徐道寧評論說：臺大招收研究生甚少，留學歸國的更少，她認為清大數學所對於台灣早期的數學環境，貢獻較大。換句話說，李新民很大程度上一手栽培了臺灣的數學領域。

李校長開辦清華數研所，趕在民國五十二年春季招收第一屆研究生，同年秋季招第二屆；此後不再在春季招生。當年有很多從軍中報名的考生，但是實際錄取的幾乎全是師大數學系的畢業生。李新民親自點名師大數學系的幾位助教去報考，包括柯慧美和賴漢卿；第一屆研究生還有其他五位：劉慰儂、黃文濤、沈長庚、徐復、曹恆平，但黃文濤只讀一個月即被召回南市女繼續教書。

李校長從師大數學系帶了兩位同仁到清華：徐道寧和李巡伯。李巡伯是行政助教，徐道寧成為教學的台柱，但李新民自己沒有時間授課，徐道寧不可能獨撐全局。當時的師資極度貧乏，全臺灣只有五位數學博士，跨校指導論文或許可以，但是兼任授課就不切實際了。因為所能提供的薪資甚微，幾乎不可能從歐美聘請客座講席；李校長半開玩笑地說，所幸當時日本教授的待遇也非常微薄，所以還算可以從日本延聘教授，請他們英語授課。十年間，除了運用清華大學庚款基金聘有少數美籍、德籍客座以外，從日本聘來二十多位客座教授（李新民，1996；頁 423）。由此可見，若有實際需要，自然就出現 EMI (English as a Media of Instruction，英語作為教學媒介)。清華數學所第一屆的前輩也都記得，幾乎所有修過的都是日籍教授的課。但曹恆平記得某位教偏微方的日本先生不會說英語，從原子所請顏正直來翻譯。

李校長帶著碩士班學生做研究，繼續發展他的雙參數加總法。他可能指導了第一屆當中的三名學生：賴漢卿、劉慰儂、徐復，他們四人合作的論文刊登在周鴻經逝世十周年的紀念文集中（Lee, Lai and Liu，1967；Lee and Shie，1967）。

彌補師資不足的另一招是辦短期（通常是暑期）講習班。臺灣的薪資聘不到國際知名的華裔數學家，但他們樂意短期講學。李新民在民國五十二年暑期首創「大師班」，居然轟動得登上了報紙版面。講習班原本意在啟發研究生，卻吸引了教授、副教授七十多人參加。其他自然科學領域在次年依樣辦理，有人說這些講習班促成了國科會各科學研究中心的成立。

翻轉教育：推動中學數學課程現代化

清華數研所的另一大貢獻是中學的數學教育。徐道寧本來就出自師範（北平師範學院數學系畢業），李新民幾乎一直在師範體系內教書，他們兩人共同關心數學教育。李新民留學時期遇上美國二戰後的第一波數學「教改」：所謂的「新數學」(New Math)運動。新數學泛指受美國 SMSG (School Math Study Group) 影響而發展的數學學習內容與教學法。SMSG 是美國在西元 1958 年，受到蘇聯成功發射第一枚人造衛星 (Sputnik) 的刺激後，迅速改弦更張而編寫的數學教材。這套教材的主張，跟後來許多次的教改口號並無二致，基本上就是強調「理解」，但是實踐下來的成品（教材教法）卻見仁見智。民國五十二年，李、徐二人帶著清華數學的研究生，分工翻譯 SMSG 數學教材。許多比筆者長十歲的前輩記得部份的翻譯作品，具備數學性向的學生（後來成為數學家）基本上推崇那些翻譯本；在某種程度上，SMSG 可以說是數學家寫給數學小天才的教材。

部份 SMSG 的內容編進了李新民、徐道寧主編的東華版課本裡。中大數學系第二屆校友、臺大數學系名譽教授張鎮華記得他高二時（五十七學年）不適應數學老師的教法，上課時自己讀東華版課本，就此啟發了他的數學興趣，也啟蒙了他的數學天賦（張鎮華，2024）。

