

HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）
 主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
 助理編輯：黃俊璋（和平高中）
 編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
 葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
 英家銘（清華大學）
 創刊日：1998 年 10 月 5 日
 網址：<https://www.hpmociety.tw/>
 聯絡信箱：suhyl022@gmail.com

第二十四卷第三期目錄(2021 年 10 月)

- 從圭竇形談起：《測量全義》初探(上)洪萬生
- 記吳嘉麗教授二三事洪萬生
- 《建構優良數學普及書籍指標》之
研究心得.....楊清源
- 《建構優良數學普及書籍指標》摘要
.....楊清源

從圭竇形談起：《測量全義》初探（上）

洪萬生

臺灣數學史教育學會

本文謹獻給郭書春教授，祝賀他八十華誕

一、前言

《測量全義》引起我的注意主要因為三個背景：其一，大約四十多年前，我從史家李儼的《中國算學史》讀到作者引自《測量全義》的阿基米德《圓書》。其二，2006 年，我曾與多位研究生在《HPM 通訊》上共同規劃出版一個「海龍公式」專輯 (<https://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/904.pdf>)，其中，李建勳曾就羅雅谷的海龍公式深入探討，並將他的證明較之於梅文鼎的研究，而得到有趣的結論。¹其三、我最近深入瞭解「圭竇形」的語源之機緣。²

阿基米德的《圓書》(*Measurement of a Circle / Circle Measurement*) 引進與面積公式有關的三個命題，可惜，一直都沒有獲得中國數學史家應有的注意，儘管前述李儼著作全文照錄。不過，這或許可以多少解釋中算史家過度「執迷」於劉徽之割圓術「創見」，以致無從覺察此一逼近圓周率近似值之估算，必須以「精確的」圓面積公式為前提。試想如果以圓面積公式（或「圓田術」）「徑自相乘，三之，四而一」為依據，來追求圓周率之近似值，那麼，此一公式顯然無法運用，因為它已經假設了圓周率（近似值）為三。事實上，劉徽「割圓術」的全文是出現在「圓田術」四個公式中的第一個「半周、半徑相乘得積步」之下，由於這個公式並未出現圓周率 -- 不像我們今日所熟知的 πr^2 (r 為圓之半徑)，因此，當然可據以推算圓周率之近似值。

¹ 李建勳，〈海龍公式的流變：由徐光啟到梅穀成〉。

² 洪萬生，〈從圭竇形到拋物線：閒話數學名詞的翻譯語境〉，臺灣數學史教育學會年會暨東亞數學史研討會，1/30/2021，臺北：台灣師範大學數學系 M202。

此一史實 / 數學實作 (mathematical practice) 在《圖書》的映照之下，應該會「透顯」出它的深刻意義。不過，顯然並非如此。事實上，中算史家是在 1980 年代之後，才陸續「警覺到」劉徽注「圓田術」的真實（或「貼近」）讀法。丹麥漢學家華道安 (Donald Wagner) 的貢獻也應該記上一筆才是，他在 1984 年與我通信時，曾寄給我一篇論文，其中他就明確地指出上述劉徽注的真實面貌。³

回到《測量全義》上。最近，我為了撰寫〈從圭竇形到拋物線：閒話數學名詞的翻譯語境〉，特別追溯「圭竇形」的源頭出處，結果就在《測量全義》找到它的最早漢語「足跡」。不過，本書之編者羅雅谷 (Giacomo Rho / Jacques Rho, 1593-1638) 顯然只想「便宜行事地」交代一下，因此，後來在相關的漢譯語境中，「圭竇形」被「拋物線」所取代，一點也不令人意外。⁴本文「從圭竇形談起」，意在吸引讀者眼球，我們的主要目標當然是《測量全義》的文本分析 (textual analysis)，特別是羅雅谷在撰著此書時，如何「收編」他所謂的「九章算」（或中國傳統算書概念、算法及公式）。這個中西算學「交流」的個案似乎還沒有贏得（數學）史家應有的關注，且讓我在此先起個頭，拋磚引玉，希望後來者可以貢獻更恰當的歷史理解。

因此，本文「初探」的範圍就限定在與傳統中算「不無互動」的《測量全義》第四～六卷，至於第一～三卷及第七～九卷主題是「平行的」，前者是平面三角學，後者則是球面三角學。根據數學史家的初步研究，⁵其中公式是針對十五世紀歐洲數學家玉山若干 (Johannes Regiomontanus/Johannes Muller, 1436-1476) 的相關成果所做的增補。⁶第十卷（也就是最後一卷）介紹測量儀器，由於它與前述平面三角及球面三角一樣，其內容主要傳自西方的數學與天文學，同時，也缺乏中西之「會通」企圖，所以，本文都不打算討論。

有關本文論述進路，我們還必須再做一個交代。由於清初曆算大師梅文鼎深受《測量全義》乃至編入它的《崇禎曆書》之影響（內容與形式兩方面），因此，當我們針對《測量全義》進行文本分析時，也將援引梅文鼎的相關論述，作為必要的參考點，從而藉以更清晰地映照清初中算未來之走向。

二、羅雅谷及其《測量全義》

羅雅谷的生平事蹟略見維基百科（正體、簡體中文版都出自英文版），僅知他 1593

³ 有關這一段重要的插曲，可參考郭書春，〈尊重原始文獻 避免以訛傳訛〉。

⁴ 這是因為在 1850 年代，解析幾何與（近代）物理學同時傳入中國，前者的「拋物線」與後者的「拋射體運動」終於連成一氣，而將「圭竇形」送進了歷史的灰燼。參考洪萬生，〈從圭竇形到拋物線：閒話數學名詞的翻譯語境〉。

⁵ 這些球面三角的內容甚至啟發了清初梅文鼎的同一主題之研究。參考郭書春主編，《中國科學技術史：數學卷》，頁 620。

⁶ 玉山若干（或約翰·穆勒）的三角學貢獻，可以參考毛爾，《毛起來說三角》或 Katz 的《數學史通論》，頁 312-315。

年出生於米蘭，父親是著名法學家。他在 1614 年加入耶穌會，數學方面的訓練似乎頗為到位。1617 年，他在羅馬被貝拉明（Cardinal Bellarmino）樞機主教授任神父職。之後，他與多個夥伴被派到東亞地區傳教。他先是在印度果阿邦學習神學，後來到澳門傳教。1624 年，他隨高一志（Alfonso Vagnoni）神父進入中國，居停山西，學習語言與在地知識。1631 年，被傳喚至北京曆局與徐光啟、耶穌會士湯若望、龍華民和鄧玉函共事，一起編修《崇禎曆書》，以便改革明朝中國曆法（大統曆）。1638 年，他逝世於北京，享年 45 歲。

羅雅谷在數學及天文學方面的素養，我們只能從一些相關著作的敘述來推測。天文史家金格瑞契（Owen Gingerich）有關哥白尼《天體運行論》（*De revolutionibus*）（版本）之研究，⁷為我們提供了些許蛛絲馬跡。事實上，根據他的研究，《天體運行論》的 1566 年的第二版及 1617 年的第三版，都在 1618 年被帶到中國，⁸儘管梵諦岡教廷早在 1616 年已經下令將該書「掃入」禁書目錄（Index）。而將 1566 年《天體運行論》第二版帶到中國的，正是羅雅谷。可見，羅雅谷對於當時歐洲的天文學研究現況，相當熟悉而且頗有「膽識」。這或許也可以解釋何以他最後會獲邀加入徐光啟的曆局團隊。

事實上，我們從本文討論的《測量全義》，也可發現他應該受過蠻嚴謹的數學訓練，譬如他在該書中，就始終強調「法之所以然也」，而其論證之主要依據或範本，則是利瑪竇（Matteo Ricci）、徐光啟合譯的《幾何原本》前六卷（後文簡稱利徐版），以及其中譯母本丁先生（Christopher Clavius）改編版，⁹足見他嫻熟這部經典的內容（content）與形式（form）。事實上，我們從本節下文將簡要介紹的《測量全義》內容，也可以略窺一二。至於測量之義，可徵之於耶穌會士鄧玉函（Johann Schreck）所撰之《測天約說》（也收入《崇禎曆書》）：¹⁰

測法與量法不異，但近小之物尋尺可度者，謂之量法。遠而山岳，又遠而天象，非尋尺可度，以儀象測知之，謂之測法。其量法如算家之更術，其測法如算家之綴術也。¹¹

在此，鄧玉函使用了中算家熟悉的名詞如「更術」及「綴術」，¹²顯見耶穌會士深知會通中西文化「修辭」（rhetoric）之重要。

⁷ 參考金格瑞契，《追蹤哥白尼》，頁 177。

⁸ 1617 年的三版是由金尼閣（Nicholaus Trigault, 1577-1628）帶入中國，參考同上。

⁹ 在本文中，《幾何原本》前六卷所指的，是利、徐二人根據丁先生（Christopher Clavius）的改編本所中譯的版本。另外，羅雅谷也參考了未譯的後九卷，譬如《測量全義》卷六，頁四所引述。《幾何原本》（*The Elements*）目前被認為只有十三卷（譬如Heath版），此處提及卷十四、十五係由後人增補。丁先生改編的版本就有十五卷。

