

臺中市忠明高中數學科研習

從弦表到對數

單維彰
中央大學數學系、師培中心、文學士班
民國 114 年 11 月 5 日

三角關鍵訊息

- ◆ 角是中國與西方數學的初始分岔點。
- ◆ 三角比來自弦表，弦是史上第一個函數。
- ◆ 三角的教學帶出函數思維，但記憶特殊角限制為代數。

[2]

劉徽二懸念

球體積
弦矢求弓形面積

[3]

九章有「弧田術」

- ◆ 由弦矢求弓形面積
 - 劉徽發現有誤，但亦不能改
 - 等價於弦矢求弧
- ◆ 真正關鍵是弧弦互算
 - 也就是「三角比」

[4]

但實際頗管用

$$0 < \frac{\text{矢}}{\text{弦}} \leq \frac{1}{2}$$

當 $0.2 \leq \frac{\text{矢}}{\text{弦}} \leq 0.5$ 相對誤差 $< 2\%$

九章僅以 $\pi = 3$ ，劉徽改良但未用於弧田

[5]

Excel 試算

A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	弦	矢	半徑	半心角	弧田面積	弓形面積	R-Err%	以3代Pi	R-Err%3
2	1	0.02	6.2600	4.58	0.0102	0.0133	24	-0.1279	108.0
3	1	0.04	3.1450	9.15	0.0208	0.0267	22	-0.0445	146.8
4	1	0.06	2.1133	13.69	0.0318	0.0401	21	-0.0080	499.2
5	1	0.08	1.6025	18.18	0.0432	0.0536	19	0.0169	155.9
6	1	0.10	1.3000	22.62	0.0550	0.0672	18	0.0371	48.1
7	1	0.12	1.1017	26.99	0.0672	0.0809	17	0.0551	21.9
8	1	0.14	0.9629	31.28	0.0798	0.0948	16	0.0720	10.9
9	1	0.16	0.8613	35.49	0.0928	0.1088	15	0.0881	5.3
10	1	0.18	0.7844	39.60	0.1062	0.1231	14	0.1039	2.2
11	1	0.20	0.7250	43.60	0.1200	0.1375	13	0.1195	0.4
12	1	0.22	0.6782	47.50	0.1342	0.1522	12	0.1350	0.6
13	1	0.24	0.6408	51.28	0.1488	0.1674	11	0.1506	1.2

[6]

古中國不曾量角

◆ 有「三角形」：圭田

- 關心它的面積（半底乘以高）
- 秦九韶：三斜求積術（海龍公式）

◆ 大地測量：只用勾股

- 從直角三角形的相似獲得比例式
- 不曾想過勾股之比值 (\tan)

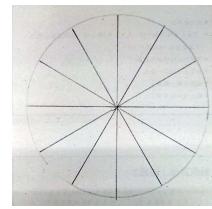
單維彰 - 忠明高中數學研習 - 三角形與圓 2025/11/05

[7]

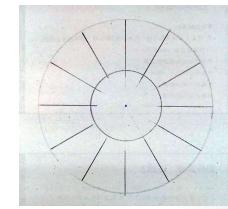
中國不量角而測弧

◆ 天文測量：用羅盤

- 唐朝之前已將圓周劃分 $365\frac{1}{4}$ 度



巴比倫、古希臘量天



古中國量天

單維彰 - 忠明高中數學研習 - 三角形與圓 2025/11/05

[8]

《九章》9：勾股

◆ 兩邊可測

- 由畢氏定理知第三邊

◆ 一邊可測

- 由相似觀念知另兩邊

◆ 高遠皆不可測

(直接測量)

- 重差術（兩個共邊的勾股及兩勾差）

- 劉徽續《九章》10：〈海島算經〉

單維彰 - 忠明高中數學研習 - 三角形與圓 2025/11/05

[9]

