摘 要

此篇論文中，我們想要探討的是電腦與網路在數學教育方面的應用情形。藉由探討電腦與網路的特色及教學方法的多樣性，我們希望能在數學教育的舞台上，找出能讓電腦與網路盡情揮灑的角色。並針對近年來廣受討論的創意及義務教育數學科內容，提出一些自己的看法。

在研究期間，我們做了兩個以網路爲傳播工具的實驗。首先是數學推廣週，這是在美國的一個定期活動，每年設定一個主題，向全國大眾宣傳數學的重要性。我們初步嘗試逐漸地將這個活動訊息引入國內，希望能藉由這個舉動提起國內數學界的討論風氣，更進一步則希望在未來能藉著這類活動提醒社會大眾，數學和我們的日常生活息息相關。另外是凌波初步筆記，是以單維彰教授所開的一門課（凌波初步）爲題材，希望能夠呈現出以電腦網路作爲知識傳播媒介的優點，並發掘其中存在的問題。

在論文的本文中，則敘述了理論的部份。第二章以一個數學教育使用者的觀點來看電腦的特色，針對實用的角度，列舉出電腦能做與不能做的事；並提出網路即電腦的看法，將電腦與網路這兩個名詞的含意同時拓展開來；再就文獻中的正反意見加以歸納整理。第三章則是將一些術語介紹給平時較少接觸教育學的數學教育工作者，希望數學教育工作者與教育學家不會因爲專有名詞的混淆，而犧牲了相互切磋討論的空間。另外，再就數學本身的特色探討教學方法的實用性。 此處是屬於文獻探討部份。至於第四

章，則是基於電腦網路的特性及數學教學方法的多樣性，提出一些將電腦網路應用在數學教學的構想，及一些需要注意的事項。最後，提出我們對於義務教育中所教數學科內容的看法與期許。

目錄

一 緒論 **5**

1.1 動機 5

1.2 電腦不能完全取代教師的角色 7

二 從數學教育的觀點看電腦與網路 **10**

2.1 電腦之基本功能 11

2.2 電腦之根本限制 12

2.3 網路即電腦 16

2.4 電腦網路對數學教育之影響 18

三 教學方法 **22**

3.1 教學方法之簡介 22

3.1.1 心理學觀點 22

3.1.2 人本導向教學觀 27

3.1.3 建構導向教學觀 28

3.2 相類似之教學法的比較 31

3.2.1 將教材分成很多小單元的教學法 32

3.2.2 強調學生自己建立知識架構的教學法 32

3.2.3 提及先備知識及前導架構的教學法 32
3.2.4 不直接教導學生的教學法 33
3.3 數學本身的特色及其適用的教學法 33
3.3.1 數學是一種語言 33
3.3.2 義務教育中數學科的內容 35
3.3.3 以學習階層來分 36
3.3.4 以學習內容來分 37

四 將電腦網路應用在數學教學上 39
4.1 數式的呈現問題 39
4.2 適性網路教材 42
4.3 落實教材計畫 48

五 結論與展望 50
5.1 結論 50
5.2 學科知識的創意——不以既成的架構來建構自己的知識 51
5.3 展望 53

A 凌波初步筆記網頁 58

B 數學推廣週 61

第 一 章

緒論

1.1 動機

現在是所謂資訊爆炸的時代，人們分分秒秒接受著各種媒體的刺激，「電腦」、「多媒體」、「網路」等名詞，似乎代表了二十世紀末的文明。好像沒有接觸這些東西，就會和大眾脫離似的。在許多研究人類精神層面的文獻中都指出，現代人之所以會產生許許多多心靈上的問題，多半要歸咎於生活上「役於物」的現象。人們一味追求物質上的享受，只覺得要有一台電腦，要能連網路，要有多媒體，但是卻很少有人想過，擁有這些東西與沒有這些東西對我們的生活會造成什麼樣的差別？或者對我們的工作造成什麼不同？甚且，這些東西對我們的精神層面造成什麼影響？

我們現在要問，電腦可以爲數學教育做些什麼？網路可以爲數學教育做些什麼？

當然，不同的思考方向能夠問出不同的問題，也能得到不同的結果。在電腦發明之初，人們問的問題是：怎麼樣的東西才能幫忙做這些繁瑣的計算工作？這個問題形成之後，發展出現在的電腦

與網路。而現在的電腦與網路發展出來之後，我們所問的問題是：這樣的東西還能爲我們做些什麼？這個問題出現之後，發展出視訊會議、教學軟體、網上購物、……。在視訊會議發展出來之後，我們要問：怎麼樣的東西才能讓視訊會議在户外舉行？這個問題出現之後，發展出各式無線傳輸設施。接下來的問題是：這些東西還能爲我們做些什麼？或許在不久的將來，我們又會問：怎麼樣的東西才能……？這兩種問題的循環，造成人們文明的進步，也促成人們生活的改變。

但爲什麼是電腦？爲什麼不是電冰箱或熱水器呢？在我們考慮「某件東西可以爲數學教育做些什麼」的時候，我們以什麼樣的角度來思考哪種東西對數學教育有用？是「東西」的特色吧。電冰箱的特色是能夠將某些物體保持在某種低溫的狀態下；熱水器的特色則是能夠將液體（主要是水）在某個時間之內迅速加熱。這些都不是數學教育所需要的特色。而電腦的特色則是龐大而迅速的計算量、高密度而逐字搜尋的儲存空間，加上近年來圖形顯示的功能。這些特色恰好都是數學教育所需要的部分，所以當電腦的發展到了某種程度之後，人們自然就看到了它與數學教育之間的關連。 但對數學教育而言，並不是「非電腦不可」的，只是有了電腦輔助之後，我們期望能使學習更容易發生，也能使教學進行得更順利，更能順應不同學生的需求。

許多研究指出，在正式課程之餘使用數學教學軟體能夠幫助學生學習，但是成功的電腦軟體到底有什麼優點，能夠讓學生的學習效果增加呢？我想，這一類的教學軟體有一些特別重要的特性：生動活潑、新鮮有趣，能夠提升學生的學習動機與興趣，讓學生在

不知不覺中，延長了和數學在一起的時間，並且因爲不再枯燥乏味，也就不再有主觀的排斥心理。這對學習知識而言，是最重要不過的了。

然而，如何做出這種生動活潑、新鮮有趣的軟體，並同時將數學知識包含其中呢？觀察市面上廣受喜愛的教學軟體，在其中不只包括了數學專業知識，還需要電腦網路專業知識、教材教法知識、學科教學知識、劇場設計知識、與青少年心理學知識。有了這些跨學門、跨領域的各種知識，才有可能做出成功的數學教學軟體。

在這裡，我們純粹以數學與電腦網路和教材教法知識爲出發點，而不討論數學的學科教學知識、心理學知識、劇場設計知識。有關數學與電腦網路的部分，會提到電腦的基本功能與限制、網路與電腦的關係、電腦對數學教育的影響。至於教學知識的部分，則會選擇常見的一些教學方法，做簡短的介紹，比較其中較易混淆的部分，並將其與數學特性相結合，討論電腦的可能運用情形。最後，針對網路在數學教學上的應用，我們提出一些自己的看法。

1.2 電腦不能完全取代教師的角色

雖然早在西元 1926 年即有所謂「教學機」的設計[1]，但歷經七十餘年，仍然無法完全以機器取代人來教學。即使現在許多 CAI 軟體正如火如荼的發展，但也只限於一些日常生活的實用常識，關於基本知識的獲得，幾乎沒有人會把重心完全放在 CAI 軟體的學習上。難道這表示了電腦在教學上的一個瓶頸嗎？這要從電腦在教

[1]此處所提之教學機，是由普萊西 (Sidney Pressey, 1926) 爲編序教學發展所設計的，稱爲「普氏機」。主要是一種多重選擇測驗設計，並對學生答案是否正確，給予立即回饋。

學中的角色界定來探討。在整個教學活動中，電腦可以扮演多少種角色？還有多少種角色是電腦無法扮演的？

我想，我們可以先看看在傳統的教學中，老師被要求扮演哪些角色。然後，再逐項檢驗有哪些角色是電腦就可以扮演的，又有哪些角色是電腦無法扮演、愛莫能助的。在「教師專業發展——理論與實務」[8]中提到，世界各國的師資培育理念取向有八種：

一、教師被期望爲一個擁有個性，且致力於自我實現的人；

二、教師被期望爲一個在道德、學問、 文采均足以做爲學童表率與模範的人；

三、教師被期望爲一個具有廣博知識基礎的通才， 或有教養的全人；

四、教師被視爲「智能領導者」、「有專門學問的學者」、或是「學科專家」；

五、教師被視爲「藝術家」， 具有豐富的實務經驗，能因時因地制宜靈活變通，處理各種獨特的問題狀況；

六、教師被期望爲一個「技師」， 能運用有效的教學原理與技術來解決問題；

七、教師被視爲一個「社會改革者」或「政治實踐者」， 能創造出一個「學習社區」，以提升民主的價值與實施，參與社會和政治活動，致力於改進學校狀況和教育機會；

八、教師被視爲一個「專業決策者」，能針對他們的教學或教學情境進行主動的省思探究活動，並在各種不同的狀況中做下恰當的決策，從各種回饋訊息中調整自己，以作爲下次決策的參考依據。

簡而言之，一個理想的教師有人本的胸懷與愛心，在行爲操守上能做爲學生的模範與表率，有廣博通達的知識基礎，對於任教科目有專精的學科知識，有豐富的實務經驗，有優良的教學技能，能運用教育的力量來批判改革學校與社會中各種不公與不義的現象，能經常省思檢討自己的教育行動與教育內容。在這些角色下，現在的「電腦」能做的事情大概只有「廣博通達的知識基礎」、「專精的學科知識」、「大量記憶的實務經驗」、「大量記憶的教學技能」，任何會牽涉到人類心理狀態變化（也就是所謂「認知」）的部分，或是有關「理想實現」與「檢討改進」的部分，現在的電子科技都還無能爲力。雖然現在「人工智慧」正在發展中，但誰也不知道電腦除了數種現在所能做到的事情之外，還能再多做多少。所以在此，將電腦界定爲「呈現教材的工具」會是比較恰當的作法。

這裡的「教材」除了書本、講義之外，還包括了所有能能夠呈現在學生面前的知識；而「呈現教材的工具」，指的也不只是書本中的文字或圖片，還包括了形形色色能夠幫助老師達到教育目標的媒介，有能夠互動的、有能夠實驗的、有能夠立即回饋的、有能夠成爲模範的、有能夠做爲參考的、還有能夠親身體會的。這些都是老師們的「工具」。