¹⁰ 根據維基百科 https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Schreck，鄧玉函原本在阿特多夫大學（University of Altdorf）習醫，畢業後，他成為發明符號法則的法國數學家韋達（François Viète）之助手。韋達於 1603 年去世後，鄧玉函轉往義大利巴都亞大學（University of Padua）投入伽利略的門下，但繼續研習醫學。

¹¹ 鄧玉函，《測天約說》卷上，頁一，徐光啟編纂、潘鼎匯編，《崇禎曆書》（後文簡稱《崇禎曆書》），頁 1139。

¹² 這兩個名詞俱見秦九韶《數書九章》序，此處應該都指測量方法，儘管秦九韶將前者視為「外算」，後者視為「內算」。秦九韶，《數書九章》序，頁一，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》（一），頁 439。

根據《測量全義》〈敘目〉，本書（十卷中的）「前九卷屬法原，後一卷屬法器」。所謂「法原」，是指：

法之所以然也。凡事不明于所以然，則已然者茫茫不知所來，其當然者，昧昧不知所往。¹³

至於其法原精髓，當然就表現在前九卷。我們先引述全書目錄：「第一卷測直線三角形，第二卷測線上，第三卷測線下，第四卷測面上，第五卷測面下，第六卷測體，第七卷測曲線三角形，第八卷測球上大圈，第九卷測星，第十卷儀器圖說」。其次，再讓我們一起考察羅雅谷如何「遵循」《幾何原本》之體例。事實上，第一卷之首開宗明義就是「界說二十三則」，譬如，

第一界：正弧，全圈四分之一。或大焉或小焉。

第二界：餘弧，正弧之剩分。

第三界：通弦者，通弧之相當線，分圈為兩分。

第四界：圈內線極大過心者，為圈徑。

等等。¹⁴

不過，羅雅谷並未提供類如《幾何原本》利徐版的「求作」與「公論」，¹⁵而是直接呈現（卷一）十七題的內容。茲以其第九題為例：

第九題 三角形。邊與邊之比例，若各對角之正弦。¹⁶

按：這是目前我們稱之為正弦定律的一個命題。仿《幾何原本》體例，羅雅谷在提供「論曰」（證明）之前，先依據插圖進行「解曰」（解題）：針對這個給定三角形，羅雅谷區分成三種情況，「一言直角形」，「二言三邊等」（亦即等邊三角形），「三言三邊形不等」。在此，我們僅以第三種情況的「任意三角形」為例，來考察他的「解曰」。參考圖一，「以已以小邊，引長于丁，為乙丁，與已丙等。丙為心，已為界，作已庚弧。又乙為心，丁為界，作丁戊弧。未作丁辛、甲已兩垂線至乙丙底。」緊接著，就是他的「論曰」：

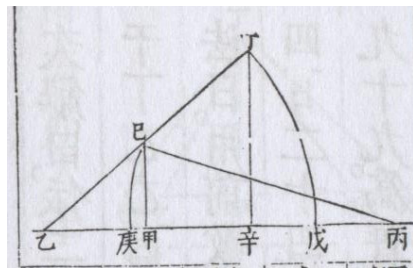
¹³ 羅雅谷，《測量全義》「敘目」頁一，《崇禎曆書》頁 1295。

¹⁴ 「圈」等同「圓」或「圓周」，羅雅谷將這兩個名詞混用，不知何故？又，正弧是指一個象限內的一段弧，「過弧」則大於一個象限之圓弧。圈徑＝圓的直徑。

¹⁵ Clavius 的《幾何原本》之「求作」（「求作者，不得言不可作」）與「公論」（「公論者，不可疑」）不同於 Heath 版 (Heath, 1956)，儘管它們（依序）類似後者之設準（postulate）與公理（common notion）。更值得注意的，是 Clavius 將與平行有關的第五設準，轉變成為他的改編本之第十一論。將攸關非歐幾何學濫觴的第五設準改成「公論」，是值得注意的一個「認知」特色，但似乎尚未贏得史家的注意。

¹⁶ 《測量全義》第一卷第一題「比例等」（比例相等）之說，羅雅谷原註稱：「比例等後省曰若」，亦即： $a:b = c:d$ ，這兩個比（例）相等，後文就簡稱為「 $a:b$ 若 $c:d$ 」。

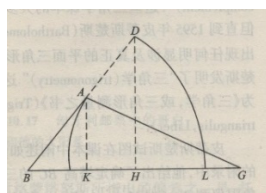
丁辛乙、甲巳乙兩直角形之丁辛、甲巳平行。同用乙角，即各邊俱相似六卷四，¹⁷則乙丁與乙辛，若乙巳與乙甲。又先設乙丁、巳丙等，是丙巳邊與丁辛，若巳乙與甲巳也。夫丁辛為乙角之正弦，甲巳為丙角之正弦，更之，則丙巳邊與巳乙邊，若乙角正弦之丁辛，與丙角正弦之甲巳也。



圖一：《測量全義》證明之正弦定律之插圖

這個證明及其插圖完全襲自玉山若干（或約翰·穆勒或雷格蒙塔努斯）的《論各種三角形》（*De Triangulis Omnimodis*, 1463/1533）-- 被史家 Katz 稱之為第一部「純」三角學的著作，也見證了史家 Grattan-Guinness 所刻畫的歐洲 1540-1660 年間是一個「三角學世紀」（the age of trigonometry）。¹⁸現在，且讓我們引述 Katz 的解說與評論：

由於他的正弦是給定半徑的圓中的直線，他對三角形 ABG 的正弦定理的證明就需要分別以 B 和 G 為圓心，以相等直線 BD 和 GA 為半徑畫出兩個圓。再從 A 和 D 分別作出 BG 的垂線，依次相交於 K 和 H ，雷格蒙塔努斯然後指出，應用相等半徑的圓可知， DH 是 $\angle ABG$ 的正弦，而 AK 是 $\angle AGB$ 的正弦。因為 $BD = GA$ ， $\angle AGB$ 的對邊為 GA ，且 $\angle AGB$ 的對邊為 AB ，所以，由三角形 ABK 和 DBH 的相似性可得出要證明的結論。¹⁹



圖二：Katz 複製圖

圖二是 Katz《數學史通論》所複製的插圖，我們可以據以確認羅雅谷所參考的來源。其實，羅雅谷依據《論各種三角形》來改編，是其來有自的，因為雷格蒙塔努斯曾從希臘文翻譯托勒密（Ptolemy）的《天文學大成》（*The Almagest*），並且注意到天文學界需要有一本簡潔、有系統的著作，來論述平面、球面三角的邊角關係之法則。值得注意的，正如前述，他的體例完全模仿《幾何原本》的（定義 -- 公理 -- 命題）邏輯架

¹⁷ 這個小字是原註，「六卷四」是指《幾何原本》第六卷命題四。

¹⁸ 參考 Grattan-Guinness, *The Fontana History of Mathematical Sciences*, pp. 174-233.

¹⁹ 引 Katz,《數學史通論》，頁 313。《論各種三角形》中的相應原始文本（primary source materials），可參見李文林，《數學珍寶》，頁 208-210。

構，同時，針對各個命題（或定理），還加上《幾何原本》所欠缺的「解釋性」

（explanatory）實例。還有，史家 Katz 也提醒我們：「雷格蒙塔努斯的三角學是以弧的正弦為基礎，正弦的定義是二倍弧的半弦，但他也指出，可以把正弦視為依賴於相應的圓心角。」²⁰

《論各種三角形》所以贏得羅雅谷的青睞，可能是他的「市佔率」。根據 Katz 的說明，十六世紀三十年代之後的一段時間內，出現了大約二十本論三角學的著作，其內容絕大部分都與該書雷同。另一方面，「以雷格蒙塔努斯的著作為典範的 15 世紀三角學〔仍〕為解決當時的天文學問題提供了必要的數學工具。」²¹

總之，羅雅谷根據、甚至模仿《論各種三角形》的內容與（體例）形式，來編寫他自己的《測量全義》，應該極有可能。不過，他在該書第四～六卷中，以其論述為主體，企圖「肆應」（accommodate）或「收編」（assimilate）中國傳統的「九章算」，倒是值得我們深入探索。緊接著，我們就來處理這個主題。

三、羅雅谷收編「九章算」

「九章算」是指哪一本中國算書，目前我們還不得而知，不過，它可能泛指中國算學的概念（及其名詞）、方法或公式。我們從羅雅谷在《測量全義》所引述的相關內容，可以推測他應該是在西算的「理論架構」中，收編中國傳統算學。這個進路有別於徐光啟以降的明清算家，他們都如同徐光啟所期許的，「先（以中算）會通（西算），然後「再（努力）超勝」，²²其「主體性」顯然在明清算家這一邊。