沒有「角」…

◆ 不能發現

角 \leftrightarrow 勾股比

後來的「三角比」

◆ 弧弦不能互算

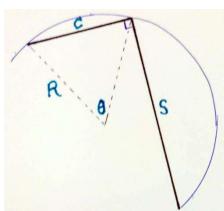
- 1300年後傷及天象曆算

$$\text{弦} = R \operatorname{crd} \theta \quad \theta = \text{弧所對的圓心角}$$

單維彰 - 忠明高中數學研習 - 三角形與圓 2025/11/05

[10]

弧與弦的對應觀念

 θ ：圓心角所對弦長 $c = \operatorname{crd} \theta$ 輔助（補）弦 s

和角、半角需輔助弦

但三倍角不必：

$$\operatorname{crd}(3\theta) = 3 \operatorname{crd} \theta - \operatorname{crd}^3 \theta$$

單維彰 - 忠明高中數學研習 - 三角形與圓 2025/11/05

[11]

伊斯蘭文明在西元 1200 年之後才知

 $\operatorname{crd} \theta$

沒有「公式」

(直到牛頓與關孝和)

可能因此沒有發展

單維彰 - 忠明高中數學研習 - 三角形與圓 2025/11/05

[12]

希臘天文學可能經由羅馬貿易管道傳入印度，但蠻奇怪的，所傳入者是 Hipparchus 之天文學著作，而非較晚的托勒密之《天文學大成》(Almagest)。

Hipparchus 的著名天文成就是發現了春分的歲差，亦即地球自轉軸的緩慢旋轉。他的數學名聲是開創了三角學，他首創 chord 函數，製作了第一張弦表。他的天文與數學被托勒密蓋過，阿拉伯吸收後者而忽略 Hipparchus。但是他的知識卻傳入印度，在印度變成正弦，從印度傳入阿拉伯，仍間接影響了歐洲。

Hipparchus (-150) 製作弦表，設定半徑為 3438 單位，解析度 7 度 30 分。

II p.3

[13]

單維彰 - 忠明高中數學研習：三角函數
2025/11/05

[14]

單維彰 - 忠明高中數學研習：三角函數
2025/11/05

Hipparchus 始

希臘化時期後期的數學家們，在研究的主題上，開始轉向實用性與計算性。例如，以三角形面積公式聞名的海龍，同時是希臘的數學家，也是測量學家。在數學方面最能代表其成就的著作，是他的《度量論》(Metrika)。全書共分為三卷，第一卷由矩形和三角形開始，討論平面圖

還有巴比倫，他們根本不算分數

海龍繼承埃及的測量科學並發揚光大，他另一部有關於測地學的著作 (*Dioptra*) 也很有名，這部著作中，海龍對如何在隧道兩端同時動工而能使之銜接提出說明，也解釋如何測量兩地的距離，以及如何在

p.96

[15]

單維彰 - 忠明高中數學研習：三角函數
2025/11/05

托勒密王朝毫無關係。他的天文學、地理學以及地圖之製作，和他的數學成就一樣為人熟知。他所著的《天文學大成》(Almagest，意指最偉大) 是一部集數學、天文大成的著作，共十三冊。該書提出宇宙模型，並被保存下來，直到十五世紀哥白尼的《天體運行論》(1543) 之

Almagest 原名 *Mathēmatikē Syntaxis* (150)

提到，天文學應盡可能選擇最簡單的數學模型，因此，他了解自己的理論僅是符合觀察結果的數學描述，亦即是所謂的「整理外觀」(Saving the phenomena)，並不必然就是大自然的真正設計。不過，多虧了湯馬斯·阿奎納 (Thomas Aquinas, 1225–1274) 的《神學大全》，托勒密的天文學模型，以及亞里斯多德的宇宙論，都被後來的基督教世界奉為真理。

I p.97

[16]

單維彰 - 忠明高中數學研習：三角函數
2025/11/05

[17]

單維彰 - 忠明高中數學研習：三角函數
2025/11/05

偉大的弦表

圓內接四邊形對角線的乘積等於對邊的乘積和。即若 $ABCD$ 是圓內接凸四邊形，則 $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$ 。