民國五十三年，教育部特別針對數理科目頒佈了〈高級中學生物化學物理教材編輯大綱〉和〈高級中學數學教材大綱〉。這份五十三年版的課程，可以當作一個分水嶺：從此以後，台灣的中學數學教育可謂進入了「現代」。而「現代」的特徵之一是李新民在東華版引進了「線性規劃」。李校長在美留學期間，適逢線性規劃在數學圈內蓬勃發展的那十年。線性規劃雖然不是他的研究主題，但是留心教育並且常懷著經世濟民之理想的李校長，想必留意了這支應用數學的發展，並且明白它的基礎原理。我們不難理解，當他編輯全新的高中數學課本時，想要將這門最新的應用數學介紹給學生。而在西元 1968 年就將線性規劃編入中學教材，可能在國際間是個了不起的創舉。

王九達說過另一則軼事：選擇題當中的「以上皆非」選項，是李新民在大學聯考出題闖場想到的，後來被廣泛使用，當然也不難變化出「以上皆是」。

學術界十年一代。李新民經營清華數學系所十年，得見當年的新苗開始茁壯回歸，或者在臺灣其他的數學系開枝散葉。翻閱清華數學所前十屆的校友錄，確實像是臺灣數學系教授的名人錄。例如王懷權是五十三年入學的第三屆學生，他的指導教授是王九達。民國五十九年，出自臺大電機系和史丹福數學所的李宗元博士歸國，加入清華數學所。民國六十年，賴漢卿、柯慧美、王懷權學成歸來，開始指導清華的研究生。

綠意盎然：中大九年的校園貢獻

當李校長民國六十二年到中央大學（其前身中央大學理學院）就任時，從清華數學所帶來兩位同仁。一是李巡伯，請他擔任總務長；二是李宗元，請他出掌數學系。當時的中大校園一片紅土，風起兮土石飛揚。李校長和李總務長十年經營，據說先後栽植十四萬株樹苗——有些樹苗栽植多次才存活下來，例如教研大樓兩側的七里香——才造就了如今綠意盎然的校園。而李宗元則是將應用數學、計算數學的種子，播進了中大數學系，現在數學系有一個獨立招生的「計算與資料科學組」遠因可以追到李宗元的影響。

當張鎮華大四時，李新民校長和李宗元主任來到中大；得知啟發自己的教科書作者來當校長，心中自有一分溫潤。四年後，張鎮華恰好也獲康乃爾數學系的獎學金，成為李校長的學弟。出國留學之前，張老師回母校辭行，李宗元主任帶他去見校長，讓他有機會正式見到李校長，接受他的勉勵。張鎮華認為李校長對中大數學系的影響是：藉由中研院數學所師資，先是兼任，後來正式到職，例如謝聰智、胡門昌、華洋，逐漸改善師資。

對譯「理性」的英文（rational）字根是「比例」（ratio），其實理性的根本精神是「成比例」。當我們感到遭遇不理性或者不公平的對待時，仔細想想就可能發現其中有不成比例的關鍵因素。數學家對於比例有敏感的直覺，如果能用比例觀念協商事情，通常有助於溝通；李校長善於此道。民國六十七年六月二日，蔣

經國總統召見大專校(院)長，李新民時任中央大學理學院院長，他向總統報告：「中大復校至今已有十七年之久，這十七年的預算總和大約是新台幣五億元。而興建〔臺北市〕建國南北路高架橋，全長僅五里餘，購地與工程費則高達五十餘億元。換言之，中大十七年的預算總和，僅僅相當於興建高架橋半公里的費用」（李新民，1996；頁 433）。這個比喻可能打動了總統，次年的高等教育預算就提高了 42%，並在後續幾年逐步提高。李新民校長在任的九年間，中央大學的年度預算從 0.24 億元成長到 4 億元。