現在，我們先考察羅雅谷在《測量全義》的論述架構中，如何「借用」（appropriate）中算用詞及方法。由於《測量全義》卷一～卷三、卷七～卷十幾乎未引述中國傳統算書概念或方法，²³因此，我們僅就卷四～卷六進行考察，而這當然也是本文的焦點所在。

在本節中，我將先討論《測量全義》卷四，再繼之以卷六，這是因為這兩卷的內容與形式頗有「平行」的風格。事實上，羅雅谷收編「九章算」中的平面圖形、立體圖形的「容」積計算公式或方法時，²⁴顯然相當受惠於《幾何原本》，尤其是利瑪竇、徐光啟未曾中譯的立體幾何內容（第十一～十三卷）。至於《測量全義》第五卷，我們將以其中《圓書》及「變形法」的一個案例為主題，依序分述於本文第四、五節。

²⁰ Katz, 《數學史通論》，頁 312。

²¹ 同上，頁 315。

²² 徐光啟在他的〈曆書總目表〉中，指出：「臣等愚心，以為欲求超勝，必先會通」，《崇禎曆書》，頁 1558。

²³ 《測量全義》卷二，頁十二有「物莫能到，復不能作線與參直」，《崇禎曆書》，頁 1324。卷三有矩尺測量法（《崇禎曆書》，頁 1335），類似《周髀算經》的「用矩之道」。

²⁴ 羅雅谷使用「容積」一詞既代表面積，也代表體積，由上下文可知其指涉。

《測量全義》卷四〈測面上〉主題是有關三角形、四邊形及多邊形面積之計算。不過，羅雅谷一開始就引進十三個界說，其中第十界之「畝法」與《九章算術》相同，亦即，一畝等於二百四十（方）步，所相異者，是羅雅谷補上「因次」（dimension）概念，而改稱為「方步」。²⁵然而，他的「一方步」卻是等於「二十五方尺」，亦即，一步＝五尺，與明代算家程大位的《算法統宗》（1592）所載相同，²⁶不像秦漢度量衡制度中的「一步＝六尺」，正如《九章算術》所示。

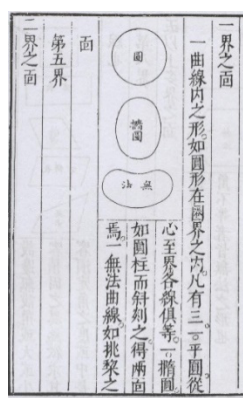
現在，有關界說（definition），我要特別引述本卷的第四、五界，因為我們在卷六「測體」將可以發現羅雅谷的「平行論述」進路：

第四界 一界之面

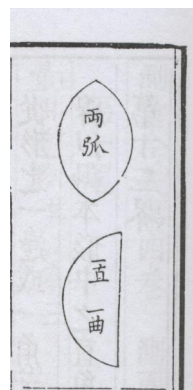
一曲線內之形，如圓形在圓界之內。凡有三：一平圓，從心至界，各線俱等。一橢圓，如圓柱而斜刻之，得兩面焉。一無法曲線，如桃梨之面。²⁷

第五界 二界之面

如兩弧或無法之曲線，或一直線一曲線，而形成之有法與否，則視曲線。²⁸



圖三：一界之面，《測量全義》掃描



圖四：二界之面，《測量全義》掃描

另一方面，由於第七、八界說涉及多邊形概念之（階層 hierarchy）分類，²⁹我們也將引述如下，方便下文之解說：

第七界 四界之面

方面有五。邊角俱等者，正方也。角等、邊不等者，長方也。邊等、角不等者，斜

²⁵ 羅雅谷，《測量全義》卷四，頁四，《崇禎曆書》，頁 1354。中國算書如《九章算術》有時會強調面積計算（比如方田術）所得是「積步」。

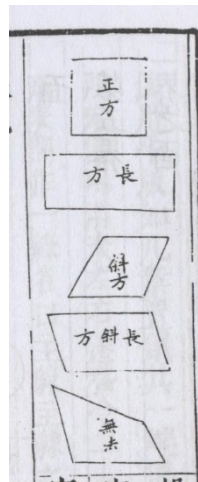
²⁶ 程大位，《算法統宗》，卷三，頁二，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》（二），頁 1264。

²⁷ 羅雅谷，《測量全義》卷四，頁一、二，《崇禎曆書》，頁 1353。所謂「無法」，最早出處應該是《幾何原本》利徐版卷一的第三十三界：「已上方形四種謂之有法四邊形。四種之外，他方形，皆謂之無法四邊形。」以上四種，是指第二十九界「直角方形」（正方形）、第三十界的「直角形」（長方形）、第三十一界的「斜方形」（菱形），以及第三十二界的「長斜方形」（平行四邊形）。

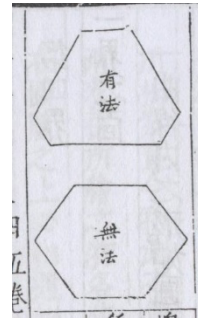
²⁸ 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁二～三，《崇禎曆書》，頁 1353。

²⁹ 這一作法呼應歐幾里得如何遵守亞里斯多德有關（數學）定義之規範，亦即概念的「原始屬類」與「區別屬性」之劃分，參考奔特等（Bunt et. al.），《數學起源》，頁 176-179。

方也。各對角、對邊等者，長斜方也。邊角俱不等者，無法之方也。首兩種之外，皆屬無法，蓋有設邊，無設角，或大或小，容積因之異焉。欲求其容，須定角之度或中長線也。³⁰



圖五：四界之面，《測量全義》掃描



圖六：五以上多界之面，《測量全義》掃描³¹

第八界 五以上多界之面

邊角俱等者，有法之形也。或邊或角不等者，皆無法之形也。³²

由於《九章算術》卷一〈方田章〉主題就是面積計算，³³所以，我們以之對照〈測面上〉，是一個頗有啟發性的比較史學工作，這是因為《幾何原本》並未包括面積或體積計算。

《測量全義》卷四〈測面上〉除了前文提及的十三個界說之外，還包括三個命題，依序為第一題〈量四邊形〉、第二題〈量三邊形〉，以及第三題〈量多邊形〉。此一順序有違我們的直觀，因為，三邊形顯然比四邊形「簡單」，為何論述之順序剛好相反？³⁴為此，羅雅谷在本卷「第九界」試圖提出他的理由：

量線用直線，以直線在萬線中為最短故。量面用平面、用正方，以平面在萬面中為最短，正方之理視萬物之理為最準故。³⁵

於是，他將正方（形）、長方（形）的面積公式視為已知，所謂的「公量為方」（可公度量（commensurable）單位是正方形），並以正方田、長方田之面積計算為例。緊接著，

³⁰ 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁二～三，《崇禎曆書》，頁 1353-1354。相較於《幾何原本》利、徐版的卷一第二十九～三十二界說之敘述（參見前註 27），羅雅谷的對應界說顯然更為清晰可辨。

³¹ 此一掃描圖之原圖似有謬誤，「有法」與「無法」應該互相顛倒才是。

³² 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁三，《崇禎曆書》，頁 1354。

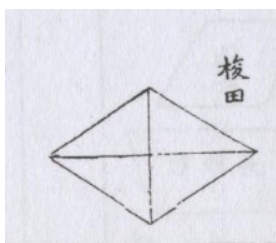
³³ 由於「計算」，當然也一併介紹分數的四則運算，以及約分術等方法。

³⁴ 譬如，梅文鼎在他的《平三角舉要》中，就在「有形」vs.「無形」的脈絡中，指出三角形的「優先性」：「凡可算者，為有法之形；不可算者，為無法之形。三角者有法之形也。不論長短斜正，皆可求其數，故曰有法。若無法之形，析之成三角則可量，故三角者量法之宗也。」頁 4-463。

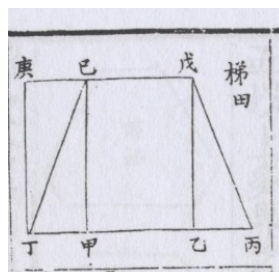
³⁵ 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁三～四，《崇禎曆書》，頁 1354。

他也說明「斜方」(亦即平行四邊形)面積計算。然後,再以「等邊斜方形」(菱形)將「梭田」收編進來,他說(參見圖七):

若等邊斜方形,作兩對角線,分元形為四勾股形,兩對角線之交為直法。法以兩對角線相乘,二而一。³⁶



圖七：梭田，《測量全義》掃描



圖八：梯田，《測量全義》掃描

在四邊形的單元中,梭田既然有了「歸宿」,且看羅雅谷如何對待「梯田」(圖八):

四邊形有上下不等而在平行線內者,名梯田。舊法:并兩廣,半之,以中長線乘之。³⁷

此處「中長線」是指「從形之一邊或一角至對邊作垂線」,亦即我們今日所謂的高。羅雅谷特別指出:「半之者,損下廣以益上廣也,此舊法所自出也。」至於「斜田、箕田諸法俱同前。兩腰之等與不等,角之等與不等,俱以平行線為本。」³⁸顯然,無論是「梯田」、「斜田」或「箕田」,它們都以「平行線為本」,而讓面積公式之證明變得「有所本」,同時也有助於他的「反駁」舊法之謬。