第 二 章

從數學教育的觀點看電腦與網路

電子計算機普及以來，在美國的校園裡，幾乎是人手一機，商店中處處可見不會加法進位的收銀員。近十年來，這種現象已經成爲美國教育界爭相討論的話題。而臺灣的教育一直以來都跟隨著美國的腳步。有很多人在問，既然有電子計算機，爲什麼學生需要花那麼多的時間學習加減乘除？既然有數學軟體，爲什麼學生需要熟練分數的計算？甚至連三角函數，指數與對數的運算都有機器代爲處理了。學生還需要把時間花在計算練習題上嗎？在下面的討論中，我們可以指出：計算練習對學生而言是必要的。因爲電腦有其先天設計上的限制，完全依靠電腦計算是一件很危險的事。

在這一章中，我們從數學教育的觀點介紹電腦的基本功能，接著分析在數學教學上使用電腦時，因電腦之根本限制所造成的錯誤。另外，再闡述「網路即電腦」的想法。最後，從正反兩方面來探討電腦網路對數學教育之影響。電腦之於數學學習就如同流水之於行舟，電腦本身並無好壞，只是在使用上過度依賴與刻意避免才產生了許多問題。

2.1 電腦之基本功能

自然科學的許多定理，都是可以由實驗來應證的。經由實驗，大家會比較相信課本所言，也會有比較深刻的印象。雖然數學的研究方法與自然科學未盡相同，但大體上數學被歸類爲自然科學。那麼爲什麼有物理實驗、化學實驗，卻沒有數學實驗呢？首先，我想先界定一下，所謂的數學實驗，是指可讓使用者自由改變某些參數，而且都能產生合理回應的黑盒子。多半是一個代表某數學運算的電腦程式，使用者可經由更改輸入參數、觀察輸出結果，來瞭解這個數學運算在做些什麼事。之所以稱之爲黑盒子，是因爲這類程式很像是手邊有一個封住的盒子，想要知道這個盒子裡的東西是做什麼的，就塞一些東西進去，看看會掉出什麼東西。經由一番歸納整理，就可以瞭解這個盒子主要的功能及目的。雖然不見得能打開盒子看個明白，但至少能知道什麼時候這個盒子能派上用場，知道這個盒子要怎麼用。若有興趣作更深入的探討，就能對這個盒子裡的東西有個大致上的瞭解。

藉由電腦的快速運算及螢幕顯示的視像 (visualization) 功能，加上近來數學軟體的開發，我們可以很輕易的做到對於徒手來說極爲不易的計算或製圖。使得無論是函數繪圖、立體繪圖、尺規作圖，或是一系列冗長的數字計算，都不是難事，電腦都能作得比我們更精確、更能明顯看出其背後的數學含意。除了快速及視像化之外，電腦還能夠做大量儲存及快速搜尋的動作。因爲電腦能夠在少量的空間中儲存大量的資訊，同時又能迅速的做逐字逐句的搜尋。和傳統的書本比較起來，電腦除了能將教材做完整且節省

空間的保存之外，還能讓使用者迅速的找到所需資料，並能透過網路的傳送，迅速的拿到遠方所保存的資料。 不論是文書排版或是純粹的資料儲存，電腦都提供了較快速、可攜帶、及易於保存與擷取 (store and retrieve) 的特性。

2.2 電腦之根本限制

學習數學眞的只是學習計算能力嗎？我想所有的數學老師都會異口同聲地否認，因爲計算能力（或者說是算術）只是整個數學架構中的一部份罷了。即使是單就計算而言，反覆的練習仍然是很重要的。如果仗著機器能計算加減，就不再練習加減法的計算，那麼在平時購買用品時，就不知道到底店家有沒有計算錯誤。在搭乘火車時，也不知道距離下一班車的時間還剩多少，是不是足夠去買個麵包果腹。我們不可能時時刻刻都將機器帶在身上，但誰知道自己什麼時候會用到算術？誰又知道自己什麼時候會用到數學？用機器幫助人們計算就好像是用車子代步一樣，雖然車子又快又舒服，但是一個不會（不能）走路的人卻處處受限，不方便到了極點。計算機也是一樣的道理。

就另一方面來說，機器既然是人造的，就會有些力有不逮之處。有時雖然電腦給出了答案，但是這些答案可能是錯誤的， 這些錯誤並不是在解決某些數學問題時才會出現，也不是只有數學科才會遇到這些問題。事實上，就是因爲這是電腦的「根本」問題，與計算機本身的原理及構造息息相關，所以這些限制會以各種形貌出現在各種情況下，以下只是用一些數學上常見的情形來舉例說明。這裡指出了這些限制，並不表示這些是電腦的「缺點」，重要

的是，我們不能因爲使用電腦的便利性，就認爲電腦是萬能的。

第一類， 因電腦本身的減法計算特性，與有限精度所造成的錯誤。舉例來說，當我們在計算

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

的時候，若令 x 在數值上逐漸靠近 0，則因爲在電腦中所用的 sine 函數值是取自泰勒展式的前面有限多項，若取兩項爲例，分子會是

$$x-(x-\frac{1}{6}x^3)$$

若此時將 x 用 10^{-3} 或是更小的數字代入，則分子會因減法需要對齊小數點，而產生精度不夠的現象，也因此而在 x 足夠小的時候，分子會出現 0，而此時分母還不是零，所以若用數值逼近此極限，答案會是零，而且在表列數字代入過程時，數字是逐漸改變，在 x 小於某個數之後，計算的答案就全是零了。若是用雙精度來計算，就會出現下面這種情形：

x	$y=\frac{x-\sin x}{x^3}$
10^{-1}	0.16658335317185
10^{-2}	0.16666583333574
10^{-3}	0.16666665833900
10^{-4}	0.16666666148319
10^{-5}	0.16666728489944
10^{-6}	0.16665373237228
10^{-7}	0.17205356741103
10^{-8}	0
10^{-9}	0
10^{-10}	0

若是沒有注意這種現象，自是被電腦擺了一道。

第二類，純粹是因精度不夠所導致的。舉例來說，

$$\sum \frac{1}{n}$$

已經被證明出是個不收斂的級數，但是若用數值計算，則會收斂到一個很大的數字，那是因爲電腦會先計算 $\frac{1}{n}$，若 n 太大，就會超出電腦所能容納的範圍，而使這個值變成零，此後的數不論再怎麼加，都不會再變動了。更有趣的是，若能改變所使用的精度，就會發現這個很大的數會隨著精度變大而變大。舉例來說，若有效數字的位數爲 5，則上式之值爲 10.000；若位數爲 7，則上式之值爲 14.05377；若位數爲 8，則上式之值約爲 18.942860。

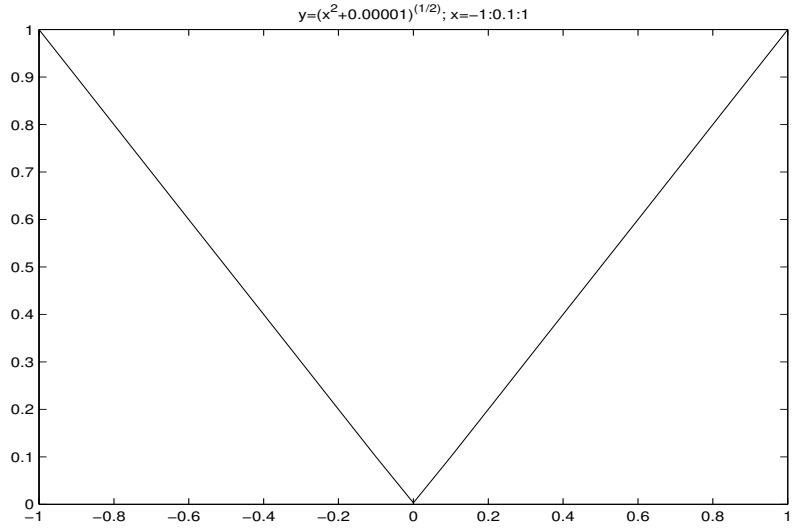
第三類，雖然電腦的計算足夠精準，卻因螢幕的解析度限制而造成視覺上的誤解。例如在一般個人電腦所用的螢幕（800×600 像素）中，若要正確繪出頻率超過 800 次的週期函數圖形是不可能的，因爲在螢幕上的橫軸方向總共只能輸出 800 點，若要做出上述圖形，光是波峰和波谷就超過了 800 個，更不要說是其他的點值了。

另外，某些尺度上的差異，也會造成人類視覺上無法辨識。例如：

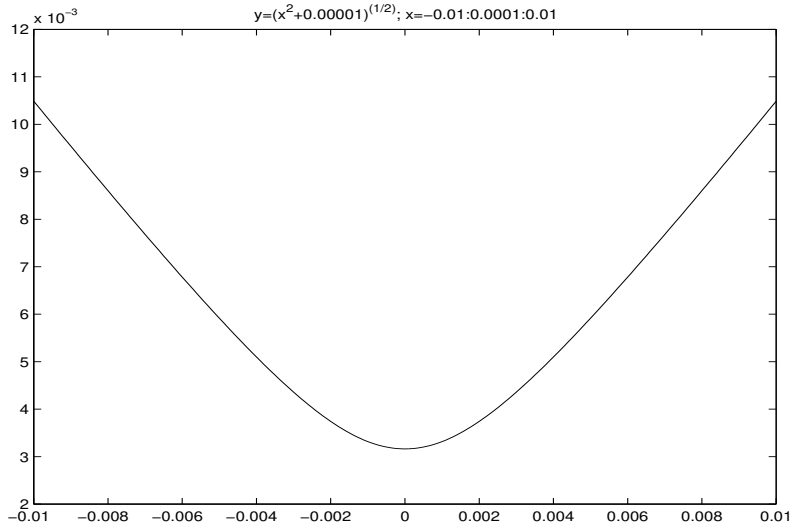
$$\sqrt{x^2 + 0.00001}$$

這個函數若在 $[-1, 1]$ 這個區間內繪出圖形（如圖一），看起來是不可微的，在 $(0, 0)$ 處有尖點。但若在 $[-0.01, 0.01]$ 這個區

間內繪圖（如圖二），則可看出其實它是平滑的。



圖一：$\sqrt{x^2+0.00001}$ 在 [-1,1]的圖形



圖二：$\sqrt{x^2+0.00001}$ 在 [-0.01,0.01]的圖形

還有，在電腦螢幕上的圖形和印表機印出的圖形可能很不一樣，因爲電腦螢幕的解析度大約只有 70 至 100 dpi，而印表機是 300 至 600 dpi，所以常常在螢幕上看到的直線，列印出來

