# 第一章　凌波理論的介紹

## §1-1　引言

在這一章, 我們簡介凌波方程的理論。我們從富氏變換著手, 接著由區段富氏變換引入凌波函數, 以及它縮張 (dilation) 及平移 (translation) 的特性, 我們將凌波函數 (wavelet functions) 的型態作簡單的分類, 為說明凌波函數的重建及分解, 我們給了一個例子為 Daubechies 的凌波函數。為建構 Daubechies 的凌波函數, 我們略述所謂自格函數 (scaling functions) 及多重解分析 (multiresolution analysis)。

## §1-2　什麼是凌波函數？

凌波理論, 是近幾年在計算科學和工程上一個熱門的話題。凌波變換 (wavelets transform) 也是一項分割不同頻率的有用工具。雖然往後文章將侷限於 Daubechies 的凌波函數和 $L^2(R)$ 的空間, 但我們不妨先討論一般的凌波函數及其性質。假設我們已知 $L^p(R)$ 對 $1 \leq p < \infty$ 是 Banach 空間。

若 $f \in L^1(R)$ 則定義其富氏變換 (Fourier transform) 如下:

$$\hat{f}(\omega) = \int f(x) e^{-i\omega x} dx$$

以上的積分是在整個實數軸上, 往後文章中, 除非特別說明積分範圍, 否則我們都在整個實數軸做積分。若再加上 $f$ 是連續及 $\hat{f} \in L^1(R)$ 中, 則富氏變換的逆變換 (inverse Fourier transform) 為

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

以上的函數空間是 $L^1(R)$ , 若考慮 $f \in L^1(R) \cap L^2(R)$ 由 Parseval 等式則它滿

足 $||\hat{f}||_2^2 = 2\pi||f||_2^2$ , 因此我們將富氏變換看成在 $L^1(R) \cap L^2(R)$ 到 $L^2(R)$ 的有界線性變換。再因 $L^1(R) \cap L^2(R)$ 在 $L^2(R)$ 中稠密。所以即可將此定義用於 $L^2(R)$ 上。假設 $f(x)$ 看成在時間上的訊息, 則 $\hat{f}(\omega)$ 為其對頻率的表達式, 但是我們不易從 $\hat{f}(\omega)$ 獲得局部的高頻。而且 $e^{-i\omega x}$ 是全域性的, 故富氏變換的影響是全域性的, 更進一步說, 若 $f(x)$ 在一個小區間改變則影響所有 $\hat{f}(\omega)$ 的值。改進方法有區段富氏變換 (windowed Fourier transform) 如下: 若 $g \in L^2(R)$

$$(T_g^{win}f)(\omega, t) = \int f(x)g(x-t)e^{-i\omega x}dx$$

式中 $g$ 稱為區段函數 (window function) , 其滿足 $xg(x) \in L^2(R)$。這是一種對固定時間區段, 做頻率展現的標準技巧。

相類似於區段富氏變換式, 在凌波理論中有 :

$$(Wf)(a, b) = |a|^{-1/2} \int f(x)\psi(\frac{x-b}{a})dx$$

式中我們先假定 $a, b \in R$ 且令 $\psi^{a,b} = |a|^{-1/2}\psi(\frac{x-b}{a})$ 其中 $\psi$ 要是一區段函數, 則 $\psi$ 必須在 $L^1(R)$ 中且滿足

$$\int \psi(x)dx = 0 \qquad (1\text{-}2\text{-}1)$$

由 (1-2-1) 我們可知 $\psi$ 必須上下振動, 且 $\psi \in L^1(R)$ , 所以 $|\psi(x)|$ 在 $|x|$ 大時必須很小。因此 $\psi$ 的圖形像是小波。在此稱凌波乃因於我們討論的正規 Daubechies 緊緻涵蓋函數, 凌亂卻不失美感; 而且凌字又有逼近的意義, 例如凌晨, 故名凌波函數。相對於 $\psi^{a,b}$ , $\psi$ 又稱為母凌波函數 (mother wavelets)。

## §1-3 凌波函數的分類

凌波函數的型態大致分成兩大類：$\psi^{a,b}$ 當 $a, b \in R$ 為連續型，$\psi^{a,b}$ 當 $a = \frac{1}{2^j}, b = \frac{k}{2^j}$，$j, k \in Z$ 為離散型。在離散型中又分多餘式 (redundant discrete systems) 及正規型 (orthonormal)。

往後我們討論的空間是一個 Hilbert 空間 $L^2(R)$，因此我們有更好的性質。在連續型中，一個函數能被它的凌波變換式重建，亦即

$$f(x) = C_\psi^{-1} \int\int < f, \psi^{a,b} > \psi^{a,b} \frac{dadb}{a^2},$$

式中 $<,>$ 表示 $L^2$ 的內積。而 $C_\psi = 2\pi \int \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega$。(這裡說明 $\int \psi(x)dx = 0$ 是必要的。)

在時間及頻率的分析時，我們通常僅僅對 $a > 0$ 有興趣。在此它的重建公式寫成：

$$f(x) = 2C_\psi^{-1} \int_0^\infty \Big[ \int < f, \psi^{a,b} > \psi^{a,b} \, db \Big] \frac{da}{a^2},$$