李校長曾在四十一歲時身體虛弱，累到吐血。所幸後來恢復健康，得以長年貢獻於國家社會，八十多歲還能寫作。李校長的圓滿人生，功在數學，功在教育，他為很多人做了很多事而受崇敬。



民國 72 年教師節李校長與早期學生的餐會合照。李校長伉儷居中，柯慧美坐在右一，立於後者，右起曹恆平、張憶壽（一、二）與李巡伯、賴漢卿、謝志雄、沈長庚、陳明博（六至十）。（曹恆平提供照片，掃描後經過 AI 修圖）

文獻資料

Chow, H.-C. (1939). On the absolute summability (C) of power series. *Journal of the London Mathematical Society*, **14**, 101–112.

Hardy, G. H. (1949). *Divergent series*. Oxford University Press.

Lee, S.-M. (1962). On a two-parameter family of summation methods. 載於中央研究院數學研究所編，周鴻經先生逝世五周年紀念刊（頁 39–85）。臺北市。

Lee, S.-M., Lai, H.-C. and Liu, W.-N. (1967). A note on $W^{(q,\alpha)}$ summability. 載於中央研究院數學研究所編，周鴻經先生逝世十周年紀念刊（頁 136–143）。臺北市。

Lee, S.-M. and Shie, F. (1967). On a family of Lototsky transformations. 載於中央研究院數學研究所編，周鴻經先生逝世十周年紀念刊（頁 124–135）。臺北市。

李新民（1985）。懷念周校長綸閣（鴻經）師。載於國立中央大學七十週年特刊委員會編，中央大學七十年（頁 134–139）。桃園中壢。

李新民（1996）。第九章數學。載於國史館編，中華民國史學術志（初稿）（頁 417–456）。臺北新店。

張鎮華（2024）。數學男孩圓周率之旅。中央大學出版中心，桃園中壢。

附註：無窮加總的科普

前文算式 (1) 的刪節號 (...) 意思是：每次加上前次的一半，如此一半再一半地加上去。它是高中三年級選修數學課程的內容，稱為無窮等比級數，記作

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots$$

其中 $\frac{1}{2}$ 稱為公比。既然這個算式要加總無窮多個數，那就永遠沒有加「完」的時候，而是一直在進行中，所以並不會定下來一個總和。數學採取「極限」概念來理解如上的無窮加總算式，例如前面的級數每加一次的總和就更靠近 2 一點：1.5、1.75、1.875、1.9375、1.96875、…… 如此越來越靠近 2，但是並不會真正「等於」2，就說算式 (1) 的極限是 2，但符號上仍然記作

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots = 2 \quad (5)$$

請注意數學式 (5) 的「=」跟 $1+1=2$ 的「=」意義並不相同，嚴格來說 (5) 式的「=」應該讀作「收斂於」而不讀作「等於」。就好像 $1-2=-1$ 等號左邊的「-」讀減，右邊的「-」讀負，同樣的符號但是音義皆不同。這樣的情形在自然語言也不陌生，譬如「快樂的音樂」當中的兩個「樂」音義皆不同。我們根據前後文判斷「樂」的音義，數學家也同樣根據文章脈絡判斷「=」的意義。

高中學過無窮等比級數的加總公式：

$$\text{若 } -1 < r < 1, \text{ 則 } 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + \cdots = \frac{1}{1-r} \quad (6)$$

其中 r 是公比。因為 $1-1+1-1+1-\cdots$ 可以改寫成 (3) 式，也就是公比為 (-1) 的無窮等比級數，所以 $1-1+1-1+1-\cdots$ 也是無窮等比級數。前文提到歐拉建議將

$1-1+1-1+1-\dots$ 的總和指派為 $\frac{1}{2}$ ，就相當於把公式 (6) 的前提「拓展」到 $r = (-1)$ ；

將 $r = (-1)$ 代入 $\frac{1}{1-r}$ 就是 $\frac{1}{2}$ 。這是支持歐拉的動機之一。