茲以「四不等田」為例(參考圖九)。先引述羅雅谷的論述如下:

舊法:四不等田,東長四十二、西長五十六、南六十四、北五十八。并東西兩邊,半之;并南北兩邊,亦半之。兩半相乘得二九八九步,為其容。³⁹

按:上引「容」是指面積,以下視文本脈絡不同,也可能指「體積」。針對這個面積計算,羅雅谷不以為然,「駁曰」:

若甲為直角。試作乙丁對角線,成甲乙丁勾股形。有勾股,以求弦,為七十六又一五三之九四。其積為一三四四。又以乙丙丁形之三邊,求其容,得一五三七,并兩

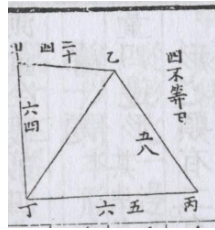
³⁶ 羅雅谷,《測量全義》卷四之首,頁六~七,《崇禎曆書》,頁 1355-1356。

³⁷ 羅雅谷,《測量全義》卷四之首,頁七,《崇禎曆書》,頁 1356。

³⁸ 同上。

³⁹ 羅雅谷,《測量全義》卷四之首,頁八,《崇禎曆書》,頁 1356。按:「四不等田」最早現身於《五曹算經》。

形積，得二八七一，知法為未合也。⁴⁰



圖九：四不等田，《測量全義》掃描

最後，他「論曰」以糾其謬，指出其關鍵在於是否為「有法形」：

兩廣或兩長在平行線內者，并而折半，損有餘，補不足，改為方形也。以中長線乘之，則得其容。若四不等，無法形也。損此益彼，一不能為方，一不能為中長線，何緣得合乎？⁴¹

現在，我們緊接著進入本卷第二題「量三邊形」。本題主旨是海龍（Heron）公式：「乙丙丁三邊形，有邊數，無角數，求實。其法并三邊數，半之為實，以每邊之數為法，各減之。三較連乘得數，以半總數乘之為實，平方開之，得實。」⁴²羅雅谷所提供的證明顯然有瑕疵，梅文鼎曾試圖改正，也未竟全功，最後，康熙主編的《數理精蘊》總算給出了嚴密的證明。⁴³在中算史上，儘管南宋秦九韶也曾給出與海龍公式等價的「三斜田」面積公式，⁴⁴但卻未曾說明如何導出他自己的公式，因此，我們不打算進一步討論。

本卷第三題主旨是：「量多邊形」，亦即是：計算五邊及更多邊形的面積。由於正多邊形面積的計算「必先分元形，皆為兩邊等三角形，故不論幾何邊俱同法」，因此，羅雅谷特別討論等邊三角形面積之計算（「舊法三角形」），說明舊法未考慮平方根近似值的「誤差」作用，以致於答案略有出入。請參考圖十、他的舉例及論證如下：

舊法三角形，每面十四。以六乘面，得八十四。以七而一，得十二，為實。半面七為法，乘之，得八四。積也。試用前法，分元形作兩勾股形，各形有弦有勾，以求股而求積。得八四又三十之二十八，幾為八五，非八四。

論曰：所以然者，古法正六面七，謂丙乙十四，則丙甲十二，故七六相乘得四十二，為丙乙丁之實八十四矣。不知丙乙十四、乙甲七，各自之相減開方，乃十二有奇也，且七除又七乘，安用之？⁴⁵

⁴⁰ 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁八～九，《崇禎曆書》，頁 1356-357。

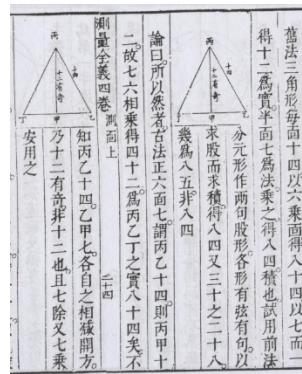
⁴¹ 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁九，《崇禎曆書》，頁 1357。

⁴² 羅雅谷，《測量全義》卷四，頁九，《崇禎曆書》，頁 1357。海龍公式之現代形式如下：令 a, b, c 為三角形的三邊，則其面積 $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ，其中 $s = (a+b+c)/2$ 。

⁴³ 參考李建勳，〈海龍公式的流變：由徐光啟到梅穀成〉，或該文所刊的《HPM 通訊》9(4) 海龍公式專輯。梅穀成是梅文鼎的孫子，他時任康熙的算學大臣，是《數理精蘊》的主力編輯之一。

⁴⁴ 朱世傑所給的「三斜田」面積計算則不同，因為他多給了一個「中股長」的條件。參看朱世傑，《算學啟蒙》卷中，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》（一），頁 1149。

⁴⁵ 羅雅谷，《測量全義》卷四，頁二十四～二十五，《崇禎曆書》，頁 1364。

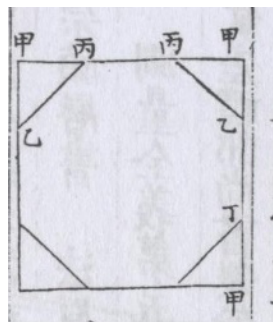


圖十：「正六面七」，《測量全義》掃描

同理，他也評論「舊法及古法六角形」。不過，他更有興趣討論的，應該是本卷最後的「古法八角田」。

此一「古法」出處何在，還有待探索。⁴⁶不過，這個論述顯然延續了他在舊法三角形、六邊形等計算時，對於平方根近似值的「計較」。我們且先看他所引述的「古法」：

古法八角田。每面十四，以面五乘得七十，七而一得十，倍之得二十，求一面，得三十四。自之得一一五六為實，面數自之得一九六為法，減之，餘九六〇，八角形積也。⁴⁷



圖十一：方五斜七八角田，《測量全義》掃描

上引「每面十四」以「五乘、再七而一」，是指 $\frac{14}{\sqrt{2}} \approx \frac{14}{\frac{7}{5}}$ ，在正方形邊為五（所謂「方五」）的情況下，以七為其對角線之長（所謂「斜七」）。⁴⁸緊接著，他提供「正法」，說明八角田每邊 14 的情況下，以其為弦的等腰直角三角形之兩腰並不等於 10，而是 $\sqrt{98}$ 。至於古法答案「所以然者」，乃是因為：

古法方五斜七，不知方五斜七有奇，不發之根也。彼以甲乙等各勾各股俱為十，則

⁴⁶ 朱世傑，《算學啟蒙》卷中有「方五斜七八角田」題如下：「今有方五斜七八角田一段，只云每面闊二十八步，問為田幾何？」郭書春主編，《中國科學技術典籍彙編》（四），頁 1149-1150。

⁴⁷ 羅雅谷，《測量全義》卷四之首，頁八，《崇禎曆書》，頁 1364-1365。

⁴⁸ 口訣「方五斜七」最早現身於《孫子算經》，至於「方五斜七八角田」則出現於朱世傑《算學啟蒙》（1299）。另外，與此近似值息息相關的「不發之根」，則是指開方不盡的無理根如 $\sqrt{2}$ 。羅雅谷，《測量全義》卷四，頁十六，《崇禎曆書》，頁 1360。

乙丙邊與乙丙弦俱十四。不知各率皆是，而獨乙丙弦非十四也。故八角形之積實少，而誤以為多。⁴⁹

《測量全義》有關「測面」部分我們就討論到此為止。在進入「測體」之前，我們有必要提及上文所引述的「正六面七」及「方五斜七」這兩個古法的可能出處。正如前述，羅雅谷曾有七年時間（1624-1631）在山西學習語言與「在地學問」，又由於利瑪竇、李之藻所編譯的《同文算指》（1614）直接襲自《算法統宗》的至少有 22 題之多，⁵⁰因此，羅雅谷研讀《算法統宗》的可能性極大，從而進一步「收編已有」似乎也順理成章。譬如，在《算法統宗》的「方圓定則九圖」前三個依序就是「周三徑一」、「方五斜七」及「正六面七」，⁵¹至於作者程大位的相關說明，則完全被羅雅谷所引用。更有趣的，是羅雅谷有關「四不等田」的例子，也符合程大位所說的「四不等田分兩段，一為勾股一為斜」。⁵²

現在，我們開始進入《測量全義》第六卷「測體」，亦即有關體積之計算。羅雅谷首先說明（立）體的意義，以及一些相關的概念之界說（或定義）：

體者面之積，或實如金木土石等，或空如盤池陶穹等，俱同理同法。其界為面，面居體之周。⁵³

緊接著，羅雅谷補了一個自註：「面截面生稜，如線遇線生角也。又稜為兩面之共界。」再接著，針對「一面之體」、「二面之體」、「三面之體」、「四面之體」、「五面之體」、「六面之體」、「八面之體」、「十二面之體」，以及「二十面之體」等，他儘可能提供「界說」，逐一說明其圖形性質。