離散型則為

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} < f, \psi_{j,k} > \widetilde{\psi}_{j,k}(x) \\ &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} < f, \widetilde{\psi}_{j,k} > \psi_{j,k}(x) \end{aligned}$$

其中 $\{\psi_{j,k}\}$ 及 $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}$ 都是 Riesz 基且

$$< \psi_{j,k}, \widetilde{\psi}_{l,m} >= \delta_{jl}\delta_{km} \qquad j, k, l, m \in Z$$

稱 $\{\psi_{j,k}\}$ 及 $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}$ 互為對偶基底 (dual base)。若 $\{\psi_{j,k}\}$ 是正規基，則 $\widetilde{\psi}_{j,k} = \psi_{j,k}$。還有其它型態上的分類，但我們不深入討論，請參考 [3] 及 [5]。

## §1-4 多重解分析

在正式介紹 Daubechies 的凌波函數之前, 讓我們先瞭解多重解分析。設 $V_j$ 是一族 $L^2(R)$ 的子空間且滿足以下條件：

(1) $\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots$

(2) $\cup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ 在 $L^2(R)$ 中綢密

(3) $\cap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{\emptyset\}$

(4) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$

由以上的四個條件, 我們可知這些空間可以定義一個從 $f \in L^2(R)$ 到 $V_j$ 的投影算子 (othogonal projection) $P_j$。從 (2) 的式子可得知：

$$\lim_{j\to\infty} P_j f = f, \quad f \in L^2(R)$$

這裡要說明的是, (2) 這個式子 $\cup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ 僅僅綢密在 $L^2(R)$，不是等於它, 而且這收斂是對範數收斂, 並不是點收斂。從 (3) 我們知

$$\lim_{j\to-\infty} P_j f = 0, \quad f \in L^2(R)$$

對 (4) 這性質有很好的應用, 使細層與粗層有某種關係, 可經由某種簡單的運算從細層得到粗層的投影。

如果 $\phi \in L^2(R)$，且滿足 (1) 至 (4) 的條件, 我們稱 $\phi$ 生成一個多重解分析 (MRA)。

## §1-5 Daubechies 的凌波函數

以下談到本章的主題, Daubechies 的凌波函數。

令 $c_k = 0, k \notin \{0, \ldots, 2p-1\}$ , 且滿足以下條件

$$\begin{aligned}
&(1)\ \textstyle\sum_k c_k = 2,\\
&(2)\ \textstyle\sum_k (-1)^k k^m c_k = 0,\ \text{for } 0 \le m \le p-1, \quad (0^0 := 1)\\
&(3)\ \textstyle\sum_k c_k c_{k-2m} = 2\delta_{0m}.
\end{aligned} \tag{1-5-1}$$

其中 $p$ 是一個正整數, 也稱作 Daubechies 的凌波函數的階數。(此處我們不証明以上的 $c_k$ 有解, 但是確實已知對每個 $p \ge 1$ 有 $2p$ 個非零解。) 例如 $p = 1$ 有 $c_0 = 1, c_1 = 1$ 和 $p = 2$ 有

$$c_0 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, c_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, c_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}, c_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}。$$

若給定正整數 $p$ , 定義

$$m_0(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2p-1} c_k e^{-ik\omega}$$

則 $m_0$ 是週期 $2\pi$ 的三角多項式。我們可以直接算出

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega+\pi)|^2 = 1 \tag{1-5-2}$$

因為

$$\begin{aligned}
|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega+\pi)|^2 &= \frac{1}{2}\sum_k c_k e^{-ik\omega}\overline{\frac{1}{2}\sum_l c_l e^{-il\omega}} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_k (-1)^k c_k e^{-ik\omega}\overline{\frac{1}{2}\sum_l (-1)^l c_l e^{-il\omega}} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k,l} c_k c_l e^{i(l-k)\omega} + \frac{1}{4}\sum_{k,l}(-1)^{k+l} c_k c_l e^{i(l-k)\omega} \\
&= \frac{1}{4}\sum_l \sum_m c_l c_{l+m} e^{im\omega} + \frac{1}{4}\sum_l \sum_m (-1)^m c_l c_{l+m} e^{im\omega} \\
&= \frac{1}{2}\sum_l \sum_m c_l c_{l+2m} e^{im\omega} \\
&= \frac{1}{2}\sum_m \sum_l c_l c_{l+2m} e^{im\omega} \\
&= 1
\end{aligned}$$

此因 $\{c_k\}$ 滿足條件 (3) , 而且 $\{c_k\}$ 是有限長的數列。

因 (1) 則 $m_0(0) = 1$ ,並且令

$$\hat{\phi}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} m_0(\frac{\omega}{2^j}) \qquad (1\text{-}5\text{-}3)$$

Mallat 在文獻 [7] 証明了上式的右邊存在。我們略述如下：考慮

$$f_n(\omega) = \frac{1}{2\pi}\Big[\prod_{j=1}^{n} m_0(\frac{\omega}{2^j})\Big]\chi_{[-2^n\pi,2^n\pi]}(\omega),$$