圓心角為自變數，從 0 到 180 度，解析度 $\frac{1}{2}$ ，精確度三位六十進制小數。

藉此定理導出 chord 函數的和角公式、差角公式、倍/半角公式，但無法三倍角。

I p.98

[18]

單維彰 - 忠明高中數學研習：三角函數
2025/11/05

西方數學也重實用

還有什麼比
製表更實用？

某人很辛苦地算一遍，
開放答案讓大家抄，
以後只要查表即可。

托勒密的偉大跨文化創舉

Arrz	Chondram
partei	[m]-[t]
o	3 [o]
o	2 [ɔ:]
i	3 [i:4]
u	3 [u:3]
ø	2 [ø:7]
ø	3 [ø:8]
ɔ	3 [ɔ:9.5]
ø	4 [ø:11]
ø	4 [ø:13]
ø	4 [ø:14.5]
ø	5 [ø:15.5]
ø	6 [ø:16.5]
ø	6 [ø:17.5]
ø	7 [ø:19.5]
ø	7 [ø:21]
ø	8 [ø:22]
ø	8 [ø:23]
ø	9 [ø:24]
ø	9 [ø:25]
ø	10 [ø:26.5]
ø	11 [ø:27.5]
ø	12 [ø:28.5]
ø	12 [ø:29.5]

晋书卷之三十一 三兔图解 2025/1/1

19

箇中滋味

- ◆ 老師也受文化限制
查即用，不要公
 - ◆ 三角與對數畫錯重點：
奮力學習公式

互影 - 中明研習：三角形對數 2025/11/05

20

基督教誕生前，柏拉圖和畢達哥拉斯的哲學學派，曾創造一個有利的社會文化環境，讓一些女性得以從事學術研究。海芭夏是希臘化時期晚期的重要數學家，也是史料可稽的第一位女數學家。她的父親席翁曾在亞歷山卓擔任教職，海芭夏從小成長在自由開放的教育環境

席翁曾經改編歐幾里得《幾何原本》及托勒密《天文學大成》，而海芭夏則寫下她父親作品、阿波羅尼斯的《錐線論》，以及去番圓作品的評註。不幸的是，由於被捲入宗教、政治權力鬥爭，最後在西元415年時，被狂熱的宗教分子謀殺。她的許多作品，也隨著亞歷山卓圖書館被毀而亡佚。◎

許多史家認為海芭夏的死亡，見證了希臘數學的徹底終結。她的

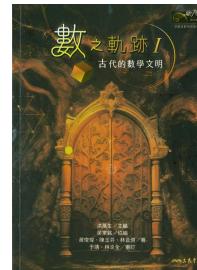
卷之三

1 p.106



Hypatia 時代的世界

來自印度的唐朝太史監瞿曇悉達的時空與政教背景。他傳入相當於今日的正弦函數表，以及使用印度數字的筆算法，但漢人沒有接受。



I p.132

阿拉伯融合發展

- ◆ 從印度學來「半弦」 \sin

$$\operatorname{crd}\theta = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

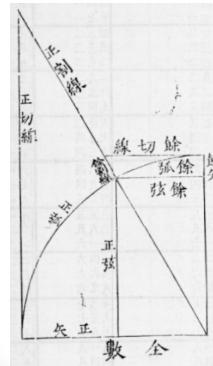
- ◆ 發展出 12 個「三角比」
單位圓上出 12 條線段長

單維彰 - 忠明高中數學研習 : 三角函數 2025/11/05
[25]

明朝末年傳入中國

- ◆ 耶穌會傳教士帶進來
- ◆ 當時有 8 個
- ◆ 現在學 3 個

單維彰 - 忠明高中數學研習 : 三角函數 2025/11/05
[26]



食髓知味

- ◆ 阿拉伯發現了積化和差

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

- ◆ 查表可使乘法變成加減
- ◆ 後來想到指數律更好用
- ◆ 故計重施：對數表（為實用）

單維彰 - 忠明高中數學研習 : 三角函數 2025/11/05
[27]