以「一面之體」、「二面之體」為例，他所給出的界說依序如下：

一面之體如球、如卵。

二面之體，如半球、半卵、圓角、圓堆。⁵⁴

⁴⁹ 羅雅谷，《測量全義》卷四，頁二十五～二十六，《崇禎曆書》，頁 1365。

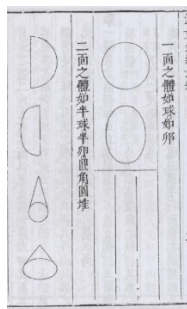
⁵⁰ 陳敏皓，《《同文算指》內容分析》，頁 122-125。羅雅谷撰著《籌算》時，也曾參考《同文算指》，《崇禎曆書》，頁 1527。

⁵¹ 程大位，《算法統宗》，郭書春主編，《中國科學技術典籍彙編》（二），頁 1265。

⁵² 同上，頁 1264。

⁵³ 羅雅谷，《測量全義》卷六，頁二，《崇禎曆書》，頁 1383。

⁵⁴ 同上。



圖十二：《測量全義》掃描

像「一面之體」或「二面之體」這樣的概念，他大概只能圖示，希望讀者可以直觀理解。顯然，這是羅雅谷「類推」卷四的第四、五界的結果。其實，在平面的案例中，他也很難說明白。

至於他的參考論述涉及《九章算術》卷五「商功章」之立體圖形，則有如下三類（「立面體」、「角體」與「斗體」）：

第一體名立面體。如正立方、斜立方、多邊立體、正立圓體、扁圓體。公法。以高乘底之積，得其容。其高之度，則垂線也。

《幾何原本》十二卷七增題曰：兩平行面內之體或同高兩體，其比例為體與體，若底與底，但取同類相求，以正高為據，不論體勢直與不直。⁵⁵

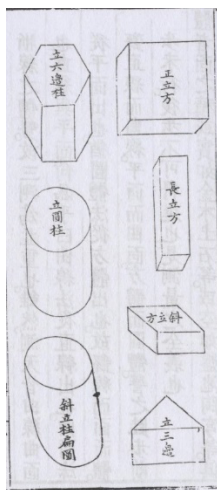
參考圖十三。羅雅谷在此引述《幾何原本》第十二卷第七增題，其進路即清晰地呼應卷四中的「以平行線為本」。其實，他在解說立體圖形的性質時，也早已經使用了二、三維的「類比」手法，譬如正立方 vs. 正方、斜立方 vs. 斜方，等等。

現在，引述「角體」如下：

第二體名角體。底廣上銳，如堆垛峰亭之類，其法同也。《幾何（原本）》十二卷七題之系曰：同底等高之角體與平行面體（即同高體）之比例，若一比三。⁵⁶

⁵⁵ 羅雅谷，《測量全義》卷六，頁四，《崇禎曆書》，頁 1384。

⁵⁶ 羅雅谷，《測量全義》卷六，頁五，《崇禎曆書》，頁 1384。



圖十三：《幾何原本》卷十二立體，
《測量全義》掃描



圖十四：《九章算術》「商功章」立
體，《測量全義》掃描

參考圖十四，這些出自《九章算術》「商功章」如委粟、倚垣等概念，都是角體的例子。針對「角體」與「立面體」之關聯，羅雅谷也是運用《九章算術》「商功章」的概念工具如「立方」(立面)、「塹堵」、「陽馬」及「鼃臠」，提供他的「論曰」如下：

論曰：角體為立面體三之一者，何也？如正立方體，自上而下，對角平分之，為兩塹堵。每一塹堵得正立方二之一。又于塹堵之兩方面，自上而下，對角平分之，成大小兩分。大者為陽馬，得塹堵三之二。小者為鼃臠，得塹堵三分之一。則一正立方，分之為塹堵，得二。陽馬則三，鼃臠則六。角體者，陽馬也，故得立面體三之一也。詳見九章算。⁵⁷

緊接著上述「論曰」及插圖（圖十四）之後，⁵⁸羅雅谷顯然為了計算橢球體積（本卷最後有「量橢圓體之容」），而引進「截角體法」（截圓錐體法）及其五種圓錐截痕：三角形、平圓形、圭竇形（拋物線）、陶丘形（雙曲線），以及橢圓形（橢圓形）。由於我已經另文論述此一主題，此處就略而不贅。⁵⁹

《測量全義》內容與「商功」有關的立體，還有下列第三種：

第三名斗體。古名方窖、圓窖等。其上下兩面不等而相似，蓋角體之截分也。引長其稜，即相遇而成全角之體。凡置斗體，大而居下。本角體之截分，角體欲自立，底必在下也，其置截分亦然。⁶⁰

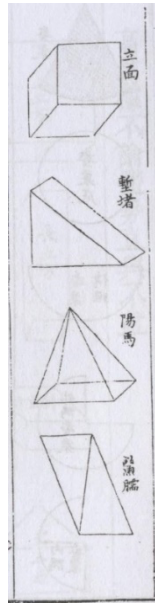
⁵⁷ 羅雅谷，《測量全義》卷六，頁八，《崇禎曆書》，頁 1386。

⁵⁸ 這個插圖除了鼃臠之外，另外三個立體已經企圖呈現空間視覺效果，這可能是在中國問世的算書最早出現的例子。不過，這四個立體圖形並非從最上面的立面逐次切割而成，它們之間缺乏邏輯連結，顯示羅雅谷、編輯及刻工等人員插圖訓練之不足。

⁵⁹ 洪萬生，〈從圭竇形到拋物線：閒話數學名詞的翻譯語境〉。

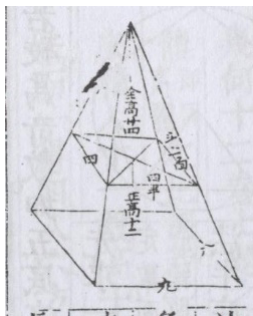
⁶⁰ 羅雅谷，《測量全義》卷六，頁九，《崇禎曆書》，頁 1386。

所謂的「角體」，亦即今日所謂的「錐體」，至於「斗體」就是截頂的「角體」

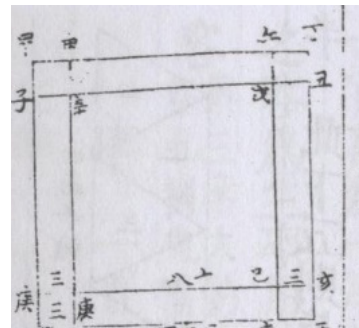


圖十五：《測量全義》掃描

（截頂錐體）。羅雅谷在計算「斗體」體積時，先是就已知本角體之高的情況，「先求本角體之容，後求所闕截分之容，相減，餘為元體之容」，⁶¹亦即，在錐體高已知時，將未截的錐體之體積，減去截掉的錐體之體積，剩下來的就是所求體積。（參考圖十六）這個公式（算法）或並未現身在《九章算術》「商功章」之中，不過，對於「斗體」圖形之形象認識，顯然不無助益。



圖十六：《測量全義》掃描



圖十七：「方亭」之截體分求

然而，

若不知全角體之高，則截體分求之法曰：如甲乙丙丁，斗體之大面也，邊各二十四。戊巳庚辛，小面也，邊各十八。用垂線截斗體。從戊巳邊向下至午未底，分元體為二。從辛庚邊向下至申酉底，從庚巳至戌亥，從辛戊至子丑，皆如之。分元體為九。一居中，成立面體。四邊四體為整堵。四隅四體為陽馬。各以本法求其容，并為斗體之容。⁶²

⁶¹ 同上。

⁶² 羅雅谷，《測量全義》卷六，頁十，《崇禎曆書》，頁 1387。

上述這個「截體分求之法」(參考圖十七)，幾乎就是《九章算術》「方亭術」的部分內容之翻版。⁶³羅雅谷究竟如何得知？或許他所參考的「九章算」就包括此一內容吧。不過，有了底邊是正方形(方亭底面(大面)是正方形)的案例，羅雅谷相當得心應手地將此一公式推廣到下列情況：「若斗面為多邊形而無法，或其稜不等，亦用此法」。

《測量全義》卷六還有五種正多面體的體積計算、「量圓球之容」，以及「量橢圓體之容」等等。在此，我們只簡略引述其中的「量圓球之容」(球體積計算)，他指出：「圓球之全理，見亞奇默德《圓球圓柱書》，併見《幾何(原本)》一十四卷。」請參考他的第一題：「球上大平圓之積，為本球圓面積四之一」，亦即(半徑為 R 的)球面上大圓(great circle)的面積等於球表面積($4\pi R^2$)的四分之一。在中算的脈絡中，球表面積的計算涉及《九章算術》卷一「方田章」的「宛田」圖形概念，⁶⁴而這當然是中算家(包括劉徽與祖沖之)無從處理的主題。

(未完待續)

記吳嘉麗教授二三事

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

驚聞吳嘉麗教授驟逝，非常意外與不捨。茲追憶與她交遊的二三事，聊表些許懷思，也用以誌記我們曾經共事的美好時光。

淡江大學科學史講座課程之創立，完全是該校化學系教授的全力支持，其中吳嘉麗扮演最關鍵的角色。當然，該校化學家(包括曾憲政教授)的開闊胸襟與博雅素養，也有助於凝聚開課共識，乃能在系務會議中通過，開設一門與通識有關的科學史課程。我記得最早在臺灣倡導科學史研究的郭正昭先生也曾給過一些建議，後來他移居美國之後，很多人大概已淡忘。