卻不是直線；在螢幕上看來不可微的圖形，印出來卻是平滑的。若習慣用視覺來判斷函數的特性，就會在這種時候產生不該發生的錯誤。

2.3 網路即電腦

當電腦像電視一樣成爲大眾傳播媒體時，電腦工程師或是軟體設計者就會像編劇或製作般隱形於幕後，而所有的資源架構則如發電廠或電視裝配廠般遙不可及。

在 DOS 的時代，一家公司中的電腦管理者或網路管理者，是具有崇高地位的。他們能解決大家不能解決的問題，能做到大家不能做到的事情。但是現在的電腦操作界面越來越簡單，大家用電腦所做的事越來越傾向「套裝化」，以前要下很多步指令的事，現在只要按一個按鈕就解決了。個人電腦的使用者和系統管理者之間，已經逐漸脫離了關係。某些消費者在購買家用電腦時，甚至不清楚電腦主機內部的配備，只是直接告訴銷售人員，他希望這部電腦能爲他做些什麼，其他問題一概不知。這和我們去買電視機、錄影機有什麼差別呢？再看看現在的電腦網路，知道自己的電腦連到國外時，會經過哪幾種線路的人已經不多。對大多數使用者而言，除了打字與網路頻寬問題以外，上 BBS 和打電話已經沒有多大差別了。當這樣的趨勢越來越顯著時，關心電腦如何運作的人越來越少，而關心電腦能發揮什麼功用的人則越來越多。

所謂的電腦，也就是電子計算器。它最主要，最先開發的功用，就是數字的計算，其次才是文書處理和其他附帶功能（第一個編譯器在 1952 年誕生，表示此時電腦已經能夠處理文字，但眞正以

文書處理爲主的軟體，則是在 1970 年代才出現）。

當我們用網路把許多電腦聯結在一起時，「分工」的效果就出現了。或許在家中的個人電腦裡，沒有功能強大的計算軟體，但是我們知道在網路上某一個號碼的機器有這套軟體，就可以把資料用網路傳給那部機器做運算，卻不需要知道那部機器在世界的哪一個角落，也不需要知道它的價格和擁有者，一切的動作，只需要上網（和付費）就成了。久而久之，人們面對的只剩下網路，人們需要的也只剩下網路了。既然網路是依附著電腦而存在，而電腦又漸漸隱形於網路之後，在下文中所出現的「電腦」字眼即代表了「網路」；而「網路」則代表了「電腦」。

在人的腦中，知識是以點與線的方式存在的，每個詞彙都是以點狀的方式被記憶著；而詞彙之間的關係，則是點與點之間的連線。這種方式造成了所謂「內隱知識」的問題，有些詞彙雖然經過了學習，但因爲沒有和其他的詞彙連線，或是向外的連線太少，以致於我們無法將那些知識憶起，或是無法運用那些知識。而網路的架構也是一樣的，就以 WWW 而言，網頁是點，之間的連結就是線，若有網頁沒有做好連結，在瀏覽器上就找不到那一頁；網站是點，網站與網站之間所做的交叉連結就是線，若有網站從來不和別人做連結，那麼我們根本不會知道有這個網站的存在。在網路上，做的連結越多，就越容易看到那個網頁（或網站），同樣的，若我們腦中某一詞彙與越多詞彙連線，我們就越容易聯想到它，也就越不容易將它遺忘。既然網路的架構與人腦的知識架構如此相似，將知識以網路爲媒介來呈現似乎是個很理所當然的想法。

2.4 電腦網路對數學教育之影響

在一份來自上海的調查報告[17]中提到，科技是否能被普遍的使用，關鍵在於全體之意識，而非物質與金錢。也就是說，在一個社會中，人民是否能夠恰當的使用科技，而沒有濫用或裹足不前的狀況，也不會將科技視爲多麼了不起的東西，和這個社會的人民是否能夠徹底瞭解科技的優缺點有關，但與這個社會的人民是否生活富足、衣食無缺沒有很大的關係。在觀察了許多國家使用「科技」的情形，再比較軟硬體各方面的差異，他們發現，日本善用科技的情形，並不是建立在硬體設備極爲先進，或是可運用資金極爲充裕的條件下，而是基於對科技的優缺點了解甚深，知道在什麼情況下使用科技能收事半功倍之效。

錯誤的使用往往是因爲不瞭解科技的能力，所以老師不知如何使用科技，家長即使願意在經濟上配合，但亦不瞭解科技之實際內涵，導致政府不會給予更多的援助（不論是在實質上或是在精神上）。反觀日本，雖然他們並不是極爲頻繁的在學校的數學課上使用科技，但是因爲他們瞭解科技在教學上的影響力，所以能夠將科技安排在適當的時機出現，以產生最多的正面影響，而這就是「意識」的重要所在了。

正面說詞

雖然太過於依賴電腦會造成學習上不必要的困擾，但完全將電腦摒棄於教學之外卻也不是好事。畢竟電腦是現在學生們所關心、流行的焦點，如果老師不能將其納入教學活動中，只會使自己主持的教學活動顯得老舊而無趣，而學生也必須將時間分配至課業

學習與追求流行兩方面。與其如此，不如將電腦納入教學當中，讓學生在學習課業的同時又能滿足自己對新奇事物的好奇心。

在日本做了研究[16]，將 Cabri 這種繪圖軟體運用在教學當中，藉由謹慎的安排課程內容，及要求學生對其後設認知[1]做頻繁的紀錄， 再利用 1996 年由 Iguchi 和 Suzuki 所發展出的問卷及結果作指標，顯示如此使用繪圖軟體不但沒有副作用，還能提升學生的自信。另外，也有報告[19]指出，將 GAP (Groups, Algorithms and Programming) 用在代數課中，能夠提升學生學習代數及數論的興趣。 而在中國大陸也有報告[14]顯示，使用 GEX (Geometry Expert) 軟體，能夠繪出動態的幾何圖形，以此提供學生一個直觀思考的舞台，讓學生能對幾何產生感覺。另外，在新加坡的報告[20]則指出， MathCad 配合 TMAs (Tutor Marked Assignments) 可提升大學非本科生的數學技巧。還有，圖形計算軟體也能幫助聽障生[18]，以動態圖形來彌補聽覺障礙的問題。

負面說詞

早在二十年前，美國就有實驗暗示[21]：使用電腦的學生計算能力不會較差，似乎讓學生使用電腦是百利而無一弊的行爲，又因科技深入各科學部門，使得人們將數學課程改得更適合科技，學生學到的是如何使用日益複雜的電子儀器。但如果電腦對學習數學有幫助，現在的學生應該可以而且已經學到更多數學，因爲現在的電腦比起以前要高級多了。但現在的學生眞的有學到更多的數

[1]所謂後設認知，在此處是指學生能夠知道自己解題過程的認知能力，也就是學生是否知道自己在解題時所寫下每個步驟的含意，是否知道解題策略及解題方法的使用原因。這就好像是有另一個自己在看著自己做數學，清楚的知道自己在做些什麼。詳細定義參閱[2]

學嗎？沒有！甚至學習科技多過學習數學。問題是，如果在學生學習數學的過程中，讓科技多過了數學，我們留給學生的會是什麼？

其實在學生使用電腦解決一些很簡單的問題時，我們並不能夠確定在使用電腦時，學生會不會對數學本身產生誤解？會不會產生不良解題習慣？事實上，過度使用電腦可能會造成以下幾種情況：

一、學生缺乏概念理解，無法成功建構代數問題。

二、電腦輸出易誤解之資訊。

三、學生發展出不良的解題習慣。

四、數學慣用表示法與計算器表示法易造成學生混淆。

當複雜的數學問題被立即完成，被具體化的概念對學生而言，反而是不易明瞭的。舉例來說，學生都會用電腦畫出 $\sin x$ 的圖形，但是他們對這個函數本身的特性並不了解，甚至是一無所知。也因此，學生由算術進入代數時會有困難，無法掌握代數的本質。

前面討論過，電腦有許多解析度的問題，學生在使用上要特別小心。而在過度接觸具體化的數學問題之後，學生變得沒有足夠的抽象推理能力來應付各種狀況的判斷。

另外，學生變得倚賴機器，不信任自己的計算能力，反而覺得機器所顯示的就是對的，長久仰賴電腦的學生不願意也沒有能力質疑電腦所顯示的結果。而且只要解題時環境許可（准許使用電腦），不論是哪一種題目，學生都會嘗試使用電腦解題，而不會想到其他解題策略。

至於有關計算器 (calculator) 的問題，在使用計算器之後，因爲計算器上所運用的符號和數學習慣符號的意義不同，老師無法糾

正學生的內在思考，使數學符號的學習變得困難。例如在數學中先算出 $p = x * y$，再算 $z = 5 * p$，這在計算器中的按鍵順序卻是 $x*y = p*5 = z$；另外，數學中的 $5*3*3*3$ 在計算器上則用 $5*3$ $===$ 來計算；還有數學中對於小括弧與中括弧分得很清楚，有明確的定義，但在計算器中，則沒有統一的界定。諸如此類的相異處容易造成學生的困惑及錯誤的觀念，但老師卻無能爲力。

關於電腦使用過度，有一種改良的方法：遇到題目先要求學生用紙筆分析，將解題策略及解題步驟列出，再用電腦做複雜的計算部份。這樣的設計，既能顧及學生的抽象思考能力，又能善用電腦的計算速度及記憶量，可說是魚與熊掌兼得的電腦使用方式。

使用電腦有優點也有缺點。不能因爲它的優點而過度使用，也不能因爲它的缺點而將它束之高閣。老師們必須幫助學生判斷，何時不可使用電腦，何時又應該以電腦作爲輔助工具。

第 三 章

教學方法

此處列舉出一些常見的教學方法，針對每種方法的特色做重點介紹，並針對一些相類似之處加以澄清，以提供未修習過教育學理論的讀者做爲參考，並可檢視自己的習性偏好何種教學法。另外針對數學的特色及義務教育中的內容，列出較容易使用的教學法，並提出電腦能提供的輔助。

3.1 教學方法之簡介

雖然教學理論所涵蓋的面向極廣[6]，但是國內大部分的討論多基於心理學理論，所以此處的介紹也是以心理學的觀點佔大多數，另外再加上建構與人本兩個當代的教學觀。

3.1.1 心理學觀點

I. 行爲學習論

I.1 編序教學

編序教學[2][4][3]是行爲論的一個應用，是根據其中的操作制約理論

發展而成，多用於電腦輔助教學。其重點爲：

一、將教材分爲很多小單元。這是編序教學的名稱由來，因爲早期是由一種名爲「普氏機」的教學機器發展而來，所以在學習時間軸上，先後順序就安排得很詳細。

二、在每一小單元之後立即給予評量。這是施行行爲理論所做的準備工作，每一個小單元都是一個概念，而針對每一個概念所設計出的問題都有正確答案，前一題的答案又是下一個概念的基礎。

三、評量之後給予回饋。這是行爲理論的精神所在，利用回饋可加強或削弱學生的行爲，若學生回答正確，則給予增強；若學生回答錯誤，則不給增強，則錯誤回答之行爲會因無增強而削弱。