對數訊息一

- ◆ 指數與對數是同一組觀念。
- ◆ 概念與操作就像手心和手背
- ◆ 學生感覺指數熟悉，對數陌生，課程與教學可以改進。
- ◆ 零頭指數來得太理所當然/不求甚解，乃是病根。

單維彰 - 忠明高中數學研習 : 三角函數 2025/11/05
[28]

文藝復興後 解析幾何前 基督新教起

明代嘉靖、萬曆

單維彰 - 忠明高中數學研習 : 三角函數 2025/11/05
[29]

Michael Stifel

施諦斐

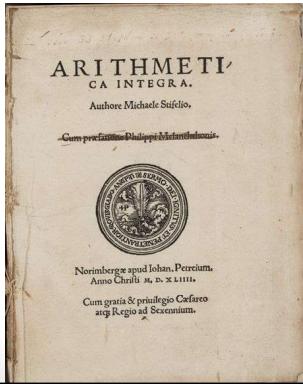


1487–1567

日耳曼修士
Jena 大學第一代
數學教授
馬丁路德支持者

單維彰 - 忠明高中數學研習 : 三角函數 2025/11/05
[30]

Arithmetica Integra



算術全義

MDXLIV 1544

單維彰 - 忠明研習 - 三年級對數 2025/11/05

[31]

等差 / 加減

0	1	2	3	4	5	...
1	2	4	8	16	32	...

等比 / 乘除

單維彰 - 忠明研習 - 三年級對數 2025/11/05

[32]

推廣到負數

...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
...	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	...

負數存在的正當性
引介負數的另一理由

單維彰 - 忠明研習 - 三年級對數 2025/10/05

[33]

推廣到 ...

零頭指數
Fractional
Exponent



單維彰 - 忠明研習 - 三年級對數 2025/10/05

[34]

尋找 a 和 x 使得

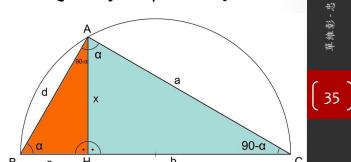
$$\begin{array}{ccc} 0 & a & 1 \\ 1 & x & 2 \end{array} \quad 0-a=a-1 \quad 1:x=x:2$$

單維彰 - 忠明研習 - 三年級對數 2025/10/05

[35]

古希臘的幾何平均

尺規作圖解

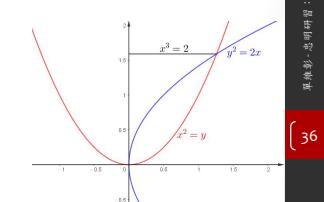


尋找 x 和 y 使得

$$\begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & x & y & 2 \end{array} \quad 1:x=x:y=y:2$$

古希臘的倍立方

軌跡作圖解



單維彰 - 忠明研習 - 三年級對數 2025/10/05

[36]

國中等差等比 太快

- ◆ 形式化
- ◆ 公式化

[37]

零頭指數

- ◆ 是**發明**：人造的
- ◆ 方根轉分數的源頭
- ◆ 零頭**指數**與**對數**同時誕生，手心手背

[38]

零頭指數學習

- ◆ 來得太理所當然/不費功夫
- ◆ 缺乏操作機會，無法獲得經驗；教學文化使然
- ◆ 文化只能緩慢改變

學生若無法獲得經驗，就只能在孤立無援的窘境下，趨於功利和狹隘，終而無法順遂地學習。

杜威 (1902)

[39]

John Napier



1550 – 1617
蘇格蘭貴族/地主
克卜勒合作者
新教支持者
證明羅馬教宗是反基督

[40]

對數訊息二

- ◆ Napier 發明了兩款對數。
- ◆ 第一款是**偉大的浪費**(1614)。
- ◆ 第二款才是**常用對數**，但他已無力完成。
- ◆ 歷史評價不太公平，有文化因素：Napier 是貴族。

[41]