這類課程在科學史尚未在臺灣學界成為一個學門之前，顯得十分重要，因為它發揮了象徵性的意義，儘管科學史的專業學者還不知道何時才會現身。在這種處境中，嘉麗老師主持講座始終如一，固定開課，並且四處網羅國內(主要是業餘的)學者參與。這種作風也充分表現在她所投注的婦女運動，以時間換取空間，這是她非常寬容的處世之道。

這種寬容也襯托她那律己甚嚴的豁達，反正路已安排，向前走就是。她在西雅圖華大博論口試之後，立刻在當天搭機返臺任教。她的最後簡訊說：「所幸我大部分的任務都已交待，沒有太多牽掛，現在我盡量配合治療就好，感謝所有朋友們給我的鼓勵。」嘉麗老師，一路好走！

⁶³ 有關《九章算術》卷五「方亭術」，可參考郭書春，《九章算術譯注》，頁177-178。

⁶⁴ 「宛田」被認為是一種「球冠形」(spherical cap)。參考郭書春，《九章算術譯注》，頁63。

HPM 通訊

發行人：洪萬生（臺灣師大數學系退休教授）
主編：蘇惠玉（西松高中）副主編：林倉億（台南一中）
助理編輯：黃俊瑋（和平高中）
編輯小組：蘇意雯（台北市立大學）蘇俊鴻（北一女中）
葉吉海（桃園陽明高中）陳彥宏（成功高中）
英家銘（清華大學）
創刊日：1998 年 10 月 5 日
網址：<https://www.hpmociety.tw/>
聯絡信箱：suhy1022@gmail.com

第二十五卷第一期目錄 2022 年 3 月

■ 從圭竇形談起：《測量全義》初探(下)
.....洪萬生

■ 牛頓與萊布尼茲之爭的 $\ddot{d}$
.....劉柏宏

從圭竇形談起：《測量全義》初探（下）

洪萬生

臺灣數學史教育學會

本文謹獻給郭書春教授，祝賀他八十華誕

（接續第二十四卷第三期〈從圭竇形談起：《測量全義》初探（上）〉）

四、阿基米德《圓書》

《測量全義》卷五〈測面下〉主題單元依序是「圓面求積」（圓面積公式）、「量橢圓法」、¹「量圈之一分」，以及「量面用法」。對照卷四的〈測面上〉之處理三邊形、四邊形、五邊形及五以上之多邊形，卷五主要針對圓面及橢圓面積之計算。當然，為了計算比較複雜的多邊形之面積，羅雅谷還引進「變形法」及「截形法」，前者我們將在下一節討論其中一個案例。

在「圓面求積」這個單元中，羅雅谷開宗明義就針對阿基米德的《圓書》提出下列說明：

凡圓面積，與其半徑線偕半周線作矩內直角形之積等。依此法，則量圓形者，以半徑乘半周而已。古高士亞奇默德作《圓書》，²內三題洞燭圓形之理。今表而出之，為元本焉。³

緊接著，羅雅谷引述那三（個命）題及其證明。在此，僅引述這三題內容及其相關的備

¹ 「橢」字無誤。

² 羅雅谷將阿基米德中譯為亞奇默德。

³ 羅雅谷，《測量全義》卷五，頁二，《崇禎曆書》，頁 1366。

註：⁴

第一題 圓形之半徑偕其周做勾股形，其容與圓形之積等。

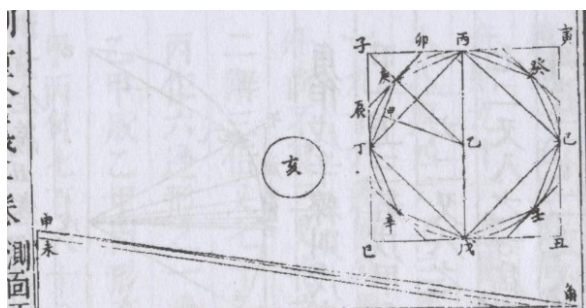
第二題 凡圓周，三倍圓徑有奇。此法有二。其一云三倍又七十之十，則朒。其二云三倍又七十一之十，則盈。⁵

第三題 圓容積與徑上方形之比例。解曰：一為十一與十四為朒，一為二百二十三與二百八十四為盈。

此外，羅雅谷還給出「今士別立一法」所得的圓周率 π 之精密近似值（二十一位）：⁶

$$3.14159265358979323846 < \pi < 3.14159265358979323847$$

但卻評論說：「子母之數，積至二十一字，為萬億億，難可施用」，而且也沒有說明此一近似值的出處。



圖十八：阿基米德「圓面求積」證明用圖

在本節「圓面求積」最後，羅雅谷給了兩個備註，值得引述如下：

古設周問積法曰：周自之，十二而一。此猶是徑一圍三，較之徑七圍二十二者，尤疏也，故不合。

古設徑問積法，以徑自乘，三之，四而一。如設徑一，自之得一，三之得三，四而一，則四之三，為圓之積。全數為徑上之方形，則知徑上之方，與圓之積為四與三。然前論一四與一一而合。今之四與三，則所謂虛隔二五也。⁷

根據這兩個備註，再加上（前文所引）羅雅谷在「圓面求積」的開場白所指稱的「量圓形者，以半徑乘半周而已」，以及他在「一題之系」（第一命題的系理）中所提及的「若

⁴ 《圖書》第一題的「現代」版本，可參考李文林主編，《數學珍寶》，頁 147-149。

⁵ 此處是指圓周率的不等式： $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ ，後者就是我們熟悉的 $22/7$ 。上界為盈，下界為朒，羅雅谷的說法剛好相反，顯然有誤。

⁶ 羅雅谷，《測量全義》卷五，頁十三，《崇禎曆書》，頁 1372。

⁷ 引《測量全義》卷五，頁十三，《崇禎曆書》，頁 1372。

全徑偕全周矩內方形，則四倍圖積」，⁸我們可以確信他熟黯《九章算術》的圓田四術：

- 圓田術曰：半周、半徑相乘得積步；
- 又術曰：周、徑相乘，四而一；
- 又術曰：徑自相乘，三之，四而一；
- 又術曰：周自相乘，十二而一。⁹

只是這些「術」的劉徽註解，如前文提及，他應該無從得知。不過，以阿基米德的《圓書》為立論基礎，他顯然清晰地掌握了箇中的「法之所以然」之故。

五、「兩正方形變為一正方」

在《測量全義》卷五中，羅雅谷也介紹「變形法」，並以六題解說之，茲先引述如下：

- 其一：設三角形。求變為等底、等積方形。
- 其二：設一方形、一線。求變為他方形，其邊與線等。
- 其三：設矩內形。變為正方形。
- 其四：設多邊形。變為正方形。
- 其五：兩正方形。變為一正方。
- 其六：設矩形。求變為他矩形，其邊各有比例。

這六個命題應該都沿襲自《幾何原本》或其應用。針對第五個，羅雅谷給了一個註解：

《幾何原本》一卷四十七題備論其理，此則用法。¹⁰

這部幾何經典的第一卷命題四十七就是鼎鼎大名的畢氏定理，羅雅谷顯然利用其「證法」，解決此一作圖問題。以下引述他所謂的「用法」：

置兩正方形。以角相切，令其邊為直線，角之外為直角，即成甲勾股虛形。其弦聯兩元形之各一角，即以為底，作正方形，其積與兩元形并積，等。其變法作丙戊庚巳丁矩形，及乙寅線。又截壬形，與子形、庚形等。次截取癸實形，移補丙丁虛形。次取丙子實形，移補甲虛形。次取壬實形，移補庚虛形。次取庚丑實形，移補戊巳虛形。次取戊實形，移補辛虛形，成卯辰午未正方形。¹¹

參考圖十九（羅雅谷原書插圖），羅雅谷將給定的兩個正方形之一邊變成為一個勾

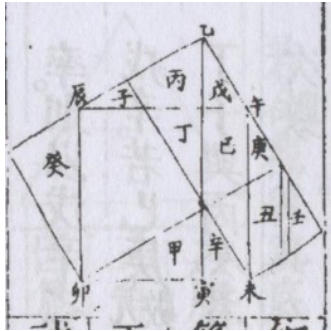
⁸ 引《測量全義》卷五，頁十一，《崇禎曆書》，頁 1371。

⁹ 引郭書春，《九章算術譯注》，頁 39, 58-59, 60。

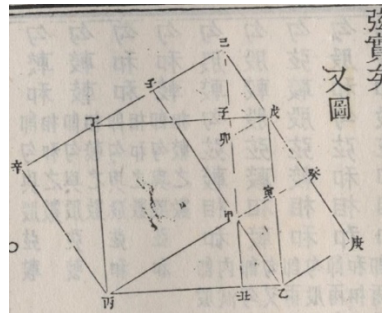
¹⁰ 引羅雅谷《測量全義》卷五，頁二十七，《崇禎曆書》，頁 1379。

¹¹ 同上。

股形的勾與股，作出一個「勾股虛形」。接著，再以這個勾股形之弦為邊，作一個正方形，他的「所求」就是給定的兩個正方形的面積之和，會等於這個新的（大）正方形之面積。為此目的，「變法」先是包括了下列作圖：矩形「丙戌庚巳丁」、乙寅線（前述矩形之對角線，又此線與勾股形的弦邊垂直）。又作壬形、丑形，以及子形（原已存在）。然後，將癸形「實形」移補到丙丁「虛形」。¹²將丙子實形移補到甲虛形。將壬實形移補到庚虛形。將庚丑實形移補到戊巳虛形。最後，戊實形移補到辛虛形，而成為卯辰午未正方形，得其所求。