則 $\lim_{n\to\infty} f_n = \hat{\phi}$ 點收斂。更進一步, 可推得

$$\begin{aligned}
\int |f_n(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2^n\pi}^{2^n\pi} \prod_{j=1}^{n} |m_0(\frac{\omega}{2^j})|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2^{n+1}\pi} \prod_{j=1}^{n} |m_0(\frac{\omega}{2^j})|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2^n\pi} \Big[\prod_{j=1}^{n-1} |m_0(\frac{\omega}{2^j})|^2\Big]\Big[|m_0(\frac{\omega}{2^n})|^2 + |m_0(\frac{\omega}{2^n}+\pi)|^2\Big] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-2^{n-1}\pi}^{2^{n-1}\pi} \prod_{j=1}^{n-1} |m_0(\frac{1}{2^j}\omega)|^2 d\omega \\
&= ||f_{n-1}||^2
\end{aligned}$$

因為 $||f_0||^2 = 1$ , 再由 Fatou's 引理, 則

$$\int |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \leq \lim_{k\to\infty} \inf \int |f_k(\omega)|^2 d\omega \leq 1$$

因此 (1-5-3) 有定義, 我們可得

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \tag{1-5-4}$$

則它的逆富氏變換式為

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x - k)$$

我們稱 $\phi$ 是自格函數 (scaling function) , $m_0(\omega)$ 是 $\phi$ 的特徵函數 (characteristic function) , $c_k$ 是 $\phi$ 的自格係數 (scaling coefficients) , 上面等式稱為自格等式 (scaling equation)。

$m_0(\omega)$ 是一個三角多項式, 且滿足等式 (1-5-2) 。有幾個關於 $\{\phi(x - k) : k \in Z\}$ (以後我們簡寫成 $\phi_{0k}$ ) 是正規集的等價條件。在此我們僅僅說明 $\phi_{0k}$ 是正規集。我們只須修改 Mallat 的証明, 把 $|f_n(\omega)|^2$ 的積分改成 $|f_n(\omega)|^2 e^{ik\omega}$ 的積分, 即可得到所要結果。

以下是從自格函數推導凌波函數的作法。其主要概念是, 從多重解分析中取層與層之間的正交差集。若 $\phi$ 生成一多重解分析。則我們希望 $V_1 = V_0 + W_0$ 且 $W_0$ 是由另一函數 $\psi(x)$ 的平移所生成。若 $f \in W_0$ 則 $f(x) = \Sigma_k v_k \psi(x - k)$ , 則 $\hat{f}(\omega) = \hat{v}(\omega)\hat{\psi}(\omega)$。其中數列 $v_k$ 及函數 $v(\omega)$ 將在往後明瞭。

因為 $f \in W_0$ , 則 $f \in V_1$ , 而且 $f \perp V_0$。再因 $f \in V_1$ , 則

$$f(x) = \sum_k f_k \phi(2x - k),$$

其中 $f_k =< f(x), \phi(2x - k) >$。考慮 $f$ 的富氏轉換

$$\hat{f}(\omega) = \sum_k f_k e^{-ik\frac{\omega}{2}} \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = m_f(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}), \tag{1-5-5}$$

其中令 $m_f(\omega) = \Sigma_k f_k e^{-ik\omega}$，而 $m_f$ 是屬於 $L^2([0, 2\pi])$ 且週期 $2\pi$ 的函數。我們要求 $f \perp V_0$，亦即 $f \perp \phi(x - k)$，對所有的 $k$，所以

$$\int \hat{f}(\omega)\overline{\hat{\phi}(\omega)}e^{ik\omega} = 0, \quad \forall k \in Z$$

或

$$\int_0^{2\pi} \sum_l \hat{f}(\omega + 2\pi l)\overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)}e^{ik\omega} d\omega = 0, \quad \forall k \in Z$$

所以

$$\sum_l \hat{f}(\omega + 2\pi l)\overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)} = 0$$

從 (1-5-4)，(1-5-2) 及 (1-5-5) 知,

$$m_f(\omega)\overline{m_0(\omega)} + m_f(\omega + \pi)\overline{m_0(\omega + \pi)} = 0$$

由 (1-5-2) 知 $m_0(\omega)$ 和 $m_0(\omega + \pi)$ 不會同時為 0，可以存在一個週期 $2\pi$ 的函數 $\lambda(\omega)$ 使得

$$m_f(\omega) = \lambda(\omega)\overline{m_0(\omega + \pi)}$$

且 $\lambda(\omega) + \lambda(\omega + \pi) = 0$。讓我們將 $\lambda$ 寫成 $\lambda(\omega) = e^{i\omega}\nu(2\omega)$，對某個 $\nu(\omega)$，則

$$\hat{f}(\omega) = e^{i\omega/2}\overline{m_0(\omega/2 + \pi)}\nu(\omega)\hat{\phi}(\omega/2)$$

現在可以令

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\omega) &= e^{i\omega/2}\overline{m_0(\omega/2 + \pi)}\hat{\phi}(\omega/2) \\ &:= \frac{1}{2}\sum_k g_k e^{-ik\frac{\omega}{2}}\hat{\phi}(\omega/2)\end{aligned}$$

