

臺中市忠明高中數學教研習

從弦表到對數

單維彰

中央大學數學系、師培中心、文學士班

民國 114 年 11 月 5 日

三角關鍵訊息

- ◆ **角** 是中國與西方數學的初始分岔點。
- ◆ 三角比來自弦表，弦是史上第一個**函數**。
- ◆ 三角的教學帶出**函數**思維，但記憶特殊角限制為代數。

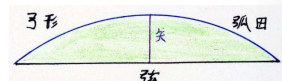
劉徽二懸念

球體積

弦矢求弓形面積

九章有「弧田術」

- ◆ 由弦矢求弓形面積
 - 劉徽發現有誤，但亦不能改
 - 等價於弦矢求弧
- ◆ 真正關鍵是弧弦互算
 - 也就是「三角比」



但實際頗管用

$$0 < \frac{\text{矢}}{\text{弦}} \leq \frac{1}{2}$$

當 $0.2 \leq \frac{\text{矢}}{\text{弦}} \leq 0.5$ 相對誤差 < 2%

九章僅以 $\pi = 3$ ，劉徽改良但未用於弧田

Excel 試算

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	弦	矢	半徑	半心角	弧田面積	弓形面積	R-Err%	以3代PI	R-Err%3
2	1	0.02	6.2600	4.58	0.0102	0.0133	24	-0.1279	108.0
3	1	0.04	3.1450	9.15	0.0208	0.0267	22	-0.0445	146.8
4	1	0.06	2.1133	13.69	0.0318	0.0401	21	-0.0080	499.2
5	1	0.08	1.6025	18.18	0.0432	0.0536	19	0.0169	155.9
6	1	0.10	1.3000	22.62	0.0550	0.0672	18	0.0371	48.1
7	1	0.12	1.1017	26.99	0.0672	0.0809	17	0.0551	21.9
8	1	0.14	0.9629	31.28	0.0798	0.0948	16	0.0720	10.9
9	1	0.16	0.8613	35.49	0.0928	0.1088	15	0.0881	5.3
10	1	0.18	0.7844	39.60	0.1062	0.1231	14	0.1039	2.2
11	1	0.20	0.7250	43.60	0.1200	0.1375	13	0.1195	0.4
12	1	0.22	0.6782	47.50	0.1342	0.1522	12	0.1350	0.6
13	1	0.24	0.6408	51.28	0.1488	0.1671	11	0.1508	1.2

古中國不曾量角

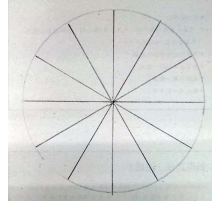
- ◆ 有「三角形」：圭田
 - 關心它的面積（半底乘以高）
 - 秦九韶：三斜求積術（海龍公式）
- ◆ 大地測量：只用勾股
 - 從直角三角形的相似獲得比例式
 - 不曾想過勾股之比值（tan）

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/5

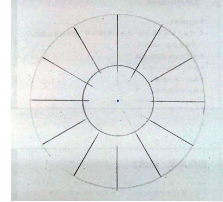
[7]

中國不量角而測弧

- ◆ 天文測量：用羅盤
 - 唐朝之前已將圓周劃分 $365\frac{1}{4}$ 度



巴比倫、古希臘量天



古中國量天

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/5

[8]

《九章》9：勾股

- ◆ 兩邊可測
 - 由畢氏定理知第三邊
- ◆ 一邊可測
 - 由相似觀念知另兩邊
- ◆ 高遠皆不可測（直接測量）
 - 重差術（兩個共邊的勾股及兩勾差）
 - 劉徽續《九章》10：〈海島算經〉

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/5

[9]

沒有「角」...

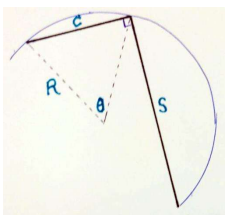
- ◆ 不能發現
角 \longleftrightarrow 勾股比
後來的「三角比」
- ◆ 弧弦不能互算
 - 1300年後傷及天象曆算

$$\text{弦} = R \text{crd} \theta \quad \theta = \text{弧所對的圓心角}$$

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/5

[10]

弧與弦的對應觀念



θ ：圓心角
所對弦長 $c = \text{crd} \theta$
輔助（補）弦 S
和角、半角需輔助弦
但三倍角不必：

$$\text{crd}(3\theta) = 3\text{crd} \theta - \text{crd}^3 \theta$$

伊斯蘭文明在西元 1200 年之後才知

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/5

[11]

$\text{crd} \theta$

沒有「公式」

（直到牛頓與關孝和）

可能因此沒有發展

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/5

[12]

