以 MAPLE 輔助微積分教學
心得報告

Wei-Chang Shann 單維彰

National Central University, Taiwan

Dec 26, 1996

MAPLE V WORKSHOP TAIWAN

緣起

這學期，中央大學機械系的同仁開始進行他們的教改計劃。 在我所瞭解的範圍內，這個計劃包括將數學系支援的微積分課程縮短爲一個學期， 而由其本科系授課的工程數學增加爲三學期。 數學系所支援的一學期微積分， 被籠統地定位成以

- 核心理論

爲主的

- 單變數微積分

課程。

數學系在一學期的微積分之外，提供另一學期的服務性課程。 包括數值分析，常微分方程，離散數學和統計。

同時，中央大學的遠距教學重點實驗室， 正好需要開發數學方面的多媒體網路教材。

學期初聽項武義教授談其教育理念，他假設：『教得太簡單，使得大家一事無成；適當難度的教材，反而提升學習的興趣。』

自省

- 究竟電腦在教學的過程中有什麼特殊的地位？

Oct 4, 1996 Lecture Notes NO. 1

由於時間的控制因素, 我們在運算能力的訓練上, 很可能會受到限制. 面臨這個無奈的取捨, 我們嘗試以符號計算軟體作為輔助工具. 在認識了當今這一類軟體的能力之後, 我們該有理由相信, 日後的工程師, 其微積分運算能力的重要性, 就有如昨日的工程師, 其四則運算能力的重要性一般: 不太重要. 當然, 快速而正確的心算能力仍然受到人們贊賞, 但是已經鮮少有人會依此而評斷一個工程師的能力. 纖小而可靠的數值計算器, 使得四則運算在人類智識活動中的定位大為改變. 雖然教育體制仍然堅持學生應該具有四則運算的能力, 但是我們不再以此為主要課題. 人們普遍地相信, 只要給予足夠的時間和紙筆, 一個受過完整教育的人必定能完成一個四則運算的命題—因為他了解計算的方法. 在這個課程中, 我們將電腦軟體放在完全一樣的定位上. 也就是說, 我們將堅持學生具有微積分運算的能力. 透過測驗, 學生必須表現出他了解這些運算的基本方法, 而讓我們相信, 只要給予足夠的時間和紙筆, 他必定能完成一個基本的微積分運算命題. 至於一個工程師在他的專業領域中實際面臨的微積分運算問題, 理應交由電腦處理.

- 在電腦如此普及的今天，爲什麼以電腦輔助教學還會令人感到不尋常？
- 在教學過程中，應該讓電腦成爲一個特殊地位的工具，還是讓它有如紙和筆，課本和黑板一樣的自然？
- 我要不要告訴學生，像 Maple 這種軟體的存在？要告訴他們多少？
- 在有了 Maple 之後，微積分的演算究竟還有什麼意義？

Dec 4, 1996 Lecture Notes NO. 16

16.2 課本 **2.8** 習題 6. 利用以下的 Maple 指令來觀察 $g(x)$ 圖形:

```
g := x -> if abs(x) <= 2 then (1 + cos(Pi*x/2)) else 0 fi;
plot(g, -3..3, -3..3);
```

注意這個函數的圖形如鐘 (Bell function). 回答課本上的 (a), (b) 兩個問題.

Dec 6, 1996 Lecture Notes NO. 17

17.1 課本 **5.1** 習題 13, 14 [或許你應該先用 Maple 畫個簡圖, 以幫助你判斷. 例如 `plot(sin(x)^2 - cos(x), x=0..Pi);`.]

Dec 11, 1996 Lecture Notes NO. 18

次頁右下角的圖形是用以下的 Maple 指令畫出來的:

```
with(plots);
Ht := r -> 500/(Pi*r^2);
M := r -> 2*Pi*r^2 + 1000/r;
Bottom := spacecurve([r, Ht(r), 180], r=3.3..5.3,
color=white, thickness=1):
Solu := spacecurve([r, Ht(r), M(r)], r=3.3..5.3,
color=white, thickness=2):
Curve := plot3d(2*Pi*r^2+2*Pi*r*h, r=3.3..5.3,
h=5.6..14.6):
display3d({Bottom, Solu, Curve});
```

注意, `Bottom`, `Solu`, `Curve` 之後以 : 結束. 否則螢幕上會出現許多不必要的訊息. 在 `display3d` 之後, 會出現獨立的圖形視窗. 在這個視窗的功能欄內拉下 `Axes` 選單, 試著選幾種不同的座標軸畫法. 然後練習轉換視角. 您在圖形視窗內點滑鼠左鍵, 則看到圖形變成一個六面體的代表符號. 用滑鼠的左鍵拖動這個六面體, 然後點滑鼠右鍵 (或中鍵), 則會看