我們可得

$$\psi(x) = \sum_k g_k \phi(2x - k),$$

其中 $g_k := (-1)^k c_{1-k}$。而 $\psi$ 即是凌波函數, 這裡也定義

$$m_1(\omega) = e^{i\omega}\overline{m_0(\omega + \pi)} \qquad (1\text{-}5\text{-}6)$$

為 $\psi$ 的特徵函數。

## §1-6 凌波函數的分解及重建

以下我們用 Daubechies 的凌波函數為例, 來介紹凌波分解及凌波重建, 並結束這一章簡介。所謂凌波分解即是考慮 $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$, 對任意 $j \in Z$。若 $f_N \in V_N$, 則

$$f_N = f_{N-1} + g_{N-1},$$

在此 $f_{N-1} \in V_{N-1}$, $g_{N-1} \in W_{N-1}$, 如此下去可推得

$$f_N = g_{N-1} + g_{N-2} + \cdots + g_{N-M} + f_{N-M},$$

這分解是唯一的, 稱之為凌波分解. 以下我們用 Daubechies 的凌波函數, 來舉例說明。因為

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x - k)$$

$$\psi(x) = \sum_k g_k \phi(2x - k)$$

且 $V_1 = V_0 + W_0$, $\phi(2x) \in V_1$, $\phi(2x - 1) \in V_1$, 則存在 $\{a_k\}, \{b_k\}$, 這兩個序列使得

$$\phi(2x) = \sum_k a_{-2k}\phi(x - k) + b_{-2k}\psi(x - k)$$

$$\phi(2x - 1) = \sum_k a_{1-2k}\phi(x - k) + b_{1-2k}\psi(x - k)$$

以上兩個式子, 可結合成

$$\phi(2x-l)=\sum_k\Big[a_{l-2k}\phi(x-k)+b_{l-2k}\psi(x-k)\Big]\quad l\in Z,$$

其中對 Daubechies 的正規凌波函數, 可取 $a_{-2k}=c_{2k}, b_{-2k}=g_{2k}$ 及 $a_{1-2k}=c_{1-2k}, b_{1-2k}=g_{1-2k}$ , 此即稱為 $\phi$ 及 $\psi$ 的凌波分解及合成關係式。

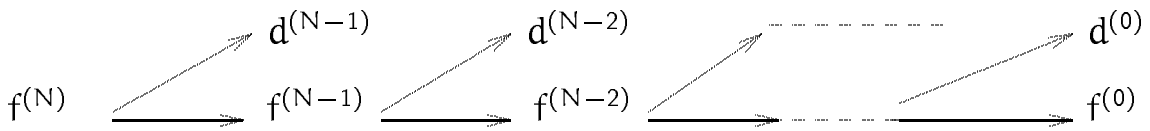
若 $f$ 在 $V_N$ 的投影 $f_N\in V_N$ , 則有一序數 $<f_k^{(N)}>$ , 使得

$$f_N=\sum_k f_k^{(N)}\phi(2^Nx-k)$$

由凌波分解及合成的關係式, 可得

$$\begin{aligned}f_N&=\sum_k f_k^{(N)}\phi(2^Nx-k)\\&=\sum_k f_k^{(N)}\Big[\sum_l a_{k-2l}\phi(2^{N-1}x-l)+b_{k-2l}\psi(2^{N-1}x-l)\Big]\\&=\sum_l\sum_k f_k^{(N)}a_{k-2l}\phi(2^{N-1}x-l)+\sum_l\sum_k f_k^{(N)}b_{k-2l}\psi(2^{N-1}x-1)\end{aligned}$$

可令 $f_k^{(N-1)}=\sum_l f_l^{(N)}a_{l-2k}$ 及 $d_k^{(N-1)}=\sum_l f_l^{(N)}b_{l-2k}$。因此我們有以下的分解演算法




再因

$$\phi(x)=\sum_k c_k\phi(2x-k),$$

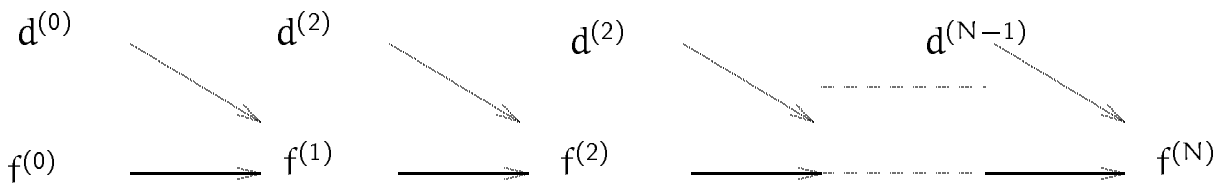
及

$$\psi(x)=\sum_k g_k\phi(2x-k)$$

若 $f_{N-K} = \sum_l f_l^{N-K}\phi(2^{N-K}x - l)$, $d_{N-K} = \sum_l d_l^{N-K}\psi(2^{N-K}x - l)$ , 則

$$\begin{aligned} f_{N-K+1} &= \sum_l f_l^{N-K}\phi(2^{N-K}x - l) + \sum_l d_l^{N-K}\psi(2^{N-K}x - l), \\ &= \sum_l f_l^{N-K}\sum_k c_k\phi(2^{N-k+1}x - 2l - k) \\ &\quad + \sum_l d_l^{N-K}\sum_k g_k\psi(2^{N-K+1}x - 2l - k), \end{aligned}$$