I.2 精熟學習

精熟學習[2][3][4]是由行爲論發展而出，其理論中心是有關「性向」的解釋。此派論者認爲，性向是學習某定量教材所需之時間，也就是學習速度的指標。他們也認爲，身爲學習者，只要花下「足夠」的時間，沒有什麼是學不會的。其重點爲：

一、設定主要之教學目標。教師必須幫助學習者釐清何者爲必須習得之知識，何者不必急於一時。在目標鎖定之後，才能對學生做出要求。

二、將學習材料分成小單元，並在單元結束時加以測驗。這是精熟學習不可或缺的一部份，如此細分才可精確的界定出學習

的精熟標準。

三、教師應能夠瞭解學生所顯示之錯誤及學習困難。如此才能使用「回饋／校正」程序，確保學生單元學習的最佳品質，並確保學生在次一單元開始前，克服其學習困難。

四、教師應安排各種不同的學習機會以利學習。最廣爲使用的，是提供各式的補救教學，利用種種課餘時間，幫助學生克服問題。

Ⅱ. 認知學習論

所謂認知發展 (cognitive development)[2][4][7]，是指個體自出生後，在適應環境的活動中，對事物的認識，以及面對問題情境時的思維方式與能力表現，隨年齡增長而逐漸改變的歷程。持此論者以爲，學生心智成長有內發性與主動性，且學生認知發展有階段性與普遍性，教師教學應使學生對教材進行認知思考，並應配合學生認知能力的發展程度，剔除課程中不適當作業。此教學理論的一個重要層面就是評量學生學習效果，並給予回饋，使學生瞭解自己的學習程度及錯誤所在。其實施重點爲：

一、若學生在測驗中所答爲正確，則給予發展階段相關之作業。使學生面對較複雜的情境，此情境必須與學習者發展階段相配合，足以構成同化，令其產生調適，從學生之反應決定其推理水準，並觀察學生是否能產生遷移。

二、若學生在測驗中所答爲錯誤，則探討其認知邏輯。學生在學習中所產生的錯誤答案，是由於其認知邏輯與教師不同所

致，教師應探討其內在思維，適時給予指導。

Ⅱ.1 發現式學習

此派論者[2][7][11]認爲，任何學科皆能以某種合理方式、對任何兒童、在任何發展階段施行有效教學，所以他們比較強調「教材應如何教」的問題，認爲學生要學的是原理原則、培養獨立探究與解決問題之能力，主張應讓學生自己去發現「意義」，成爲問題解決者。因此，教師的任務在於協助學生自己發現教材的結構，自己瞭解教材所含的基本概念或教材內容之間的關係。主張此法的教師，會設法安排有利於學生發現各種「結構」的情境，而且必須讓學生自己去發現這些有價值的結構，鼓勵學生自己去操作、探究、對照比較、尋求矛盾，以發現隱含的重要結構。這樣學生才能產生眞正學習，進而才能在往後靈活運用學到的知識。

Ⅱ.2 意義學習論

有意義的學習 (meaningful learning)[2][3][4] 所指的是，學習者能將新訊息與腦中已有之認知結構建立關連。持此論者認爲，不論教學者是將知識直接告知學習者，或是任學習者自己摸索，獨立獲得知識，只要學習者能發現知識的眞正意義，將新知識納入既存的概念體系中，就是有意義的學習了。此派論者多半強調：並非所有的發現式學習都是有意義的，接受式的學習也不全是無意義的。施行重點爲：

一、進入主題之前提供前導架構。 前導架構是一套以學習者已熟習的知識爲基礎而設計的有組織的材料，有助於學習者瞭解新教材。前導架構多半是以學生既有的先備知識爲基礎，使之與計畫學習的新知識發生連結，並將計畫學習的新知識提

出一個具體的架構。

二、在呈現教材時需具備發散及統合兩部分。若是以講解爲主，則需從一般概念的說明，逐漸進入詳細內容的講解，並將發展出的知識再前後連接起來，成爲一個有組織的、具有統整性與調和性的知識整體。

三、在講課中安排重要問題。必要時可稍停頓，以向學生提示問題，所提問題可激發學生，亦可使教學與需求相關。

四、課後作業鼓勵學生從不同觀點思考。可以用問問題、指定作業、鼓勵獨立研究等方式，使學生將課堂所學應用於校外生活，勿給學生確切唯一之結論。

Ⅲ. 互動學習論

Ⅲ.1 社會學習論

社會學習論[4][7]是將認知心理學和行爲矯正原則相結合而產生的，在人格研究、輔導、心理治療與教育等方面有較多貢獻。在學習方面，這個理論著重於人類如何由社會狀況中發展學習。此派論者認爲：所謂的心理功能是人與環境決定因素之間的不斷交互作用，他們強調一個人所暴露的環境並不是偶然的，該環境是經由選擇，並且透過他們自己的行爲加以改變的。這個觀點提供了解釋觀察學習如何發生，以及我們如何學習去調整自己的行爲，它強調後天可改變之環境因素對行爲變化的重要性，及社會行爲養成的隨機性、普遍性及持久性。其施行重點爲：

一、觀察學習。示範者的行爲刺激都在觀察者的心中留下印象，更甚者能轉譯成語言符號，經過一段時日後再回憶起來，就是一種延宕性的模仿。

二、付諸行動（模仿）。這裡的模仿並不是機械式的反應，強調觀察者的內在認知歷程，此時觀察者憑著記憶保存之符號，加以校正而表現類似行爲，至此才算是學會了示範行爲。

三、動機與增強。學習與實際表現不同，觀察者不見得實際表現已習得的行爲，增強作用可影響個人實際模仿行爲的意願，但此處的增強並不只是外在的獎懲，而是以個人的自我增強來控制大部分的行爲。

3.1.2 人本導向教學觀

持此論者[2][7]認爲，學習有兩方面，一爲獲得新教材，另爲自己將此新教材個人化。新教材本身並不具特殊意義，是學生個人將意義注入教材中，因此教學的重點在於如何幫助學生從教材中得到個人的意義。因爲他們認爲「人是自己行爲的決定者，他們不受制於環境，能自由對生活的品質做選擇」，所以其教育原則是：

一、自我指引。學生學習他需要的和想知道的東西。

二、需要並知道如何去學。學習如何去學比獲得事實性的知識更重要。

三、自我評估。學生自己的評估是唯一對其工作的有意義判斷。

四、情意的重要性。學習如何去感覺、去感受知識的發展情境，是與學習如何去思想一樣重要的。

五、免於威脅。只有當學生未感受到威脅時學習才有可能。

人本主義教師不但扮演協助者的角色，還必須使教室氣氛適合學習，扮演臨床心理學家的角色，目的在使學生成爲知識的主動追求者，而不是被動的接受者。在教學過程中，教師以生活周遭所遇到的問題作爲學習內容，提供豐富的資料來源，幫助學生學習如何對自己問問題，及如何自行解答問題。教師亦利用啓發性活動，使學生獲得經驗性的學習。其教學步驟爲：

一、每個學生設定自己的工作計畫，並簽訂契約。

二、學生針對自己的計畫進行工作或研究。

三、學生經由研究或工作中來教導自己，且彼此相互教導。

四、針對個人、團體或班級的問題進行討論。

五、評鑑乃由學生自己設定標準、自己進行，且爲教師所尊重，故無需爲了達到成功而採取欺騙手段。

由於對人本主義的實際運作情形不是很瞭解，在數學教學上沒有找到恰當的連結。或許教師在出題上可以安排多數題任選少數題回答，讓學生選自己願意做的題目。

3.1.3 建構導向教學觀

該理論[1][4][10]認爲所謂的學習是指學習者以其現有的或既有的知識，建構新概念的主動過程。換言之，學習者自行選擇、轉換所

接觸的資訊，然後進行假設、決策等心智活動。學生自動地尋求一些新的資訊、觀念和經驗，來和已存在最適合的知識相連結起來。但是新資訊和自己已有知識的鏈結，卻經常不符合老師的期望，所以學習的重點是要修正既存的知識。在施行上的特色是：

一、強調先備知識，對學習做規劃。學生在正式學習之前，許多個人理論已存在他們心中了。這種情形會影響學生對教學內容的解釋，有時學生甚至到該科學期結束時仍不放棄自己原有的解釋。先備概念也影響學生對於他們所念內容的記憶，他們會遺忘那些和個人概念不吻合的部分。

二、架構知識體系（釐清命題間之關連）。因爲學生所可能產生的迷思概念 (misconception) 因人而異，身爲老師，在教導之前應該先將主要概念與其他概念間的關連釐清，以便幫助學生找出迷思概念，更進一步的幫助學生破除迷思概念。

三、老師協助學生發現原理原則，促成其瞭解，將新概念架構起來。這是指新知識並未與學習者的舊有經驗相違背時，老師要引導學生將經驗統整、歸納，化爲一般性、可通用的原理原則，以產生更容易遷移的知識架構。

四、重視迷思概念。在遇到學生產生迷思概念時，不是一句錯了就可以帶過去的，身爲老師應該能夠看出錯誤概念中，隱藏怎樣的（錯誤的）理論架構，再從這個理論架構中提出反例，刺激學生的學習動機。只要學生問出「爲什麼」，就不用擔心學生的學習成果了。

五、不直接教導學生。 因爲知識架構是學生自己建造出來的，不論老師怎麼苦口婆心的述說，與過去建立架構相違背的知識是無法成爲學生知識架構中的一部份的。提供學生學習的動機，讓學生自己學習是比較有效的方法。

錨式學習

錨式學習 (Anchoring Learning)[1][4] 是由美國的認知科技群 (CTGV) 所提出的，是以建構論爲基礎所發展出來的教學法。他們認爲，要克服內隱知識所造成的鴻溝，有意義、問題導向的學習方式效果較好。所謂內隱知識是指：可以被想起，但卻無法直接應用在解決相關問題上的知識。而這種使生活和學習結合爲一的教學方式，便被稱爲錨式學習。此法重點是：

一、以敘述故事的方式來呈現資料。 創造出一利於問題解決、內容豐富且有意義的學習情境，著重在生活化的個案，呈現眞實的問題空間。

二、產出性的結構。除了要求題目的嚴謹外， 也不告知學習者下一步的作法，留給學習者思考的空間，並自己嘗試解決問題。

三、隱藏資料的設計。以嵌入的方式將資料隱藏在故事中， 並且不明示學習者哪些資料是解題時需要使用的，學生必須自己從故事中「找出」相關的資訊以解決問題。

四、配對及多樣學科領域。 用不同的故事提供學生重複演練的機會，以達成遷移的效果；在同一個故事中，提供多種學科的

知識，使知識在不同學科遷移，供學習者綜合思考、整合運用。

故事範例：悉達河之旅

故事以主人翁賈斯伯打算以自己的馬達船完成悉達河之旅爲起點。他在地圖上規劃好航程、收聽天氣預報、檢查油存量，待一切就緒後，正式出發。故事繼續下去，賈斯伯在賴利的碼頭停下來加油。這時賈斯伯發現自己的口袋中只有 20 元美金可以買油。在此，賴利是隱藏式資料的提供者。例如：他可應賈斯伯的要求，告訴他航道上所有加油站的位置。加完油後，賈斯伯繼續航行，途中卻不幸把船碰壞了。他必須把船划到另一個碼頭，才能修好。於是他到了賽爾的船塢。賽爾除了修船外，亦可提供有關船的速度、耗油量、及載油量（12 加侖）等隱藏式資料。修船時，賈斯伯又發現船燈也無法正常運作，因此，必須思考如何才能在天黑之前回到起點。故事到此告一段落，而學生也必須站在賈斯伯的角度，組合必要的隱藏資料，做出一連串的決策（包括：怎樣找尋最短航道、如何節省燃油等），以解決問題，達成學習目標。