希臘天文學可能經由羅馬貿易管道傳入印度，但蠻奇怪的，所傳入者是 Hipparchus 之天文學著作，而非較晚的托勒密之《天文學大成》（Almagest）。

Hipparchus 的著名天文成就是發現了春分的歲差，亦即地球自轉軸的緩慢旋轉。他的數學名聲是開創了三角學，他首創 chord 函數，製作了第一張弦表。他的天文與數學被托勒密蓋過，阿拉伯吸收後者而忽略 Hipparchus。但是他的知識卻傳入印度，在印度變成正弦，從印度傳入阿拉伯，仍間接影響了歐洲。

Hipparchus (-150) 製作弦表，設定半徑為 3438 單位，解析度 7 度 30 分。

ll p.3

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/05

13



單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/05

14

Hipparchus 始

希臘化時期後期的數學家們，在研究的主題上，開始轉向實用性與計算性。例如，以三角形面積公式聞名的海龍，同時是希臘的數學家，也是測量學家。在數學方面最能代表其成就的著作，是他的《度量論》（Metrica）。全書共分為三卷，第一卷由矩形和三角形開始，討論平面圖

還有巴比倫，他們根本不算分數

海龍繼承埃及的測量科學並發揚光大，他另一部有關於測地學的著作（Dioptra）也很有名，這部著作中，海龍對如何在隧道兩端同時動工而能使之銜接提出說明，也解釋如何測量兩地的距離，以及如何在

p.96

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/05

15

托勒密王朝毫無關係。他的天文學、地理學以及地圖之製作，和他的數學成就一樣為人熟知。他所著的《天文學大成》（Almagest，意指最偉大）是一部集數學、天文大成的著作，共十三冊。該書提出宇宙模型，並被保存下來，直到十五世紀哥白尼的《天體運行論》（1543）之

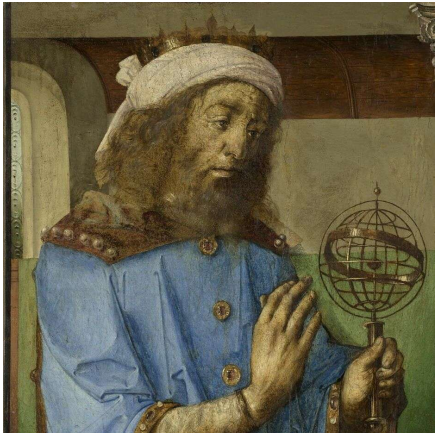
Almagest 原名 Mathēmatikē Syntaxis (150)

提到，天文學應盡可能選擇最簡單的數學模型，因此，他了解自己的理論僅是符合觀察結果的數學描述，亦即是所謂的「整理外觀」（Saving the phenomena），並不必然是大自然的真正設計。不過，多虧了湯馬斯·阿奎納（Thomas Aquinas, 1225–1274）的《神學大全》，托勒密的天文學模型，以及亞里斯多德的宇宙論，都被後來的基督教世界奉為真理。

lp.97

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/05

16



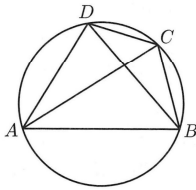
單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/05

17

偉大的弦表

圓內接四邊形對角線的乘積等於對邊的乘積和。即若 $ABCD$ 是圓內接凸四邊形，則 $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$ 。

圓心角為自變數，從 0 到 180 度，解析度 $\frac{1}{2}$ ，精確度三位六十進制小數。



藉此定理導出 chord 函數的和角公式、差角公式、倍/半角公式，但無法三倍角。

lp.98

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/05

18

西方數學也重實用

Arith.		Chordanum	
partes	in	partes	in
0	30	0	30
1	0	1	0
2	0	2	0
3	0	3	0
4	0	4	0
5	0	5	0
6	0	6	0
7	0	7	0
8	0	8	0
9	0	9	0
10	0	10	0
11	0	11	0
12	0	12	0

還有什麼比製表更實用？

某人很辛苦地算一遍，開放答案讓大家抄，以後只要查表即可。

托勒密的偉大跨文化創舉

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/5

19

箇中滋味

◆老師也受文化限制

隨查即用，不要公式

◆三角與對數畫錯重點：奮力學習公式

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/5

20

基督教誕生前，柏拉圖和畢達哥拉斯的哲學學派，曾創造一個有利的社會文化環境，讓一些女性得以從事學術研究。海芭夏是希臘化時期晚期的重要數學家，也是史料可稽的第一位女數學家。她的父親席翁曾在亞歷山卓擔任教職，海芭夏從小成長在自由開放的教育環境