因此 $f_k^{(N-K+1)} = \sum_l f_l^{N-K}c_{k-2l} + d_l^{N-K}g_{k-2l}$ , 現在我們有重建的演算法：



# 第二章　回顧凌波函數的積分法

## §2-1　引言

在有關於凌波函數的許多應用方面, 諸如微分方程數值解, 訊號處理, 影像處理, 等等, 須要能很方便地去計算一個函數 $f(x)$ 和自格函數 $\phi(x)$ 或凌波函數 $\psi(x)$ 的內積。亦即

$$\int f(x)\phi_{j,k}(x)\,dx \tag{1}$$

$$\int f(x)\psi_{j,k}(x)\,dx \tag{2}$$

但是由 $\psi(x) = \sum_{k=0}^{2p-1} (-1)^k c_{2p-1-k}\phi(2x-k)$ , (2) 可以轉變成 (1) 的型式。再經過變數變換, (1) 的積分其實可以寫成 $\frac{1}{\sqrt{2^j}} \int f(\frac{x+k}{2^j})\phi(x)\,dx$ 所以在以下的討論中, 我們大部份只考慮

$$\int f(x)\phi(x)\,dx \tag{3}$$

這種型式的積分。

在這一章裡, 首先介紹多項式和自格函數的積分。有了這個基礎之後, 我們介紹單點積分法 (one point quadrature rule) 和多點積分法 (multi point quadrature rule) [1] 。

## §2-2　多項式的積分

假設 $\phi(x)$ 是階數為 $p$ 的自格函數, 意即 $\int x^m\psi(x)\,dx = 0, m = 0 \ldots p-1$ 。

[1] 兩個積分法都是 BCR [1] 提出的, 也都在 SP [9] 中更深入地作了分析。

$m$ 是一個非負整數, 定義 $\phi(x)$ 的 $m$ 次 moment 為

$$M_m = \int x^m \phi(x)\, dx \tag{4}$$

已知 $M_0 = 1$ ; 當 $m \geq 1$ 時, 由自格等式 (dilation equation) 推得

$$\begin{aligned} M_m &= \sum_k c_k \int x^m \phi(2x - k)\, dx \\ &= \frac{1}{2^m 2} \sum_k c_k \int (x + k)^m \phi(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2^m 2} \sum_k c_k \int x^m \phi(x)\, dx + \frac{1}{2^m 2} \sum_k c_k \sum_{\ell=1}^{m} \binom{m}{\ell} k^\ell \int x^{m-\ell} \phi(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2^m} M_m + \frac{1}{2^m 2} \sum_k c_k \sum_{\ell=1}^{m} \binom{m}{\ell} k^\ell M_{m-\ell} \end{aligned}$$

因此

$$M_m = \frac{1}{2(2^m - 1)} \sum_k c_k \sum_{\ell=1}^{m} \binom{m}{\ell} k^\ell M_{m-\ell} \tag{5}$$

這是一個遞迴的公式由 $M_0 = 1$ 開始。所以利用這遞迴公式可以正確地算出 $M_m$ 的值。

如果 $p(x)$ 是一個多項式, 我們可以很容易地經由變數變換把 $\int p(x)\phi_{j,k}(x)\, dx$ 變為積分 $\int x^m \phi(x)\, dx$ 的線性組合。由 (5) 便可以算出 $\int p(x)\phi_{j,k}(x)\, dx$ 的值。在附錄 C 有這樣一個 FORTRAN 的程式供大家使用。

## §2-3 單點積分法

如果 $f(x) \in C^n$ , $n \geq 2$ , 以及 當 $i \leq n$ 時 $f^{(i)}(x)$ 是有界的 (bounded) , 我們對 $f(x)$ 在某一實數 $\alpha$ 作泰勒展開, 因此

$$\begin{aligned} v_{j,k} &= \int f(x)\phi_{j,k}(x)\, dx = \sqrt{h} \int f(h(x + k))\phi(x)\, dx \\ &= \sqrt{h}\Big[ f(\alpha_{j,k}) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(\alpha_{j,k}) M_{i,\alpha} + K_{j,k} h^n \Big] \end{aligned} \tag{6}$$

這裡的 $h = 2^{-j}$ , $\alpha_{j,k} = h(\alpha + k)$ ,

$$M_{n,\alpha} = \int (x - \alpha)^n \phi(x)\, dx$$

以及

$$K_{j,k} = \frac{1}{n!} \int f^{(n)}(h(\xi(x) + k))(x - \alpha)^n \phi(x)\, dx,$$