圖十九：《測量全義》掃描



圖二十：《勾股舉隅》掃描

羅雅谷的上述「證明」之特色，乃是基於《幾何原本》的「備論其理」（之啟發），於是，所求正方形就可從勾股形的弦邊作圖出來。不過，上述這個「移補」儘管都基於全等變換，其進路卻完全不是歐幾里得的本色。歐幾里得的證明是找到「勾邊正方形＋股邊正方形」與「弦邊正方形」的概念連結關係，而不是像羅雅谷一樣，從前者一步一步地「移補」而得到後者。¹³事實上，羅雅谷的進路很難不讓我們聯想到劉徽的「出入相補」。至於他的想法源頭何在，我們還無從得知。可以想見，羅雅谷絕對不可能從歐幾里得的證明中，找到關鍵證明步驟中的「移補」程序，因為歐幾里得的進路是概念性（conceptual）而非程序性的（procedural）。¹⁴

由於南宋版《九章算術》（含劉徽注）在明代失傳，因此，羅雅谷所謂的「九章算」不可能指向《九章算術》，他當然更不可能知道劉徽的註解。同樣的情況，當然也適用於明末清初的中國數學家。梅文鼎就是一個絕佳的案例，他對劉徽注究竟有多少理解我們無從得知，儘管他曾看過《九章算術》第一卷〈方田章〉。¹⁵不過，也正因為如此，所

¹² 癸形（勾股形）是原先所給定股邊正方形之一部分，故稱之為「實」形。丙丁形（勾股形）不是一開始就存在，故稱之為「虛」形。

¹³ 參考洪萬生，〈傳統中算家論證的個案研究〉。羅雅谷的「移補」與劉徽的「出入相補」都結合了程序性知識（procedural knowledge）及概念性知識（conceptual knowledge），不像歐幾里得的《幾何原本》命題之證明（譬如畢氏定理），是完全概念性面向的知識內容。有關程序性 vs. 概念性，可參考 J. Hiebert ed., *Conceptual and Procedural Knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ/London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1986.

¹⁴ 程序性知識訴諸「算則或算法」（algorithm），參考同上。這是因為歐幾里得從「弦邊正方形」切出兩個長方形之後，然後，再證明它們各自等於「勾邊正方形」及「股邊正方形」。在此過程中，他運用 SAS 全等性質而非等面積圖形的「移補」。參考《幾何原本》卷一第四十七題。

¹⁵ 1678 年，梅文鼎曾在黃虞稷處所見到《九章算術》方田章，但一生未見全書。參考李迪，〈梅文鼎評傳〉，頁 429。

以，當他在自己的《勾股舉隅》中，顯然引用羅雅谷的插圖及主要進路，¹⁶以證明畢氏定理，他主張所謂的「幾何即勾股」，似乎因而有了更吸引人的訴求力量。¹⁷事實上，他在此提供了兩個證明。由於第二個證明之插圖襲自羅雅谷，請讓我們引述其方法如下：

甲乙丙勾股形。乙丙弦，其冪戊乙丙丁。甲丙股，其冪甲壬辛丙。甲乙勾，其冪乙庚癸甲。

論曰：從甲角作已甲丑垂線，¹⁸分弦冪為大小兩長方，一為子丙大長方，準股冪；一為戊丑小長方，準勾冪。試移甲丑丙勾股形補已子丁虛形；又移已壬甲勾股形補丁丙辛虛形，則子丙大長方即移為甲辛股冪。次移甲丑乙為勾股形補已子戊虛形，再移已戊卯勾股形補戊癸寅虛形。末移戊卯甲癸形補癸寅乙庚虛形。則戊丑小長方即移為庚甲勾冪矣。¹⁹

參考圖二十（取自梅文鼎原書版），結合上述「論曰」，我們可以發現梅文鼎的「移補」進路完全與羅雅谷相反，他是將「弦邊正方形」一步一步地，「移補」成「勾邊正方形＋股邊正方形」。同時，他在論證時，圖形的（直線交點）符號標示以及說理的程序，²⁰都遠比羅雅谷成熟且高明，不愧為明末清初一代曆算大師。

六、結語

羅雅谷所引述的「九章算」究竟是一部著作，或是泛指傳統中算的概念，方法或公式，由於我們還找不到直接相關的線索，在此無法給出定論。²¹不過，有一些蛛絲馬跡，倒是指向程大位的《算法統宗》（1592年首版問世）。正如前述，《同文算指》（1614）就有多題與《算法統宗》所收相同，利瑪竇、李之藻據以編譯的這部西算之母本，就是丁先生的 *Arithmetica practica*（實用算術）。另一方面，羅雅谷在山西居停七年學習語言與「在地知識」，他不可能未曾接觸《算法統宗》，因為這一部算書非常暢銷，到了清初，「海內握算持籌之士，莫不家藏一編，若業制舉者之於四子書、五經義，翕然奉以為宗」。²²

¹⁶ 梅文鼎熟悉《崇禎曆書》可以徵之於他的著作如《勾股舉隅》、《幾何通解》，以及《幾何補編》等等。他的《幾何補編》自序，就留下忠實的見證：「王申春月偶見館童屈篋為燈，詫其為有法之形，乃覆取《測量全義》量體諸率，實考其作法根源。」

¹⁷ 梅文鼎的「幾何即勾股」以及其孫子梅穀成後來所提出的「借根方即天元一」（前者代數版），是清初「西學中源」立論的可演示案例，而不是《史記》所「泛稱」的「疇人子弟四散，或在夷狄、或在諸夏」。

¹⁸ 梅文鼎自註：「與乙丙弦成十字」，此一垂直性質之形容非常形象化。

¹⁹ 引梅文鼎，《勾股舉隅》，頁4-5，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》（四）（鄭州：河南教育出版社），頁433-446。

²⁰ 這個現象蠻奇特的，照理說出身西算背景的羅雅谷，應該會以比較具有「現代性」的手法，來表現「圖示」才是。

²¹ 史家王淪生指出：徐光啟曾將吳敬的《九章算術比類大全》勾股卷的中算測量法六種，與《測量法義》中的西法進行比較，而撰著《測量異同》，參考王淪生，〈《測量異同》提要〉郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙：數學卷》（四），頁19。因此，如果徐光啟曾參考吳敬算書，那麼，羅雅谷當然也不無可能。不過，在此我們不打算討論此一議題。

²² 轉引李儼、杜石然，《中國古代數學簡史》，頁221。那是1716年，程家後代子孫在清康熙新刻本的序言中，所指出的出版熱潮。也就在那個時候，程家還在舊宅對面起造了印刷廠。

無論如何，羅雅谷編寫《測量全義》時，除了在三角學（平面與球面）主題上，主要參考玉山若干的《論各種三角學》之外，在平面與立體的「容」積計算上，則是運用《幾何原本》的核心概念，譬如平行，來收編《九章算術》卷一「方田章」、卷五「商功章」的主要公式。即使他可能研讀程大位的《算法統宗》，然而，他無從得知劉徽注的成果，則是完全可以確定的事實。

儘管如此，他在證明面積或體積公式時，使用了類似劉徽「以盈補虛」或「出入相補」的「移補」進路，這顯然是頗具「中算特色」的方法，足見他在收編時，已經相當可以掌握「在地的」數學風格。另一方面，如果他在處理《測量全義》的面積計算時，確曾參考程大位《算法統宗》，那麼，他對於平面圖形的收編，就相當節制而有所選擇，並以能否納入定義的概念的階層（*hierarchy of concept*）為依歸。譬如說吧，《算法統宗》就收入五個不規則曲線形，依序稱之為「五不等田」、「三圭形」、「倒順二圭」、「六角形」，及「八角形」。²³針對這些《幾何原本》所謂的「無法之形」，羅雅谷顯然視而不見。還有，即使程大位也納入下列看來是比較規則的平面圖形，如「二圭併弧矢」、「圭併弧矢」、「股圭併弧」、「三弧併一圭」，及「二弧併一圭」等等，²⁴不過，由於其中所涉「弧田」（弓形）也是「無法之形」，因此，羅雅谷顯然也不曾考慮這些圖形。