3.2 相類似之教學法的比較

對於教育學專家以外的學者看來，上述之種種教學法有其相類似之處。亦有相矛盾之處，這裡的情形與數學中的矛盾是不一樣的，相矛盾並不代表有一方是錯誤；相類似也不代表所強調的重點相同。這些教學法並無對錯之分，只是在施行上各有其注重之處，因爲教育牽涉到人的多樣性，教育方法也就理所當然的有許多值得注意的面向。以下就不同教學法的相似之處加以討論。

3.2.1 將教材分成很多小單元的教學法

編序教學與精熟教學都強調將教材分成很細小的單元。編序教學所強調的是每一個小單元都是一個概念，前一個概念是後一個概念的基礎。精熟教學則強調由此界定精熟的標準，能夠確切知道學生不會的「點」，才能使用「回饋／校正」的程序。

3.2.2 強調學生自己建立知識架構的教學法

諸如認知發展論中的意義學習論與發現式學習、互動學習論中的社會學習論、人本導向教學觀及建構導向教學觀等，都認爲知識要經由學生自己建立起來才會有用。其中，意義學習論強調：在進入主題之前要先提供前導架構，呈現主題時應先從宏觀的角度看，再教導細節，最後再回到宏觀。社會學習論則強調學生的觀察是學習的重要部分。建構學習論強調學生原先所具備的知識和新知識之間的關係，並重視迷思概念。人本主義則強調自我指引及自我評估，此時學習內容由學生自己決定。發現式學習強調學生自己「發現」教材的結構，成爲問題解決者。

3.2.3 提及先備知識及前導架構的教學法

編序教學、建構學習理論及意義學習論都提到了學生原本所具備的知識。編序教學著重在每個小概念的學習，老師會教導概念之間的連結。建構學習理論則著重在學生原本的知識架構，與編序教學比起來較爲宏觀，並注重老師引導之後學生的知識架構之變化情形。意義學習論與其他兩者區別較明顯，前面兩者強調的是「先備知識」，而意義學習論則強調「前導架構」，著重在老師

上課時要先以有組織的方式，複習學習者應該熟習的知識，以喚起學生的記憶。

3.2.4 不直接教導學生的教學法

建構學習理論及發現學習論都強調不要直接將知識「灌輸」給學生，但建構學習理論強調學生的先備知識，認爲新概念要和舊概念有適當的連結。而發現學習論則強調安排有利於學生發現各種結構的情境，以及培養解決問題的能力。

3.3 數學本身的特色及其適用的教學法

數學這種學科有什麼地方和別的學科不同呢？在上面所提的諸多教學法中，哪些適合用在數學科教學當中呢？

3.3.1 數學是一種語言

學生們常常會問老師：「學數學有什麼用？」尤其在越抽象的部分，越是容易出現這種疑問。其實，現在我們所享用的一切科技，其發展過程都和數學脫離不了關係，我們常常拿數學中已經發展出的模型，套用在自然科學及社會科學上。像是 Fourier 轉換與 wavelet 轉換之類的頻譜分析模型，就被廣泛的使用在各種訊號分析處理上面。許許多多的數學模型在發展之初，並沒有想說它可以用在哪裡，有的是因爲某些學科的研究需要（多半是天文學或者是物理學），有的是因爲數學家們覺得有趣，因而發展出了一套又一套的數學。這時候，這些數學其實是很「純粹」的，但是過了不久，就會有人發現，原來某些現象可以用數學的某些部分來解釋。

這時，與其說數學是一門學問，不如說是一種語言，一種用來表達的工具，用來闡釋內心的想法。就像我們日常所說的話語及所用的文字，它們本身是很抽象的概念，但是我們可以用它們來表示自己心中的想法。在沒有表達工具的時候（數學還沒有發展到那個地步），我們會覺得對某些現象說不清楚，或是覺得還不是很瞭解，知識無法順利而完整的傳遞。但是有了數學，我們會說，就是這樣，就是這套東西，這樣解釋就對了！當我們把數學看成是一種語言，學習數學的重要性就不言而喻了。如果沒有學習到足夠的數學，有些自然科學或社會科學的知識就會無法理解，無法吸收，也沒有辦法從不同的知識領域中看到共通點，更無法做出融會貫通的動作，也會因此而限制了自己的發展潛能與方向。

在《物理之美》這本書中，費曼曾寫道：「我們所有的定律，每一條都是相當複雜而深奧的數學中的純數學敘述……爲什麼？我一點概念也沒有。」其後又說：「那些不了解數學的人，很難對自然的美感，那最深刻的美感，能夠眞正有所體會。」[12]我們嘗試用這種觀點（數學是一種語言）去解釋費曼的疑問。因爲數學是一種語言，若將數學排除，自然界的現象將無法描述。所謂的模型，就是以數學爲語言所組成的句子及文章。想用最理想的模型來描述自然界的現象，就像是想用最洗鍊的句子來描述心情，若不是使用語言中最精華、最核心的部分，是無法辦到的。而數學中最精華的部分，同時也是最抽象、最「純粹」的部分。若不能對數學最核心的部分有所了解，也就無法觸碰到語言所蘊含的最深處的含意，自然無法體會隱藏在深處的美感。

3.3.2 義務教育中數學科的內容

我們要問：在國民義務教育中，數學教育到底要學生學會什麼？爲什麼學生要學習數學？老師們希望學生學到什麼？老師們希望學生學了數學之後有些什麼樣的表現？或是有些什麼樣的改變？

從算籌與算盤的功用和中國古代算學典籍來看，中國人自古以來學習數學就是爲了解決具體實際的問題。但是隨著教育目標的改變，現在的學生在學完了十二年數學之後，卻只會將加減乘除用在日常生活當中，至於其他，則是考過就忘了。這種趨勢似乎意味著，我們應該重新定義學生學習數學的目的，及學生學習數學的範圍。在國民義務教育中的數學，指的應是所有中華民國國民平均而言都用得到的數學，簡言之或可稱爲算術。若是要求學生學習一些大部分的人一生都用不到的知識，就是太過於強求了。或許我們要考慮學生未來的發展潛能，但是若在潛能尚未發展之前，學習興趣就被一連串的挫折給抹煞了，不如讓學生仔細的學習當下所能接受的範圍。畢竟在社經條件的許可下，現在的教育是以學生爲主體的。

對大部分的人（數學家除外）而言，數學只是一種工具，一種人與人之間互相溝通的工具：這是「一」斤的豬肉、那件洋裝要「三千」元、火車「還要七分鐘」才會來、與地球「最近」的恆星距地球大約「四」光年、人體中的 DNA 是以「雙螺旋」的型態存在、……。這些出現在我們生活周遭的話語，都是以數學爲傳達的媒介，也就是以數學爲語言的一部份。在我們學習語言的時候（不論是母語、外語），沒有人會要求每個學生都能寫出精湛且具深意的詩篇。因爲大家心中都有一個共識：語言最主要的功能

是「溝通」，所以我們將最低要求放在「能夠溝通」，我們並不要求太多，因爲那是沒有必要的。將數學放在語言的角度來看也是一樣的道理，只要學生能夠學會用數學表達他們想要表達的事情，能夠懂得他人用數學表達的事情，就已經足夠了。至於那些數學家們認爲很棒、很重要的理論，則只是供大多數人欣賞及引用，而不是研究用的。眞正研究這些理論的人（所謂的數學家）還不到全部人口的百分之一。對大多數人而言，這些理論就像曹雪芹的紅樓夢、莎士比亞的羅蜜歐與茱麗葉、羅丹的沈思者雕像、或是貝多芬的命運一樣；我們會去欣賞它們，也會用它們來形容自己的想法。但卻不會去分析文章的章法、雕塑的技巧、樂曲的樂理。在這方面，數學更像一門藝術，教人如何欣賞遠比教人如何做出成品要來得容易且有意義多了。

3.3.3 以學習階層來分

在小學階段，數學課程主要是在教導學生一些基本的定義及基礎的演算方法。在這個時候，並沒有太多道理可說，很多事情沒有所謂的「爲什麼」，就像剛開始學習語文時一樣，每個字代表什麼意義並沒有特別的原因。不過在這個時候，有許多有趣的故事可說，因爲數學並不是憑空掉下來的，而且關於它的發展還有明確的文字記載。所以在這個階段，應該多使用編序教學及精熟學習，使學生能夠對基本定義及運算方法達到足夠熟練的程度，以便於在生活中能靈活使用，並能瞭解他人所言的淺顯數學用語。另外，某些非常直觀的部分，可以運用引導式的發現學習法，讓學生經歷一下數學發展的歷程及體會創造的樂趣。

在中學階段，數學課程主要是以小學所學的內容爲基礎，除了在深度方面繼續加強外，還要求能做廣度方面的知識遷移，此時就有許多概念需要連結。但是並不是說這裡就不需要將技能部分練習純熟，只是概念的理解在這個階段更加重要。如果說在小學階段主要是在培養學生對數學的「文化素養」，那麼在中學階段就是在維持學生對數學的喜愛與探索的慾望。在這個時候，意義學習法、建構主義的學習法、情境學習（錨式教學）和社會學習，是比較適合的學習方法，不但能反覆的在教學過程中製造遷移的機會，還能滿足學生喜愛發問的天性。而且在這個階段的學生，比較能夠在觀察老師的行爲之後做出思考的動作，不只是能夠模仿老師的舉動，還能用自己的語言加以闡述，並形成自己能夠運用（遷移）的知識。

3.3.4 以學習內容來分

在幾何方面，因爲平面幾何是很具體、很直觀的，而且在發展的過程當中，一直是以生活上的需要而產生的。所以在教學時可以用發現學習法，讓學生「從做中學」，也適合用錨式教學法，讓學生在實際的情境中運用所學的知識。 在這個部分，「電腦繪圖」可以幫助學生繪出精確的圖形，並能讓學生利用電腦的模擬功能，能夠更深刻的瞭解圖形之間的關係。