而 $\xi(x)$ 落在 $x$ 和 $\alpha$ 之間。

我們只取 $\sqrt{h} f(\alpha_{j,k})$ 當做 $v_{j,k}$ 的近似值, 而參數 $\alpha$ 選取為 $M_1$ 使得 $M_{1,\alpha}$ 等於零, 造成在 (6) 中第一項的誤差等於零, 因此

$$v_{j,k} = \sqrt{h}\Big[ f(h(M_1 + k)) + O(h^2) \Big]$$

這就是單點積分法。而這積分法的階數是 2 , 也就是說, 對於階數小於或等於 1 的多項式, 使用單點積分法算出的值都是正確的。 然而, Sweldens 和 Piessens在 [9] 證明了, 如果 $\int x\psi(x)\, dx = 0$ , 則

$$M_2 = M_1^2 \tag{7}$$

使得在 (6) 中的 $M_{2,\alpha} = 0$ , 因此

$$v_{j,k} = \sqrt{h}\Big[ f(h(M_1 + k)) + O(h^3) \Big]$$

這使得單點積分法的階數提升至 3 。

下面的表格列出 $M_1$ 的值。可見 $\alpha_{j,k} = \frac{k+M_1}{2^j}$ 都落在 **supp** $\phi_{j,k}$ 之中。

| | $M_1$ | | $M_1$ |
|---|---|---|---|
| $p = 2$ | 0.633974596 | $p = 3$ | 0.817401167 |
| $p = 4$ | 1.005393213 | $p = 5$ | 1.193908018 |
| $p = 6$ | 1.382160319 | $p = 7$ | 1.569983929 |
| $p = 8$ | 1.757369493 | $p = 9$ | 1.944350187 |
| $p = 10$ | 2.130968265 | | |

## §2-4　多點積分法

由前一節得知, 單點積分法的階數是 3 。如果要使積分 $\int f(x)\phi(x)\,dx$ 的準確性提高, 必須尋求新的積分法, 而多點積分法正可以滿足我們的須求。

如果 $r > 1$ 是一個正整數, $p$ 是自格函數的階數, 我們要建造 $r$ 點積分法的公式, 也就是

$$\int \phi(x)f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{r} w_k f(x_k) = Q_r[f(x)]$$

在這裡, 我們只簡單得選取

$$x_k = (k-1)2^s, \qquad 1 \le k \le r$$

而整數 $s$ 滿足

$$s \ge 0, \quad (r-1)2^s \le 2p-1$$

使得

$$x_k \in \mathbf{supp}\,\phi(x) = [0, \quad 2p-1], \qquad 1 \le k \le r$$

一般而言, 如果 $r \le 2p$ , 我們取 $s = 0$。有了 $x_k$ 作為節點, 接下去我們要找出積分參數 $w_k$ 。為了使 $Q_r[f(x)]$ 達到最高可能的階數, 我們希望選取 $w_k$ 使得當 $f(x)$ 是階數小於或等於 $r-1$ 的多項式時,

$$\int f(x)\phi(x)\,dx = Q_r[f(x)]$$

為了達成這個目的, 我們令

$$H(i,j) = (j-1)^{i-1}, \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix}, \qquad m = \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{r-1} \end{pmatrix}$$

假設 $f(x) = x^i$ 而由

$$\sum_{k=1}^{r} w_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{r} w_k (k-1)^i = M_i, \qquad 0 \le i \le r-1$$

得到 $Hw = m$ 的線性方程組, 由此去求出 $w_k$ 。其中 $H$ 是一個 $r \times r$ 的可逆方陣。因為

$$Q_r[x^i] = M_i, \qquad 0 \le i \le r-1$$

這 $r$ 點積分法的階數就是 $r$ 。也就是說, 如果 $f(x) \in C^r$ , $r \le 2p$ , 則

$$\left| \int f(x)\phi(x)\, dx - Q_r[f(x)] \right| = O(2^{-jr})$$

這個誤差估計可以藉由在積分節點 $x_k$ 的 $r-1$ 階內插多項式求得, 由於我們將在第三章定理 3-1 的證明中應用類似的方法, 故在此不多敘述此誤差估計的證明。

# 第三章 凌波函數的高斯積分法

## §3-1 引言

本章主要是介紹一種新的積分法, 可以很快又正確地算出所須要的內積, 這種積分法相似於一般數值方法上 $\int f(x)dx$ 的高斯積分法 (gaussian quadrature) , 所以稱它為凌波函數的高斯積分法。我們並且和傳統的三角積分法 (trapezoidal rule) , 辛普森積分法 (Simpson rule) 以及單點積分法,多點積分法比較一下誤差和計算複雜度。

我們主要面臨的積分是 $\int f(x)\phi(x)\,dx$ , 而一般情況的積分 $\int f(x)\phi_{jk}(x)\,dx$ , 可由變數變換和轉換自格函數的尺度求得, 也就是

$$\begin{aligned}\int f(x)\phi_{jk}(x)\,dx &= \int f(x)\sqrt{2^j}\phi(2^jx-k)\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^j}}\int f(\frac{x+k}{2^j})\phi(x)\,dx\end{aligned}$$

而 $\int f(x)\psi(x)\,dx$ 可以經由 $\psi(x)=\sum_{k=0}^{2p-1}(-1)^k c_{2p-1-k}\phi(2x-k)$ 去計算出來。因此只要積分法對於積分 $\int f(x)\phi(x)\,dx$ 算得很準確, 則其它情況的積分也會很準確。