偉大的浪費

- ◆ 支持天球與地球的球面三角。
- ◆ 針對正弦做其對數。
- ◆ 等比數列選擇小於1的公比，相當於採用小於1的底數。
- ◆ 等差數列的0對應等比數列的1，對數趨向 ∞ 真數趨近0。

[42]

Logarithm

Logos+Arithmos

◆ Reckoning Number
◆ Ratio

[43]

單維彰 - 忠明研習 : 三角到對數 2025/11/05

Reckon-ing

計算
Reckon
Count
Calculate
Compute

[44]

單維彰 - 忠明研習 : 三角到對數 2025/11/05

Reckoning

等差

...	0.0000	0.2500	0.5000	0.7500	1.0000	...
...	1.0000	1.1892	1.4142	1.6818	2.0000	...

等比

[45]

單維彰 - 忠明研習 : 三角到對數 2025/11/05

對數

對應等比的等差數

[46]

單維彰 - 忠明研習 : 三角到對數 2025/11/05

Henry Briggs

布里格
1561–1630
英格蘭平民
清教徒
Gresham 第一代
數學教授
克卜勒支持者

[47]

單維彰 - 忠明研習 : 三角到對數 2025/11/05

1615 夏季初會

彼此懷著仰慕之情緊握雙手，
不發一語地沈浸在感動之間達
十五分鐘之久。

執手相看淚眼，竟無語凝噎。

柳永 (1003)

[48]

單維彰 - 忠明研習 : 三角到對數 2025/11/05

男人倆感動啥？

- ◆ Napier 悔悟，但為時已晚。
- ◆ Briggs 洞悉偉業，但另有主意需要支持。
- ◆ 一拍即合：納氏心有宏願，布氏心有靈犀，並承諾完成

托勒密弦表有 360 個數。納氏的第二款對數表欲有 1000 萬個數。

單維彰 - 忠明研習 - 三角對數
2025/11/05

[49]

有效位數初體驗

- ◆ 計算 1000 萬以下正整數的對數，近似於解析度 0.000001。
- ◆ 7 位真數：三角表精確度。
- ◆ 14 位對數：可能源自有效位數的判斷，希望如

$$\log 1.000001 = 0.00000043429426\cdots$$

亦有 7 位有效數字可用。

單維彰 - 忠明研習 - 三角對數
2025/11/05

[50]

對數訊息三

- ◆ 高中典型問題
 2^{100} 有幾位數？
- 是 Napier 建議的 \log_2 算法
- ◆ 他們追求 14 位精確度，因此需要知道

$2^{100,000,000,000,000}$ 有幾位數？

單維彰 - 忠明研習 - 三角對數
2025/11/05

[51]

布里格對數

- ◆ 用納氏算法做了 \log_2 和 \log_7 ，當作新算法的驗算，新算法有數值分析的前兆。
- ◆ 1616 年夏季二會，確認算法。
- ◆ 原本 1617 夏季要呈獻 1 到 1000 的對數。

單維彰 - 忠明研習 - 三角對數
2025/11/05

[52]

兩款對數



1619



1624

單維彰 - 忠明研習 - 三角對數
2025/11/05

[53]

納皮爾計畫

- ◆ 7 位真數，14 位對數。
- ◆ 布里格 1624 出版 1~2 萬與 9~10 萬的 14 位對數，並公佈詳細算法。
- ◆ 荷蘭人弗拉克 (Adriaan Vlacq) 1628 出版完整 1~10 萬的 10 位對數。賺到一桶金。

單維彰 - 忠明研習 - 三角對數
2025/11/05

[54]



後話

- ◆ 1791 法國經線測量計畫，附帶 de Prony 領導算到 20 萬，精確達 14 位。三道生產線。
 - ◆ 李善蘭 約 1852 年到上海墨海書館「請教」對數造法。
 - ◆ 1952 出版 1~10 萬的 20 位對數用在登月計畫。最後一版。

卷之三



End

蜀辭卷一 中明五三四