席翁曾經改編歐幾里得《幾何原本》及托勒密《天文學大成》，而海芭夏則寫下她父親作品、阿波羅尼斯的《錐線論》，以及丟番圖作品的評註。不幸的是，由於被捲入宗教、政治權力鬥爭，最後在西元415年時，被狂熱的宗教分子謀殺。她的許多作品，也隨著亞歷山卓圖書館被毀而亡佚。

許多史家認為海芭夏的死亡，見證了希臘數學的徹底終結。她的

Ip.106

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/5

21



單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/5

22

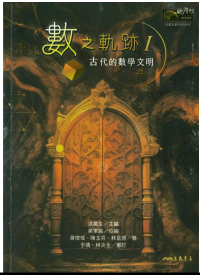


Hypatia時代的世界

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/5

23

來自印度的唐朝太史監瞿曇悉達的時空與政教背景。他傳入相當於今日的正弦函數表，以及使用印度數字的筆算法，但漢人沒有接受。



Ip.132

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/5

24

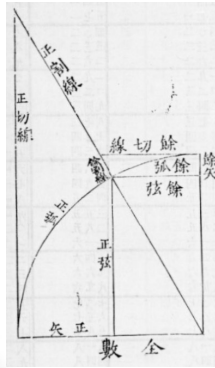
阿拉伯融合發展

- ◆ 從印度學來「半弦」 \sin
$$\text{crd } \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$
- ◆ 發展出 12 個「三角比」
單位圓上出 12 條線段長

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/05

(25)

明朝末年 傳入中國



- ◆ 耶穌會傳教士帶進來
- ◆ 當時有 8 個
- ◆ 現在學 3 個

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/05

(26)

食髓知味

- ◆ 阿拉伯發現了積化和差
$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$
- ◆ 查表可使乘法變成加減
- ◆ 後來想到指數律更好用
- ◆ 故計重施：對數表（為實用）

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/05

(27)

對數訊息一

- ◆ 指數與對數是同一組觀念。
- ◆ 概念與操作就像手心和手背。
- ◆ 學生感覺指數熟悉，對數陌生，課程與教學可以改進。
- ◆ 零頭指數來得太理所當然/不求甚解，乃是病根。

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/05

(28)

文藝復興後 解析幾何前 基督新教起

明代嘉靖、萬曆

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/05

(29)

Michael Stifel

施諦斐



1487 - 1567

日耳曼修士
Jena 大學第一代
數學教授
馬丁路德支持者

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/05

(30)

Arithmetica Integra



算術全義
MDXLIII 1544

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/5 [31]

等差 / 加減

0	1	2	3	4	5	...
1	2	4	8	16	32	...

等比 / 乘除

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/5 [32]

推廣到負數

...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
...	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	...

負數存在的正當性
引介負數的另一理由

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/5 [33]

推廣到 ...

零頭指數
Fractional Exponent

?

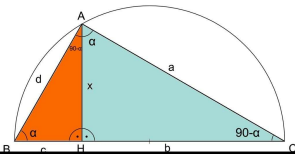
單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/5 [34]

尋找 a 和 x 使得

0	a	1	$0 - a = a - 1$
1	x	2	$1 : x = x : 2$

古希臘的幾何平均

尺規作圖解



單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/5 [35]

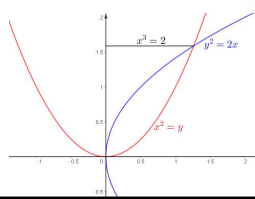
尋找 x 和 y 使得

0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
1	x	y	2

$1 : x = x : y = y : 2$

古希臘的
倍立方

軌跡作圖解



單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/5 [36]

國中等差等比

太快

- ◆ 形式化
- ◆ 公式化

單維彰-忠明研習：三角與對數 2025/11/05

[37]

零頭指數

- ◆ 是發明：人造的
- ◆ 方根轉分數的源頭
- ◆ 零頭指數與對數同時誕生，手心手背

單維彰-忠明研習：三角與對數 2025/11/05

[38]

零頭指數學習

- ◆ 來得太理所當然/不費功夫
- ◆ 缺乏操作機會，無法獲得經驗；教學文化使然
- ◆ 文化只能緩慢改變

學生若無法獲得經驗，就只能在孤立無援的窘境下，趨於功利和狹隘，終而無法順遂地學習。

杜威 (1902)

單維彰-忠明研習：三角與對數 2025/11/05

[39]

John Napier



1550 – 1617

蘇格蘭貴族/地主

克卜勒合作者

新教支持者

證明羅馬教宗是反基督

單維彰-忠明研習：三角與對數 2025/11/05

[40]

對數訊息二

- ◆ Napier 發明了兩款對數。
- ◆ 第一款是偉大的浪費⁽¹⁶¹⁴⁾。
- ◆ 第二款才是常用對數，但他已無力完成。
- ◆ 歷史評價不太公平，有文化因素：Napier 是貴族。