## §3-2 主要理論

首先給定一個次數為 $p$ 的自格函數, $p$ 是大於或等於 1 的正整數。 然後要找出一個 $n$ 次的多項式 $q_n(x)$ 使得

$$\int x^i q_n(x)\phi(x)\,dx = 0, \quad i=0,\ldots,n-1$$

找出 $q_n(x)$ 以後, 找出 $q_n(x)$ 的 $n$ 個根 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$。 而這些根就當成高斯積分法的 $n$ 個節點。 然後再找出積分法的係數 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 使得如果 $r(x)$ 是任意一個階

數小於或等於 $n-1$ 的多項式, 以下等式會成立。

$$\int r(x)\phi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r(\xi_i)$$

那麼當 $f(x)$ 是一個階數小於或等於 $2n-1$ 的多項式時, 則讓

$$f(x) = p(x)q_n(x) + r(x)$$

這裡的 $p(x)$ 和 $r(x)$ 都是階數小於或等於 $n-1$ 的多項式。 所以我們的積分法就可以寫成

$$\int f(x)\phi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r(\xi_i)$$

它可以準確到當 $f(x)$ 的階數小於或等於 $2n-1$ 時都是正確的, 所以我們的高斯積分法的階數是 $2n$ 。

對於任意函數 $f(x)$ 當我們使用 $2n$ 個參數 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 以及 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ , 這時候的數值積分法就是

$$\int f(x)\phi(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\xi_i) = G_n[f(x)]$$

接下來的定理是在估計這個積分法的誤差範圍。

定理 3-1 : 如果 $f \in C^{2n}$, 則此積分法的誤差小於

$$\frac{|f^{(2n)}(\eta)|}{(2n)!} \int |q_n(x)^2 \phi(x)|\,dx$$

其中 $\eta$ 是落在 $\phi(x)$ 涵蓋內的某一個數。

證明 : 經由赫米特差值法 (Hermite interpolation) , 對 $f(x)$ 在 高斯積分法的 $n$ 個節點 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ 上 作赫米特內插多項式 $s(x)$ ,其階數至多為 $2n-1$ ,使得

$$s(\xi_i) = f(\xi_i), \quad s'(\xi_i) = f'(\xi_i), \qquad (1 \le i \le n)$$

而這差值法的誤差公式是

$$f(x) - s(x) = \frac{f^{(2n)}(\eta(x))}{(2n)!}(\prod_{i=1}^{n}(x - \xi_i))^2 = \frac{f^{(2n)}(\eta(x))}{(2n)!}q_n^2(x)$$

參見 [6] 。接著得到

$$|\int f(x)\phi(x)\,dx - \int s(x)\phi(x)\,dx| \le \frac{1}{(2n)!}\int |f^{(2n)}(\eta(x))||q_n(x)^2\phi(x)|\,dx$$

因為 $s(x)$ 是至多為 $2n-1$ 階的多項式, 所以

$$\int s(x)\phi(x)\,dx = G_n[s(x)] = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i s(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(\xi_i) = G_n[f(x)]$$

就是 $\int f(x)\phi(x)dx$ 的高斯積分法。由於 $|f^{(2n)}(\eta(x))|$ 是連續函數, 由積分平均值定理, 使得

$$\int |f^{(2n)}(\eta(x))||q_n(x)^2\phi(x)|\,dx = |f^{(2n)}(\eta)|\int |q_n(x)^2\phi(x)|\,dx$$

而 $\eta \in \mathbf{supp}\ \phi(x)$ ■

而當 $\phi(x)$ 在不同尺度和位置時, 定義

$$\phi_{jk}(x) = \sqrt{2^j}\phi(2^j x - k)$$

那麼, 這時候的數值積分法就是

$$\begin{aligned}\int f(x)\phi_{jk}(x)\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2^j}}\int f(\frac{x+k}{2^j})\phi(x)\,dx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2^j}}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(\frac{k+\xi_i}{2^j})\end{aligned}$$

定理 3-2 : 相同地, 如果函數 $f(x)$ 屬於 $C^{2n}$ , 我們可以證明誤差項是小於

$$(\frac{1}{2^j})^{2n+\frac{1}{2}}\frac{|f^{(2n)}(\delta)|}{(2n)!}\int |q_n(x)^2\phi(x)|\,dx$$

其中 $\delta$ 是落在 $\phi(x)$ 涵蓋內的某一個數。

證明：令 $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} f(\frac{x+k}{2^j})$，經由赫米特差值法，對 $g(x)$ 在高斯積分法的 $n$ 個節點 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$，作赫米特內插多項式 $s(x)$ 其階數至多為 $2n-1$，使得

$$s(\xi_i) = g(\xi_i), \quad s'(\xi_i) = g'(\xi_i), \qquad (1 \leq i \geq n)$$

而這差值法的誤差公式是

$$g(x) - s(x) = \frac{g^{(2n)}(\eta(x))}{(2n)!} q_n^2(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \frac{1}{(2^j)^{2n}} f^{(2n)}(\delta(x)) q_n^2(x)$$