深耕

- 配合 Maple 微積分的課程內容會不會不像數學？
- 有了 Maple 的輔助，要朝哪個方向改變傳統微積分課程的內容？
- Maple 使得微積分變得更輕鬆，還是更困難？

二十六個小時的課程，幾乎半個學期，授以深入的數學課程。

- 連續函數的 ϵ-δ 定義，收斂數列的 ϵ-N 定義。
- 實數的完備性：漸增有上界是數列必收斂，最小上界定理，柯西數列必收斂， 實數建構論。
- 連續函數的性質：中間值定理，函數值與極限值的互換。
- 閉區間上的連續函數性質：均勻連續，最大值定理。
- 柯西積分定理：閉區間上的連續函數必可積。
- 積分平均值定理，微積分基本定理。

Dec 2, 1996 Midterm Examination

1. 以下命題的極限值是多少?

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}$$

(A) 2
(B) ∞
(C) $\frac{1}{2}$
(D) 0

2. 令 $f(x)=x^3+1$, $g(x)=2^{x^2+1}$, $h(x)=\sqrt{x+1}$, $k(x)=\log_2 x$. 以下敘述何者為真(單選)?
(A) $h(g(x))=2^{x+3}$.
(B) $h(x)$ 的定義域和 $k(x)$ 的定義域一樣.
(C) $k(g(x))=g(k(x))$.
(D) $k(f(x))$ 的定義域是 $\{x>-1\}$.

3. 下列敘述中, 哪一個和其他三個在邏輯上比較沒有關係?
(A) 實數的完備性.
(B) 函數 $\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 處不連續.
(C) 漸增有上界之實數數列必收斂.
(D) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 內為連續函數, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$, 則必有一 $c\in[a,b]$ 使得 $f(c)=0$.

4. 下列敘述中, 哪一個和其他三個在邏輯上比較沒有關係?
(A) 數列 $\{x_n\}$ 收斂到 $\hat{x}$ 的 ϵ-N 定義.
(B) 函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間內的曲線下面積.
(C) 函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中的反函數.
(D) 函數 $f(x)$ 在 x_0 處的切線斜率.

5. 令 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上連續. 下列敘述中, 哪一個不是 $f(x)$ 必然具備的性質?
(A) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 內有界.
(B) $f(x)$ 在 (a,b) 內可微.
(C) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 內可積.
(D) 若 $\lim_{n\to\infty} x_n=\hat{x}$, 且 $\hat{x}\in(a,b)$, 則 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(\hat{x})$.

6. 敘述柯西-西瓦茲不等式 (Cauchy-Schwatz inequality).
利用它來證明

$$\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2},\quad \forall x,y\ge 0.$$

7. 敘述實數完備性的定義.
陳述五條與實數完備性有關的定理.

8. 下圖是某 $f(x)$ 的圖形. 在標示的 A, B, ..., E 之中, 哪個點的
(a) $f(x)$ 最大? (b) $f(x)$ 最小? (c) $f'(x)$ 最大? (d) $f'(x)$ 最小?

9. 下圖是某 $f'(x)$ 的圖形 (注意, 不是 $f(x)$). 在標示的 A, B, ..., F 之中, 哪個點的
(a) $f(x)$ 最大? (b) $f(x)$ 最小? (c) $f'(x)$ 最大? (d) $f'(x)$ 最小?

10. 令 $0 < a < 1$ 為一常數. 考慮數列

$$x_n = a^n, \quad n \geq 1.$$

證明 $\{x_n\}$ 收斂.
現在我們知道, 存在某數 $\hat{x}$, 使得 $\lim x_n = \hat{x}$. 你認為 $\hat{x}$ 的數值是什麼呢?
用你自己觀察的 $\hat{x}$ 值以及 ϵ-N 論證, 證明

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \hat{x}.$$

11. 敘述函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間中均勻連續的 ϵ-δ 定義.
我們知道 x^2 在 $[a,b]$ 中是連續的, 所以 x^2 在 $[a,b]$ 中是均勻連續. 請針對這個例子, 找出定義中的 δ 與 ϵ 的關係.

12. 敘述極限的夾擊定理.
若 $\xi \in [x, x+h]$, 證明

$$\lim_{h\to 0} \xi = x.$$

13. 敘述中間值定理.
敘述連續函數的積分平均值定理.
證明連續函數的積分平均值定理.

14. 敘述 (第一型式的) 微積分基本定理.
用中文解釋這個定理的涵義.
證明上述定理.