單維彰-忠明研習：三角與對數 2025/11/05

[41]

偉大的浪費

- ◆ 支持天球與地球的球面三角。
- ◆ 針對正弦做其對數。
- ◆ 等比數列選擇小於1的公比，相當於採用小於1的底數。
- ◆ 等差數列的0對應等比數列的1，對數趨向 ∞ 真數趨近0。

單維彰-忠明研習：三角與對數 2025/11/05

[42]

Logarithm

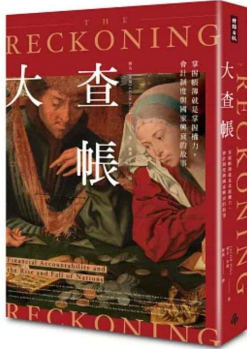
Logos + Arithmos

- ◆ Reckoning
- ◆ Ratio

Number

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/05 [43]

Reckon-ing



計算

Reckon
Count
Calculate
Compute

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/05 [44]

Reckoning

等差

...	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000	...
...	1.0000	1.1892	1.4142	1.6818	2.0000	...

等比

Ratio

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/05 [45]

對數

對應等比的等差數

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/05 [46]

Henry Briggs

布里格



1561 – 1630

英格蘭平民
清教徒
Gresham 第一代
數學教授
克卜勒支持者

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/05 [47]

1615 夏季初會

彼此懷著仰慕之情緊握雙手，
不發一語地沈浸在感動之間達
十五分鐘之久。

執手相看淚眼，竟無語凝噎。

柳永(1003)

單維彰 - 忠明研習：三角到對數 2025/11/05 [48]

男人倆感動啥？

- ◆ Napier悔悟，但為時已晚。
- ◆ Briggs洞悉偉業，但另有主意需要支持。
- ◆ 一拍即合：納氏心有宏願，布氏心有靈犀，並承諾完成。

托勒密弦表有360個數。納氏的第二款對數表欲有1000萬個數。

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/05

[49]

有效位數初體驗

- ◆ 計算1000萬以下正整數的對數，近似於解析度0.000001。
- ◆ 7位真數：三角表精確度。
- ◆ 14位對數：可能源自有效位數的判斷，希望如

$\log 1.000001 = 0.00000043429426\dots$
亦有7位有效數字可用。

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/05

[50]

對數訊息三

- ◆ 高中典型問題
 2^{1000} 有幾位數？
是Napier建議的log2算法
- ◆ 他們追求14位精確度，因此需要知道
 $2^{100,000,000,000,000}$ 有幾位數？

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/05

[51]

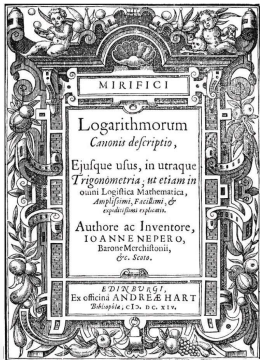
布里格對數

- ◆ 用納氏算法做了log2和log7，當作新算法的驗算，新算法有數值分析的前兆。
- ◆ 1616年夏季二會，確認算法。
- ◆ 原本1617夏季要呈獻1到1000的對數。

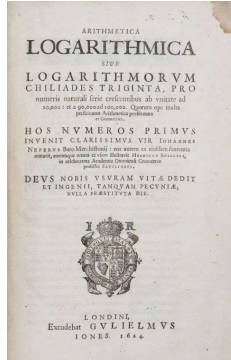
單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/05

[52]

兩款對數



1619



1624

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/05

[53]

納皮爾計畫

- ◆ 7位真數，14位對數。
- ◆ 布里格1624出版1~2萬與9~10萬的14位對數，並公佈詳細算法。
- ◆ 荷蘭人弗拉克(Adriaan Vlacq) 1628出版完整1~10萬的10位對數。賺到一桶金。

單維彰-忠明研習：三角到對數 2025/11/05

[54]



後話

- ◆ 1791 法國經線測量計畫，附帶 de Prony 領導算到 20 萬，精確達 14 位。三道生產線。
- ◆ 李善蘭約 1852 年到上海墨海書館「請教」對數造法。
- ◆ 1952 出版 1~10 萬的 20 位對數，用在登月計畫。最後一版。

感謝 HPM 先進

- ◆ 蘇俊鴻 (2003)。數學史融入教學—以對數為例。HPM 通訊 6(2,3)。
- ◆ 林倉億 (2010)。數學史融入教學—以對數表為例。HPM 通訊 13(12)。
- ◆ 林倉億 (2020)。對數教學的 4.5 節課。HPM 通訊 23(4)。
- ◆ 蘇惠玉 (2014)。布里格斯的《對數算術》與對數表的製作。HPM 通訊 17(6)。

End