在算術方面，因爲這部分大多屬於「技能」方面，所以編序教學法和精熟教學法是比較適合的。至於電腦及計算器，則比較不適合在此部分的學習中出現，因爲人總是有些許的惰性，若允許學生用電腦或計算器，學生就會自動放棄反覆練習的機會，而用

電子產品計算，交差了事。

至於代數方面，則可區分爲技能與認知兩大方面：類似解方程式的部份屬於技能方面；而如何列出方程式則屬於認知方面。其中在教屬於技能方面的部份時，適合用編序教學法及精熟教學法，讓學生能夠對列出的式子有信心，知道只要能夠把式子列出來，自己就有解決的能力。至於在教屬於認知方面的部分時，則適合使用建構學習理論、錨式學習、和意義學習論，讓學生能夠對於文字敘述與方程式之間的關係產生自己的認知架構，並可順帶介紹一些其他科目（如理化）的相關應用。在這方面，電腦能夠提供足夠多的題目，供技能方面教學使用，還能提供足夠的情境及實驗程式，讓學生能獲得夠多的練習以供自我概念的架構。

另外在機率統計方面，則因爲在媒體中時常出現，學生比較容易接觸、感受到，所以用社會學習的方法來教，如此安排可善用環境中的資源，學生有足夠多可觀察的對象，也有足夠多的機會互相討論，將知識轉譯成自己的語言符號。在這方面，電腦不但能夠提供足夠的資訊，讓學生觀察及討論，還可以做即時且大量的繁複計算，讓學生能夠在短時間內驗證自己的想法。

第 四 章

將電腦網路應用在數學教學上

既然每種教學法都有自己的特色，老師們爲了配合不同的學生，勢必需要在不同的時機使用不同的教學法。但是老師們不可能同時精熟所有的教學法，一定有些教學法是某些老師熟悉，但某些老師卻極少使用的。但不常使用一種教學法並不代表絕對不會去使用它，在手邊資料不足的情況下，很可能會影響到此種教學法的施行成效，連帶的影響到老師們選用教學法的意願。另外，許多師資培育機構都極爲肯定「討論」的效果，既然討論對學習有效，同樣的對於教學成果的檢討也會有效。基於提供資料及討論機會，我設想了一個網路互動環境，並針對這個環境可能遇到的問題加以討論。

4.1 數式的呈現問題

將數學知識放在網路上時，會有一個很重要的問題：如何顯示類似 $\sqrt{2}$ 這樣的式子？爲什麼會產生這樣的問題呢？用電腦輸入或讀出文字時，多半是以一行一行的文字敘述爲主。從電腦早期的發

展來看，在圖形介面尚未出現時，我們所能作的文書處理是行距、字距固定的，在本質上是以「行」爲根本，我們只是把長長的一行文字在我們希望的地方截斷罷了。也就是說，電腦所能處理的，基本上是一串一維的訊息，但數學式子卻是二維圖像化的訊息，所以我們必須把這些圖像變成一維的訊息，才能順利的被電腦表示出來。現在的繪圖軟體，只是指明在哪一個像素的地方是什麼顏色，但是若要將數學式子寫進文字當中，勢必需要隨著文字變換大小及基準點，這造成了在電腦中呈現數學式子的困難中心。

若只是網頁上呈現數學式，那只要把數學式用圖形展現，貼在適當的地方即可，但若是考慮到老師之間互相的聯繫，或是老師們與管理者之間的聯繫，就需要許多檔案轉換與協定。若老師們自己已經做好了圖文並茂的檔案，像是用 MicroSoft Office 系統做出的、用數學軟體（如：Maple, Mathematica, MathEd, MathType, Scientific Workplace, ……）做出的、用數學編輯軟體做出的、……，都可以先轉換成 HTML 格式，再將整個 HTML 檔連帶所有圖片檔壓縮成 ZIP 格式，將此壓縮檔上傳即可。例如黃明峰教授與逢甲大學其他五位教授合作寫成的逢甲大學微積分教學輔助環境[1]，即是以 Maple 寫成，再轉成 HTML 格式；再例如我自己所寫的凌波初步筆記[2]，是以 Word 寫成，轉成 HTML 格式。此種做法若是網站管理者本身編寫網頁，當然是沒什麼問題，但是若是其他使用者要上傳網頁，就有些地方需要溝通協調了。其中最迫切的問題是，當上傳的內容不只一個檔案時，網頁製作者必須要告訴網站管理者哪一個檔案是「首頁」，就像一棵樹，只要能知道樹根在

[1] 網址是：http://140.134.140.20

[2] 詳見附錄 A

哪裡，就能很明確的找到整棵樹。或許在協調上，網站管理者可以強制規定上傳的首頁名稱（像是 index.html 或是 Welcome.html），或是網頁製作者用某種方法（像是在網頁上填寫，或是寄封電子郵件）告訴網站管理者。

當然，這樣的方式在目前是最方便、可行的，但仍有某些問題沒有解決：

一、無法搜尋數學式。 因爲數學式子都是以圖形的方式儲存，電腦無法分辨哪個圖形是 $\sqrt{2}$，哪個圖形是 $\sqrt{3}$。

二、列印品質無法維持。 因爲電腦螢幕的解析度最多只有 100 dpi，但印表機的解析度最低是 300 dpi，放在網頁上的圖形爲了顧及頻寬，勢必以螢幕顯示爲主，但如此一來，若想將網頁印出，就會發現存成圖形的數學式子沒有螢幕上看起來清楚、好看。

三、不可轉換。這裡有兩種情形： 第一種，在公元 2000 年左右，將會有一套關於數學式子的協定 (MathML)，只要寫成此種規格，電腦就能夠「看」懂數學了，但是這種規格太過複雜，需要一些轉換的介面，將現在數學軟體中的式子轉成協定的規格。但若數學式子是以圖形的方式儲存，將無法轉換成協定的規格。第二種情形，如果網頁的閱讀者想要拿數學式子做計算，要重新輸入一次，因爲數學軟體無法辨認圖形中的數學式子。

另外，若老師們只是想在純文字的環境裡（像是 BBS、E-mail 等）寫一些簡短的數學式子，就不用大費周章的開啓上述編輯軟

體，只要大家都看得懂就可以了。此時可在網路上提供數學式子與表示方式的對照表，這種表示方式可以直接選用某種數學軟體（如： Maple）之表示法（例如陳福祥老師的網路微積分教學[3]就是用到 Mathematica 作爲統一的格式），一來可以維持表示方法的一致性，至少是定義良好的；二來可以直接剪貼到數學軟體上執行。重點是讓所有的使用者都可以看得懂，也容易編寫。所以在這裡，並不建議使用功能強大的數學常用編輯軟體 TEX的語法，因爲在 TEX中，使用者可經由巨集重新定義指令，所以習慣使用 TEX的人，都有一套自己習慣的、重新定義過的指令，但這種指令對其他人而言或許不具任何意義，另外對於不習慣使用 TEX的人而言，它的語法稍嫌複雜，較難入手。

4.2 適性網路教材

近年來中學教科書逐漸開放，教師自主權增加，未來制式教科書將不存在，取而代之的是綱要式的表單，只明列學生所應該知道的學科知識，而不強制老師應該用什麼順序，該怎麼教，只要在一年之後，學生能把「該學的」都學會就行了。這樣的改變，使得教師有機會將專業知能展現在課程及教學的安排上，也使得「因材施教」更能被落實在國民義務教育上。所謂的因材施教，並不是說某些學生的程度就是如此，所以不能對他們要求太高，這樣爲不同特性的學生設立不同目標的作法，並不是「因材施教」的初衷。以前孔子提出因材施教的典範時，施行的作法是當不同學生問「仁」時，因應不同學生的不同心性而有不同的指導，但是最

[3]網址是：http://calculus.math.nctu.edu.tw/

終目的是一樣的。他並沒有說某位學生是達不到「仁」的，就自動幫他把目的降一級。

最近有學者提出了「多元智慧論」[9]，指出不同的人應該用不同的教法，以適合其智慧特性。只要教法切中「要害」，學生就能夠很輕易的吸收知識。所以在數學當中，我們要先區分清楚，什麼是中學學生應該、一定要學會的數學知識，再就這些知識著手，爲不同特性的學生安排不同的學習方法，讓他們最後都能學會我們認爲一定要學會的數學。

在教材的安排上，以書本與網路並行，會是比較能夠允許個別化學習的方式。讓各種教學法的使用者都能以書本爲基礎，再運用網路上所提供的各式資料，發揮各種教學法的特色，以達到學習的目的。先談書本的部分。書本是以學生爲主要閱讀對象，書本中所列出的，是學生在這一年中應該學會的全部數學知識，與這些知識的些許情意部分。其中，各種知識的排列順序並不是重點，重點是書上附有這些數學知識的概念圖，以表示這些數學知識之間的關係，老師可以據此概念圖發展出適合學生的教學順序。也就是說，學習順序將不會制式的從第一頁走到最後一頁，老師可以跳著教，學生也可以跳著學。至於例題，則不需要在書本中佔太多篇幅，只要舉出具代表性的例子，使抽象的知識具體化。而習題，則是老師該提供的練習。不同的教學法會使用到不同種類、不同型態的習題；不同特性的學生也需要不同份量、不同深度的習題。因此，將習題獨立於書本之外，視不同時機與對象來選用，是較爲適當的作法。

再談網路的部分。網路是以輔助老師或對教材內容有興趣的學生爲主要目的，應該提供：

一、整個中學數學知識的多層架構。 此處所囊括的範圍遠較書本深入且廣泛，以提供額外的教材給「想要知道更多」的學生及「想要準備更多」的老師們。這裡要說明一下，多層架構的編排方式，是爲了預防一般編寫教材時見樹不見林的缺憾，利用網路上超文連結 (hyperlink) 的特性，能夠把整個知識分層的展示出來，讓老師們能夠很清楚的知道學生學習時應該具備的先備知識爲何，也讓老師能夠在教學前有足夠的資訊來規劃上課的內容及進度。對學生而言，這裡的安排應是較適合自學的架構。學生可依照自己的興趣及學習動機，選擇不同的學習途徑，並可隨時依自己的需要補充本身所欠缺的知識。這裡甚至可以在數學知識以外加入其他學科所牽涉到的知識，做爲情意教學的一部份，讓學生能夠感受到數學這種知識是由「人」所發展出來，並不是冷冰冰躺在那裡的；數學也是由許多與歷史、人物、社會相關的故事交織而成的。舉例來說，高斯爲什麼會發展出最小平方法 (least square method)[4]，在這同時自然科學界發生了什麼事，這時候的政治背景又是如何，同時代有什麼著名的畫家、音樂家、文學家、科學家、……，同地區在前後百年間所出現的數學家又是哪些。這些時空背景知識可讓老師們盡情查閱所需資訊，作爲上課動機引發的例子，也可讓學生架構出更完整牢固、更易於遷徙的知識。