- 平均 $\mu = 60.7$，標準差 $\sigma = 15.2$。六人成績 $\geq \mu + \sigma$ (95, 91, 91, 85, 83, 82)，七人成績 $\leq \mu - \sigma$ (44, 43, 41, 41, 38, 34, 34)。

- 四小時微分演算課程，一百題基本訓練題。

Dec 13, 1996 The Second Examination

1. $y = -3x^4 - 4x^3 - 6x + 2$

2. $w = (t^3 + 5t)(t^2 - 7t + 2)$

3. $x^2 + y^2 = \sqrt{7}$, find $\dfrac{dy}{dx}$

4. $f(y) = \sin^{-1}(y^2) = \arcsin(y^2)$

5. $f(x) = x^2 \cos x$

6. $w = (\sqrt{t} + 1)^{100}$

7. $\sin(xy) = 2x + 5$, find $\dfrac{dy}{dx}$

8. $z = \dfrac{t^2 + 5t + 2}{t + 3}$

9. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

10. $y = x \cdot 2^x$

11. $y^2 = \dfrac{x^2}{xy - 4}$, find $\dfrac{dy}{dx}$ at $(4, 2)$

12. $r(\theta) = \sin[(3\theta - \pi)^2]$

13. $f(x) = e^2 + x^e$

14. $f(x) = 6e^{5x} + e^{-x^2}$

15. $x \ln y + y^3 = \ln x$, find $\dfrac{dy}{dx}$

16. $s(\theta) = \sin^2(3\theta - \pi)$

- 平均 $\mu = 86.5$，標準差 $\sigma = 18.6$。十一人成績 $\leq \mu - \sigma$ (75, 70, 65, 65, 60, 60, 60 55, 45, 35, 25).

野人獻曝

- 以 Maple 的模擬浮點運算協助判斷級數是否收斂。

```
for G from 3 to 6 do
    Digits := G:
    N := 10^G:
    S := 0:
    for k from 1 to N do
       S := evalf(S + (1/k)):
    od:
    S;
od;
```

  得到漸增的結果: 6.16, 8.449, 10.000, 10.7626.

- 若換成計算

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

  得到結果: 0.703, 0.6944, 0.69336, 0.693147.