另一方面，羅雅谷也極為關注「不發之根」與圓周率近似值的估計，他常以「駁曰」來指出傳統中算「口訣」之謬，再繼之以「論曰」，為他的「測面」（面積計算理論）提供一個更清晰的圖像。至於他所引進的海龍公式儘管證明略有瑕疵，然而，卻留給梅文鼎及其孫子梅穀成一個尚待完成的研究課題。

梅文鼎深受《測量全義》乃至《崇禎曆書》之影響，除了本文第五節所討論的具體案例之外，我們從他的年譜中，也可以找到文獻的證據。²⁵其實，他的《平三角舉要》更是仿效《測量全義》之論述（體例），我們輕易複按即可掌握大致輪廓。史家劉鈍認為這是中國史上第一部三角學教程的著作，也是梅文鼎藉助中算勾股術整合（西方）三角學的一個嘗試。²⁶

不過，無論梅文鼎的「幾何即勾股」乃至梅穀成的「借根方即天元一」，如何替後來的「西學中源說」助威，中國傳統數學終於是在 1600 年左右告一段落了。²⁷之後朝向西化或現代化的發展，有一點反諷地，梅文鼎祖孫兩人竟然是領頭羊。然而，論其端倪，羅雅谷的《測量全義》（包括論證與計算）就像《幾何原本》（只包括論證）一樣，都是非常關鍵的（西算）啟蒙著作。

²³ 程大位，《算法統宗》，卷三，頁十一～十二，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙：數學卷》（二），頁 1269。

²⁴ 程大位，《算法統宗》，卷三，頁十三，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙：數學卷》（二），頁 1270。

²⁵ 1675 年（康熙十四年），時年四十三歲的梅文鼎再赴南京參加鄉試，購得《崇禎曆書》（內缺《比例規解》），「窮晝夜不捨」，李迪，《梅文鼎評傳》，頁 428。

²⁶ 劉鈍，〈《平三角舉要》提要〉，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙：數學卷》（四），頁 459。

²⁷ 參考蘇俊鴻，〈學術贊助：清代數學發展的一個數學社會史的考察〉，洪萬生主編，《數學的東亞穿越》，頁 171-195。

參考資料

- Grattan-Guinness, Ivor (1997). *The Fontana History of Mathematical Sciences*. London: FontanaPress.
- Heath, Thomas L. (1956). *Euclid: Thirteen Books of Elements*. New York: Dover Publications, INC.
- Martzloff, Jean-Claude (1997). *A History of Chinese Mathematics*. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag.
- 毛爾 (Eli Maor) (2000). 《毛起來說三角》(*Trigonometric Delights*)，臺北：天下文化出版公司。
- 李文林主編 (2000). 《數學珍寶：歷史文獻精選》，臺北：九章出版社。
- 李迪 (2006). 《梅文鼎評傳》，南京：南京大學出版社。
- 李建勳 (2006). 〈海龍公式的流變：由徐光啟到梅穀成〉，《HPM 通訊》9(4): 9-15。
- 李儼、杜石然 (1976). 《中國古代數學簡史》，香港：商務印書館香港分館。
- 金格瑞契 (Owen Gingerich) (2007). 《追蹤哥白尼》(*The Book Nobody Read*)，臺北：遠流出版公司。
- 奔特等 (Lucas N. H. Bunt et. al.) (2019). 《數學起源：進入古代數學家的另類思考》(*The Historical Roots of Elementary Mathematics*)，臺北：五南出版社。(中譯者：黃美倫、林美杏、邱珮瑜、王瑜君、黃俊瑋、劉雅茵)
- 洪萬生 (2007). 〈傳統中算家論證的個案研究〉，《科學教育學刊》15(4): 357-385。
- 洪萬生 (2010). 〈數學與明代社會：1368-1607〉，祝平一主編，《中國史新論：科技與中國社會分冊》(南港：中央研究院歷史語言研究所 / 臺北：聯經出版公司)，頁 353-422。
- 洪萬生 (2021). 〈從圭竇形到拋物線：閒話數學名詞的翻譯語境〉，發表於 2021 臺灣數學史教育學會年會暨東亞數學史研討會，1/30/2021，臺北：台灣師範大學數學系 M202。
- 程大位 (1993). 《算法統宗》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙：數學卷》(二)(鄭州：河南教育出版社)，頁 1217-1422。
- 陳敏皓 (2002). 《〈同文算指〉內容分析》，臺北：國立臺灣師範大學數學研究所碩士論文。
- 梅文鼎 (1993). 《平三角舉要》，郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙：數學卷》(四)(鄭州：河南教育出版社)，頁 461-506。
- 郭書春 (2007). 〈尊重原始文獻 避免以訛傳訛〉，《自然科學史研究》26(3): 438-448。
- 郭書春主編 (2010). 《中國科學技術史：數學卷》，北京：科學出版社。
- 彭君智 (2002). 〈人文社會科學史料典籍研讀會之《測量全義》導讀〉，《HPM 通訊》5(6)。
- 羅雅谷 (1631/2009). 《測量全義》，載徐光啟編纂、潘鼎匯編，《崇禎曆書》，上海：上海古籍出版社，頁 1295-1464。
- 蘇俊鴻 (2013). 《中國近代數學發展(1607-1905)：一個數學社會史的進路》，

臺北：國立臺灣師範大學數學系博士論文。

蘇俊鴻 (2018). 〈學術贊助：清代數學發展的一個數學社會史的考察〉，洪萬生主編，《數學的東亞穿越》（臺北：開學文化出版社），頁 171-195。

杜鴻德 (2019). 《日劇《數學女孩的戀愛事件簿》中的數學》，國立臺灣師範大學數學系在職進修碩士班碩士論文，台北市。

附記：2021/2/19 初稿，張秉瑩、楊清源協助文獻收集，黃美倫協助編輯，都謹此申謝。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂 PDF 電子檔。要訂閱請將您的大名、地址、e-mail 至 suhv1022@gmail.com
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請 e-mail 至 suhv1022@gmail.com
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<https://www.hpmsociety.tw/>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》聯絡員

日本：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）

基隆市：許文璋（八斗高中校長）杜鴻德（基隆工商）

台北市：楊淑芬（松山高中）杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）

蘇俊鴻（北一女中）陳啟文（中山女高）蘇惠玉（西松高中）蕭文俊（中崙高中）

郭慶章（建國中學）李秀卿（景美女中）王錫熙（三民國中）謝佩珍、葉和文（百齡高中）

彭良禎（師大附中）郭守德（大安高工）張瑄芳（永春高中）張美玲（景興國中）

文宏元（金歐女中）林裕意（開平中學）林壽福、吳如皓（興雅國中）傅聖國（健康國小）

李素幸（雙園國中）程麗娟（民生國中）林美杏（中正國中）朱廣忠（建成國中）吳宛柔（東湖國中）王裕仁（木柵高工）蘇之凡（內湖高工）

新北市：顏志成（新莊高中）陳鳳珠（中正國中）黃清揚（福和國中）董芳成（海山高中）孫梅茵

（海山高工）周宗奎（清水中學）莊嘉玲（林口高中）王鼎勳、吳建任（樹林中學）陳玉芬

（明德高中）羅春暉（二重國小）賴素貞（瑞芳高工）楊淑玲（義學國中）林建宏（丹鳳國

中）莊耀仁（溪崑國中）、廖傑成（錦和高中）

宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中）吳秉鴻（國華國中）林肯輝（羅東國中）林宜靜（羅東高中）

桃園市：許雪珍、葉吉海（陽明高中）王文珮（青溪國中）陳威南（平鎮中學）

洪宜亭、郭志輝（內壢高中）鐘啟哲（武漢國中）徐梅芳（新坡國中）程和欽（大園國際高

中）、鍾秀瓏（龍岡國中）陳春廷（楊光國民中小學）王瑜君（桃園國中）

新竹市：李俊坤（新竹高中）洪正川（新竹高商）

新竹縣：陳夢綺、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）

苗栗縣：廖淑芳（照南國中）

台中市：阮錫琦（西苑高中）林芳羽（大里高中）、洪秀敏（豐原高中）、李傑霖、賴信志、陳姿研（台中女中）、莊佳維（成功國中）李建勳（萬和國中）賴忻堂（龍津高中校長）

彰化市：林典蔚（彰化高中）

南投縣：洪誌陽（普台高中）

嘉義市：謝三寶（嘉義高工）郭夢瑤（嘉義高中）

台南市：林倉億（台南一中）黃哲男、洪士薰、廖婉雅（台南女中）劉天祥、邱靜如（台南二中）張靖宜（後甲國中）李奕瑩（建興國中）、李建宗（北門高工）林旻志（歸仁國中）、劉雅茵（台南科學

園區實驗中學）

高雄市：廖惠儀（大仁國中）歐士福（前金國中）林義強（高雄女中）

屏東縣：陳冠良（新園國中校長）楊瓊茹（屏東高中）黃俊才（中正國中）

澎湖縣：何嘉祥 林玉芬（馬公高中）

金門：楊玉星（金城中學）張復凱（金門高中）馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！