[4]爲了計算一個新發現小行星的軌跡。

二、手製教具之模型（或是教具所在地）。讓想要親自動手的老師們能夠省去不必要的錯誤嘗試，也可以拿一些較簡單的樣版讓學生自己動手做做看，增加學生在肢體及視覺方面的印象。另外，有些模型很不容易做出來，或是做出來之後很不容易保存，如果有些學校或是老師擁有這些模型，願意提供大家使用，就把這些模型的樣子及所在學校放在網頁上，讓老師們能夠共享這些資源。

三、虛擬教具及數學實驗之程式。老師們在課堂上常常需要繪製一些幾何圖形，但在黑板上總是無法將圖形畫得很精確，結果該交於一點的沒有相交，該垂直的看來總是不那麼垂直。如果能夠利用電腦軟體的繪圖功能，就能在課堂上清楚的展現出圖形的特色。另外，有些關於數字的特色，比如說 $\sqrt{2}$ 寫成小數形式時，小數點後的數字是不會循環的，學生有時會質疑這一點，此時若是有電腦程式能夠迅速的運用十分逼近法算出小數點下數十位，學生就會相信了。不但能將這個觀念記得特別清楚，學生還能體會出所謂的「十進位制」到底是怎麼一回事，也能瞭解小數點後面的數字所代表的意義，若是學生能接受，可趁此機會利用電腦程式輔助說明二進位、八進位、十六進位制的意義，並順帶提起數線上的點是很抽象的，我們在描述數線上的點時，要先確定進位制度，才能確定這個點叫做什麼。將這些電腦所做出的虛擬教具放在網路上，當老師不用重複的花時間製作這些東西，而能夠在需要的時候直接取得並使用它們時，老師們會更頻繁的使用這些教學輔助工具，學生也能更具體的接觸知識。至於數學實

驗，則是提供給有興趣的學生一個「玩耍」的場所，使學生更願意接觸數學，並讓學生從「實驗」與「操作」中得到更深刻的學習。

四、題庫。既然在書本中沒有列入大量的練習題，老師就應該要負起「出題」的工作。這樣的設計是爲了能夠使習題更適合學生，不同特性的學生，老師能夠提供不同的練習機會，讓學生在最短的時間內學會該學的知識。所以在網路上，應該有各式各樣的題目，不但種類多（是非、選擇、填充、計算、發散思考、歸納整理、隱藏線索……等等），數目也多，足以供給不同的需求。雖然現在網路上已經有許多考題的蒐集，但是這裡所要提供的是能用在教學上，能用來出成習題，出成考題的編排，還要用不同的方式展現出同樣的知識範圍，以適合不同特性的學生。

五、國內外教育界或數學界之訊息。這部分是爲了使老師們能夠在編寫教材之餘，也能夠知道在切身的教育界及數學界發生了什麼大事，只要老師們能夠經常去接觸這些新資訊，就不會變成學生眼中的「老古板」，不會太落伍。另外，如果老師們願意的話，這類訊息可以以電子報的方式，用電子郵件寄給想知道訊息又受不了網路太慢的老師們。

六、聊天室（討論區）與留言版（老師部分）。許多研究指出，老師們經由互相討論，能夠看到自己的盲點，並能幫助自我成長。這是爲了不同目的所設的兩種發言區，聊天室及討論區是爲了老師們彼此想要交換教學心得，或是有問題提出、有

得意作品提出時所設立的發言區，其中聊天室是即時的，而討論區則是非即時且分主題的發言區。而留言版則是當老師們有話想要立刻告訴網路維修人員時，最快速便捷的管道，而且這些發言都會留下記錄，在一段時間過後，就可以做成現在網路上常見的「FAQ」，方便有同樣需要的老師可以很快的找到想要的資訊。

七、討論區、留言版與郵件論壇（學生部分）。老師們常常會發現，有時候一個觀念說了很多遍，有某些學生還是不懂，但是在下課之後，他們去請教那些會了的同學，卻往往一點就通。當然，這個現象牽涉到許多層面，可能是學生在面對同儕的時候心情比較放鬆，就比較能夠思考問題；也可能是學生們能用彼此熟悉的詮釋方法，使概念比較容易被瞭解；還可能因爲他們有同樣的迷思概念，只是因爲其中某些同學自己想清楚了，而某些還沒，所以一點就通，反而是老師很可能找不到學生的迷思概念發生處。不論是什麼原因，都指向一個共同的現象：同學之間的「相互」討論對學習很有幫助。這裡強調「相互」兩個字，是因爲如果討論不是自然發生，而是被規定的發言，有可能出現對學習完全沒有改善的結果。在網路上設立討論區、留言版甚至是郵件論壇不但能夠提供學生們互相討論的園地，還能預期使用者都是自願且樂於與人討論分享的學生。這裡多設計了郵件論壇，是因爲學生們的問題有時比較有時效性，而且身爲學生也比較有時間收發電子郵件。當然，這裡也歡迎老師們加入。

八、特殊教學法資源（如：隱含資料的故事、學生容易產生的迷思、引導思考時所拋出的暗示等）。這部分是適性網路教材的一個特色，有時候老師們會想要使用一般比較少用到的教學法，此時往往需要許多教材資源。但由於這些資源都不易獲得，造成老師們常會放棄這樣的想法，而使學生喪失了一個很不一樣的學習機會。這裡的設計就是想避免這種遺憾產生，盡可能的提供各式教學上所需要的教材及資訊，鼓勵老師們做多方面的嘗試。

4.3 落實教材計畫

由於網站的維護與更新需要固定的人力支援，所以需要有些許收入以支付維護網站所花費之人力物力。但若將網站一開始即設成使用者付費，大概就不會有太多人會使用它，所以必須分階段施行，而且也不能以個人爲主要單位，那樣太過於分散而不易管理。我所設想的步驟如下：

一、向教育行政單位申請兩年至三年的經費。

二、第一年將網路架構及書本完成。

三、第二年至第三年至學校接洽，向校方推薦此套教材，免費提供老師們在課堂上使用。

四、第四年以後，以租用的方式以校爲單位收取租金以維持網路之生存，或許用某種小程式做一道類似密碼通行之類的東西，安裝在固定的電腦上，一年收取一次租金，訂定合約。

五、爲了收集更新資訊，可定期開研討會，邀請使用老師們出席，交換使用心得。並舉辦出題比賽，讓老師們就特定主題出題目，並做說明，再用學生爲施測對象，看題目的信度及效度。信度及效度足夠者，將題目收編至題庫中，並提供免費電話撥接時數給老師（以爲鼓勵）。

六、這個網路系統的維持需要：意見與內容之整理與更新之人員（熟悉數學與教育）、系統管理者、網頁設計者（動畫人員、美工人員、網路程式人員）、與學校接洽之管理人員。其中，在第一年所需的內容規劃人員較多，但在網路及書本架構完成之後，只需要幾位做日後的整理即可。

第 五 章

結論與展望

5.1 結論

電腦這種科技產物與數學之間的關係是很密切的。它在發展之初，就是因爲數學上的需要而產生的，現在，當電腦發展出一個規模，我們再度需要電腦——在數學教育方面。在同時講求個別差異與效率的現在，一位老師要面對數十位不同學習背景的學生是應接不暇的。現在的學生在學習數學的時候，不再接受「背起來」這樣的要求，大家被允許可以問「爲什麼」，這時，對數學教育就有許多要求產生了：幾何圖形最好要能看得到、立體的東西最好要能摸得著、畫圓要像個圓、平行線看起來就要平行、太複雜的計算最好能夠找代打、不瞭解的數學概念最好能做些實驗玩玩看、數學問題最好能夠是多樣性的、別人發現過的定理我也可以自己試著發現、想多知道一些有關數學的故事、想多瞭解數學的用途、……。這些看來都是合理的，但卻不是容易做到的事情。將電腦納入考慮範圍之後，事情變得比較可行，這些要求變得比較容易達成。

有了電腦，就能畫出精確的幾何圖形，讓學生易於瞭解；有了電腦，就能模擬出三維的物體，讓學生容易想像；有了電腦，複雜的計算就不再是問題；有了電腦，數學就可以像其他自然科學一樣實驗；有了電腦，就有足夠大的資料庫能夠儲存足夠多的問題、資料與故事；有了電腦，……。

電腦，使數學教育變得更容易順應不同的需求；而網路，則使電腦能夠分工合作，互通聲息，讓訊息的傳遞更爲便利。人們可以不用電腦教導數學，但有了電腦，數學教育更容易達成人們的期望。?

5.2 學科知識的創意——不以既成的架構來建構自己的知識

我們似乎總是認爲臺灣所教育出來的學生沒有什麼創意，沒有什麼主動思考的能力。所以許多人就主張，應該從小培養創造力，從小訓練他們的主動思考能力。這些主張就變成了不要讓他們花太多時間在課業學習上，應該多規劃一些思考的時間。這些想法並沒有所謂對錯，但在許多時候，正統的學科知識仍然扮演著相當重要的地位。先來看看創意[13]的部分，這裡我們把創意的範圍縮小到學科知識中的創意，這種創意在許多方面都需要足夠的學科知識的幫助。

第一，知識幫助一個人瞭解某個領域中的已知作品，它使我們免去了重新發明輪子的「無知風險」(ignorant risk)。

第二，知識幫助創造力，使我們敢與別人有不同的意見。

第三，知識幫助我們實現心中想要創造的東西，把想法轉變成眞實的作品呈現出來，落實我們的創造力。

第四，知識可以提供足夠的符號系統支持我們的思考，讓我們集中心力去思考新的東西，讓我們有工具與媒介，而不會將時間浪費在基本的東西上。

最後，知識可以幫助我們注意到偶然發生的事，並利用它成爲創造思考的來源。

在主動思考能力方面，知識是思考的基礎。若只要孩子去想，卻沒有教他們內容知識，他們沒有東西可想，自然就不容易想出什麼有用的結論了。一個好的課程是一方面教導領域的專門知識，另一方面學習如何思考它的內容，兩者應該是平衡的狀態，不應該捨內容而就思考，也不應該捨思考而就內容。子曰：「學而不思則罔，思而不學則殆。」

前些時候，許多學生都熱中於「馬蓋先」風潮中，劇中的主角並不是毫無科學知識，而是大學中成績領先的佼佼者。但因爲他能在問題發生時很快的發掘出問題的根本，再將自己所學過的知識做最大可能的運用，使得觀眾不由得讚嘆：「眞聰明！」以學科應用的角度來看，他是個有創意的人，他的創意發生在他不會將自己的思考侷限於書本所言，而能夠以其他的方式建構書本上的知識，進而在適當的時機加以運用。這就是學科知識的創意。