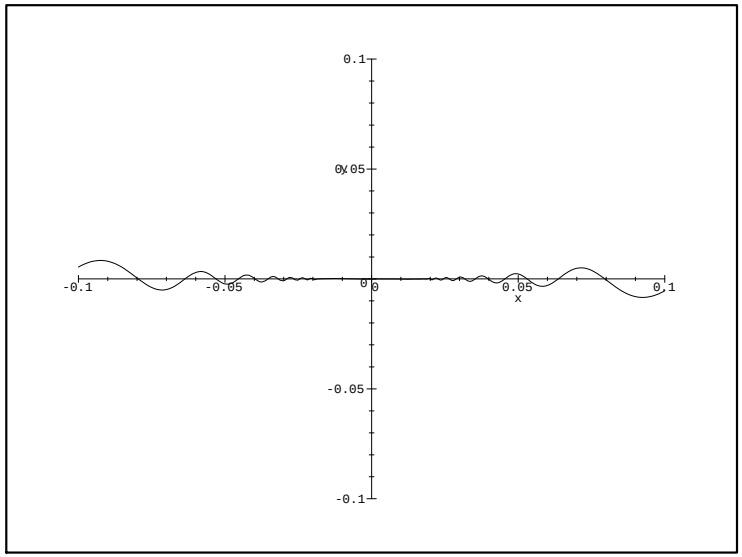
• 以函數圖形協助判斷是否可微。

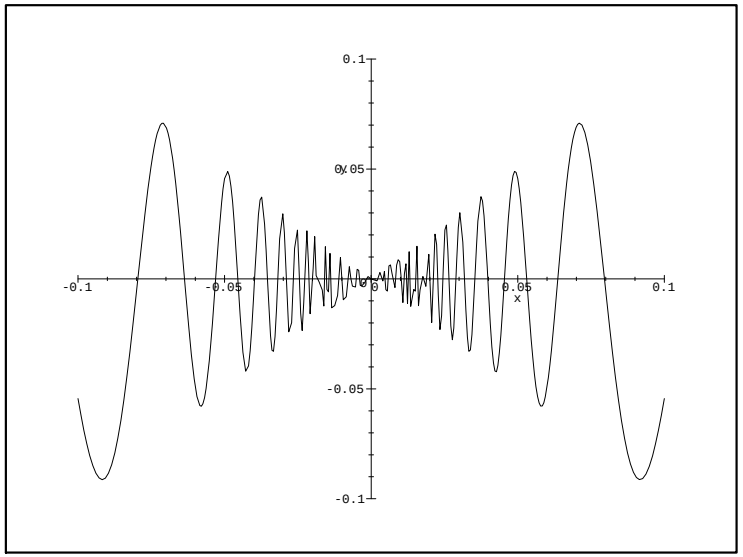
Dec 4, 1996 Lecture Notes NO. 16

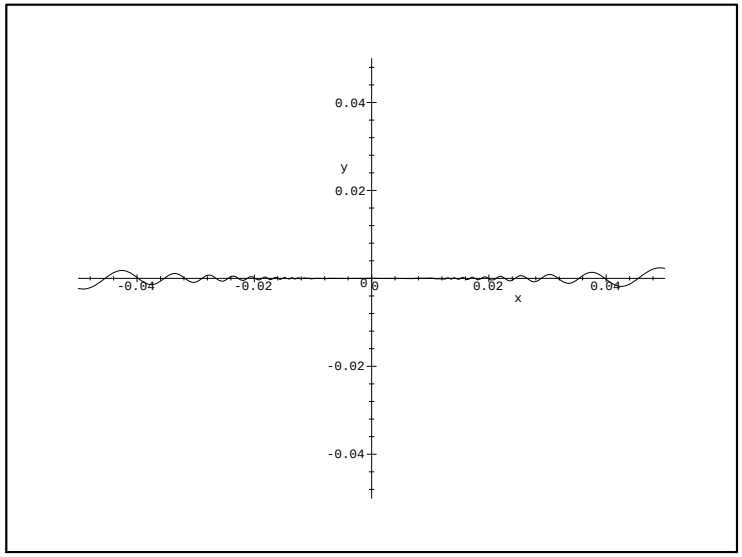
如果 $f(x)$ 在 $\hat{x}$ 處可微, 那麼局部而言, $f(x)$ 的圖形大約就是其切線圖形: $y = f'(\hat{x})x + c$.

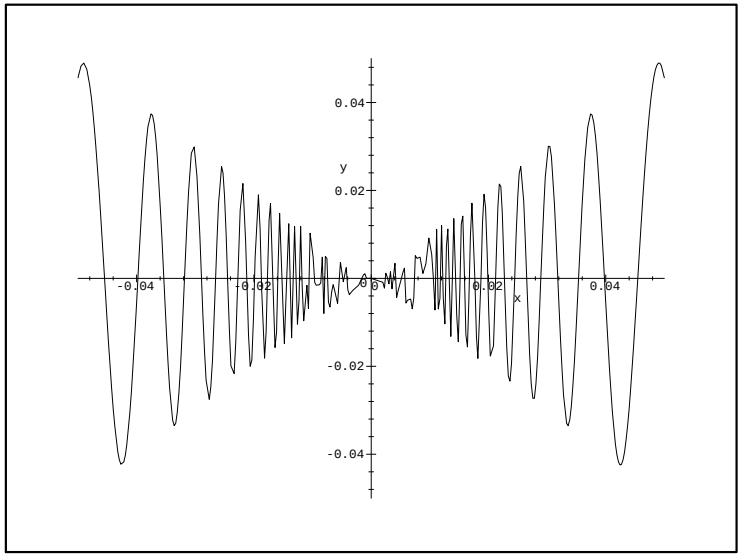
定幾個小數 $h > 0$, 在 $[\hat{x} - h, \hat{x} + h] \times [f(\hat{x}) - h, f(\hat{x}) + h]$ 正方格內畫出 $f(x)$ 的圖形, 若是在點 $(\hat{x}, f(\hat{x})$ 附近這個局部的圖形像是一條直線, 那就表示, $f(x)$ 很可能在 $\hat{x}$ 處是可微的; 而這條直線的斜率就是導數. 當然, 確實的情況, 還需要用數學上可微的定義來驗證.

例如觀察 $x \sin \frac{1}{x}$ 和 $x^2 \sin \frac{1}{x}$ 的小方格圖形.


0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.1
-0.05
0
0.05
0.1
x


0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.1
-0.05
0
0.05
0.1
x


0.04
y
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
x


0.04
y
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
x

展望

- 如果學生除了要學微積分，還要學習電腦及 Maple 的操作，會不會造成新的學習障礙？
- 這個障礙應不應該計入學習成績的評量？要如何計入？
- 如何因應研究所入學考試的微積分試題？
- 遠距即時的 Maple 運算。
- 動畫的製作與撥放，MPEG 格式？
- 已經有四萬字的（中文）講義，四十幅圖片，將擴充成一套網路教材。

http://www.math.ncu.edu.tw/~shann