一般學生在學習的時候，總是照著老師所教的思路，一步一步的思考，但是當意料之外的情境出現時，上課所學的思路完全沒有辦法派上用場，因爲在課堂上，一杯水的用途就是杯中的水，但

其實將水倒出後的杯子也很有用，只是因爲在學校裡沒有學，許多人因而不能解決問題。這裡牽涉到知識的重新定義問題，能夠靈活使用知識的人才有發揮創意的空間，舉例來說，知道 sine 函數是「週期性」函數，和能夠知道「sine 函數的特性之一是，它是一個週期性函數」是有很大差別的，相較之下後者的認知架構比較能夠產生創意，但後者的架構卻常常需要學習者經過深入的思考之後才能產生。

由於數學的實用性大多建立在「應用」方面，也具備了些許語言及藝術的特性，所以在學習數學的過程中更是需要時時注意，不能只是照著老師所教的思路想，還要能夠做歸納及統整的功夫，將來在面對問題的時候，才能找到派得上用場的數學理論來解決；在聽到不同領域的理論時，也才能知道他們是不是在說同一件事。至於如何注意自己的思路、如何歸納及統整自己所學到的數學，則是數學老師們在學生剛開始學習數學的時候，就要注意培養這種能力與習慣，讓學生能夠而且習慣於完成自己的數學知識架構，以便於日後的使用與發展。畢竟，越多人覺得數學有用，越多人關心數學，數學的發展就會越迅速。電腦與網路，則是提供足夠大的資料庫與討論空間，讓數學老師們能夠在最便利的環境下，心無旁騖的準備教學活動。

5.3 展望

在社會大眾對老師、對教育界關注越來越多的今天，教書不再是一成不變的複誦，而學習也不再是單純的記憶。如何讓學生將知識學以致用，是大家所關注的核心問題。老師們的自主權逐漸提

升，在接受不斷翻新的教育理念的同時，老師不但須要花更多心力來規劃課程，也要花更多心力來做檢討與改進。運用科技產物，是老師們保持與社會同一脈動的方法，而如何用得恰到好處則是一門藝術。相信在未來，會有更多的老師將心力投注在學生的個別差異上，也會有更多的學生懂得爲自己的求知慾望尋找多樣的學習途徑。

更重要的是，透過網路的傳播與討論，還有教材的分享與回饋，能讓更多的社會大眾接觸到數學，讓數學成爲名符其實的「大眾教育」。以美國的數學界來說，他們每一年都會定期舉辦「數學推廣週」(Mathematics Awareness Week)[1]的活動，主要就是爲了讓平常沒有在接觸數學的人，能夠知道數學已經爲我們的生活作了些什麼；知道數學還能夠爲我們做些什麼。同樣的，在中國古代的諸多文獻中都記載了許多數學發展與應用的事蹟，對現在的我們而言，那是「中國文化」的一部份。現在，我們不能反將數學從我們的文化、我們的生活中抽離，我們要致力於讓數學成爲大家所提倡的「文化」的一部份，欣賞它、把玩它、喜愛它。讓它能夠在生活中自然的被傳播，自然的被學習，自然的被傳承下去。

[1]今年已經擴大舉辦爲「數學推廣月」(Math Awareness Month)，詳見附錄 B

參 考 書 目

[1] 朱湘吉（民83），教學科技的發展理論與方法。五南圖書出版公司。

[2] 朱敬先（民84），教學心理學。五南圖書出版公司。

[3] 林寶山（民77），教學原理。五南圖書出版公司。

[4] 洪榮昭、劉明洲合著（民86），電腦輔助教學之設計原理與應用（增訂一版）。師大書苑。

[5] 張春興（民80），現代心理學。東華書局。

[6] 黃政傑主編（民86），教學原理。師大書苑。

[7] 韓幼賢（民78），教育心理學（上册）。國立編譯館主編，茂昌圖書有限公司。

[8] 饒見維（民85），教師專業發展—理論與實務。五南圖書出版公司。

[9] Thomas Armstrong 著，洪蘭審訂，李平譯（民86），經營多元智慧。遠流出版公司。

[10] S.M. Glynn, R.H. Yeany 著，熊召弟等譯（民85），科學學習心理學。心理出版社。

[11] M.E.Bell-Gredler 著，盧雪梅編譯，歐用生校閱（民80），教學理論——學習心理學的取向。心理出版社。

[12] Robert Osserman 著，葉李華、李國偉譯（民86），宇宙的詩篇。天下文化出版。

[13] Robert J. Sternberg, Todd I. Lubart 著，洪蘭譯（民88），不同凡想。遠流出版公司。

[14] Xiao-Shan Gao, Changcai Zhu, Yong Huang(1998), *Building Cynamic Mathematical Model with Geometry Expert* I. Geometric Transformations, Functions and Plane Curves*, Proceedings of ATCM98.

[15] Silvia Heubach(1998), *An Innovative Modeling Course at the Freshman/Sophomore Level*, Proceedings of ATCM98.

[16] Iwao Iguchi, Katsuaki Suzuki(1998), *Improving Junior-High Geometry by using Construction Software*, Proceedings of ATCM98.

[17] Xu-hui Li(1998), *Overview and Comment on the Use of Modern Technology in Shanghai School Mathematics*, Proceedings of ATCM98.

[18] Akira Morimoto, Yoshinori Nakamura(1998), *Teaching Approaches Using Graphing Calculator in the Classroom for the Hearing-Impaired Student*, Proceedings of ATCM98.

[19] Hideki Sawada(1998), *GAP in Algebra Class*, Proceedings of ATCM98.

[20] Andrew Toon(1998), *An Open Learning Mathematics Foundation Course with MathCad*, Proceedings of ATCM98.

[21] Tingyao Zheng(1998), *Impacts of Using Calculators in Learning Mathematics*, Proceedings of ATCM98.

附 錄 A

凌波初步筆記網頁

這是我在 1998 年所設計的網頁[1]，原先的構想是做成互動式、可交流的網頁，但是後來發現，不同的內容安排順序居然適合不同的學生，所以就把大部分的時間轉移作爲設計兩套不同順序的教材爲主。在這裡的資料歸檔是以老師在課堂上所分的段落爲主，如果再分細一些，以一個一個的概念爲主，不但能夠節省更多儲存空間，也能夠做出更多方面的運用。以下是網頁上我所寫下的「緣起」節錄。

「凌波初步」是單維彰教授在中央大學數學研究所開的一門課，主要在介紹 wavelet 這個新興的工具。這個數學工具可以用在解積分方程、解微分方程、做影像處理、……，是個還有發展空間的領域。在學習這門課的同時，學校舉辦了「筆記上網」比賽，使我想到把這門課的授課內容放在網路上，使它成爲學習的媒介。因爲時間不足無法完成構想中其餘的部分，如果能再加上書籤和討論版的功能，就可以構成一個初步的網路學習環境。

[1]網址是：http://www.math.ncu.edu.tw/ guo/Games/class/

在許多數學領域的課程上，許多老師和學生們都已經習慣於選定一本書做爲教材，從第一章第一節開始教起，跟著書本的腳步走。當然，這在以推論爲主的科目中是無可厚非的，但是這樣的學習有可能使學生產生「學到後面忘了前面」的問題，也無法在學生的腦中穩固的架構出各個知識的連結。回頭看看國小、國中到高中的數學教材，內容包括了幾何、代數、分析、……各種領域，但是我們並不是等幾何學完了之後才開始學代數，等代數學完了才開始介紹分析。相對的，我們是學一些數論，學一些代數，間或夾雜一些幾何，一些分析，之後再學更深一層的代數，更深一層的數論，……。這種學習方式是一種螺旋狀學習，好處是短時間內所學到的知識層面較廣，學生比較能將各類知識建立關連架構。在教育界有所謂的建構論，雖然太過主張建構論的學習可能會花費過多的時間，可是知識間的關連性越強學習者越不容易遺忘，這是無庸置疑的。

在這門課中，恰好老師沒有用任何市面上的書本當作教材，也沒有什麼講義，也就是說整堂課所呈現的，就是老師腦中部分的知識架構。所以我將課程內容詳實的記錄下來，以每天做爲分段點，以此方式所做出的紀錄雖然比較沒有條理，但是依次讀來卻有比較強的學習動機，也比較能夠將這門課和其他的知識相互串連。雖然這是我認爲比較容易學習的編排方式，但是對於已經習慣於線性閱讀的學習者而言，這反而造成了許多不必要的困擾。所以我又自行將上課內容加以歸類排序，做出了筆記的部分。這兩部分在我的設計中，是可以互相對照的。學到一個段落，可以從課程內容旁的鏈結，看看在線性的筆記中是屬於哪一個部分；在

筆記旁的鏈結，則可以知道老師是怎麼提到這個觀念的。這樣一來，學習者可以兼顧深度與廣度的學習，依照自己的能力，尋找最符合自己的學習路線及學習歷程。

雖然因爲這是學習者所做的筆記，在教材的深度及廣度上都有不及之處，但是希望經由使用者的使用經驗，將這種雙向度的學習加以推廣。

附 錄 B

數學推廣週

這是在美國的一個定期活動[1]，主要的目的是爲了提醒社會大眾，數學和我們的日常生活是息息相關的。在各種行業、各種需求中，數學不但不是沒有用的「廢物」，還是目前爲止最有用的利器。就拿 1998 年的主題「數學與影像」來說，舉凡醫學、計算機科學、太空探險、國家安全等等，都需要影像壓縮、圖形辨認、消除雜訊等技術。能使這些技術日新又新、更上一層的，只有藉由數學知識的引入，將數學與各種科學領域做緊密的結合，才有可能滿足人們與日俱增的需求。

在美國，這一週之中，各地會舉辦大大小小的研討會，針對這個主題進行一系列的演講活動。雖然這是數學界所推行的，但是爲了讓社會大眾也能參與、也能分享其中的資源，美國賓州的 Swarthmore 學院將此活動之相關文獻納入其 Math Forum 服務站內，藉由網路爲傳播媒介，將此活動廣爲宣傳。經由網路，現在我們可以知道在哪些地方有視窗版的影像壓縮程式可供實驗；哪裡有因應數學推廣週而舉辦的活動；哪裡有……。這些訊息都是透過網

[1]網址是：http://forum.swarthmore.edu/mam/

路來傳遞的。經由網路，家長與學生才能在輕鬆的環境當中，察覺數學的功用，並進一步學習欣賞數學、喜愛數學。另外，經由網路，教師才能在有限的時間中，盡可能的吸收有關數學的最新訊息，並獲得與他人交流的機會。

可惜的是，這個網站上的研討會都在國外，目前臺灣並沒有相互呼應的活動，也沒有舉辦其他類似性質的活動，希望將此網站引入後[2]，能喚起數學界及社會上對生活中的數學有更廣泛及深入的探討。

[2]網址是：http://www.math.ncu.edu.tw/maw