這裡的 $\delta(x) = \frac{\eta(x)+k}{2^j}$，類似前面定理的作法，可以得到誤差項是小於

$$(\frac{1}{2^j})^{2n+\frac{1}{2}} \frac{|f^{(2n)}(\delta)|}{(2n)!} \int |q_n(x)^2 \phi(x)| \, dx$$

而 $\delta \in \mathbf{supp}\, \phi(x)$ ■

## §3-3 計算積分法的節點

我們假設 $q_n(x)$ 是一個領導係數為 1 的 $n$ 階多項式，定成

$$q_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

假設 $q_n(x)$ 滿足下列的聯立方程組

$$\int x^m q_n(x) \phi(x) \, dx = 0, \quad \text{for } m = 0, 1, \ldots, n-1$$

定義

$$M_m = \int x^m \phi(x) \, dx$$

G 是一個 $n \times n$ 對稱矩陣

$$G_{ij} = \int x^{i+j-2}\phi(x)\,dx = M_{i+j-2}$$

以及

$$u = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad b = -\begin{pmatrix} M_n \\ M_{n+1} \\ \vdots \\ M_{2n-1} \end{pmatrix}$$

由此可以得到 $n \times n$ 的線性方程式

$$Gu = b$$

§3-3-1　當 $n = 1$ 時

在這種情形時, 因為

$$q_1(x) = x + a_0$$

使得

$$\int (x + a_0)\phi(x)\,dx = 0$$

推出

$$a_0 = M_1, \quad q_1(x) = x - M_1$$

而同時

$$\xi_1 = M_1, \quad \alpha_1 = 1$$

因此得到的高斯積分法是

$$\int f(x)\phi(x)\,dx \approx f(M_1)$$

正好和 Beylkin,Coifman,Rokhlin [1] 的單點法是一樣的。

### §3-3-2 當 $n = 2$ 時

當 $p \geq 2$ , $n = 2$ 時並沒有高斯積分法。 因為矩陣

$$G = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ M_1 & M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & M_1 \\ M_1 & M_1^2 \end{pmatrix}$$

是不可逆的。

值得注意的是我們原先須要一個多項式 $q_2(x)$ 使得

$$\int (ax + b) q_2(x) \phi(x)\, dx = 0$$

但是 $q_1(x)$ 已經可以滿足上面的式子。 因為

$$\begin{aligned} & \int (ax + b) q_1(x) \phi(x)\, dx \\ = & \int (ax + b)(x - M_1) \phi(x)\, dx \\ = & \int (ax^2 - axM_1) \phi(x)\, dx + \int (bx - bM_1) \phi(x)\, dx \\ = & (aM_2 - aM_1^2) + (bM_1 - bM_1) \\ = & 0 \end{aligned}$$

所以 $q_1(x)$ 取代了 $q_2(x)$ 的作用。

很奇特的是, 我們沒有 2 階和 4 階的高斯積分法, 反而是有一個 3 階的方法。

### §3-3-3 當 $n \geq 2$ 時

我們知道 $G$ 是一個對稱的矩陣, 原本應該去證明 $G$ 是一個可逆的矩陣, 而在這種情形之下, $\xi_i$ 有唯一的解。 但是這個證明的困難在於 $\phi(x)$ 不是一個正值 (positive) 的函數。

而當 $G_{n\times n}$ 是不可逆時, 若且唯若存在一個階數小於或等於 $n-1$ 的多項式

$$q(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$$

使得

$$(\, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0 \,)\, G \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = 0 \iff \int q(x)^2 \phi(x)\, dx = 0.$$

對於 $p \geq 2$ , $n = 2$ 時, $q(x) = x - M_1$ , 就是一個例子。 因此 $n = 2$ 時, $G$ 是一個不可逆的矩陣。

我們從下列表格去觀察矩陣 $G$ 的最小固有值 (eigenvalue) 的絕對值, 可以發現 $G$ 在這些特殊的情況下是可逆的。

| | $p = 2$ | $p = 3$ | $p = 4$ | $p = 5$ |
|---|---|---|---|---|
| $n = 3$ | 2.4351E−2 | 2.0854E−2 | 1.6611E−2 | 1.3904E−2 |
| $n = 4$ | 1.8305E−3 | 1.2198E−2 | 2.7618E−3 | 2.3257E−3 |
| $n = 5$ | 2.8526E−4 | 3.7421E−4 | 5.0076E−3 | 2.8696E−3 |
| $n = 6$ | 8.9135E−6 | 1.5770E−4 | 1.7840E−4 | 2.4235E−3 |

## §3-4 計算積分法的係數

接下來我們去求出積分法的係數 $\alpha_i$ 。利用

$$\int r(x)\phi(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r(\xi_i)$$

其中 $r(x)$ 是一個階數小於 $n$ 的多項式。 令

$$r(x) = x^m, \quad m = 0, \ldots, n-1$$

可以得到

$$\sum \xi_i^m \alpha_i = M_m, \quad \text{for } m = 0, \ldots, n-1$$

這造成的線性方程組是所謂的 Vandermonde 方程組。

只要 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 是完全不同的, 那麼這 Vandermonde 矩陣便是可逆的。 定義

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_i \\ \vdots \\ \xi_i^{n-1} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

以及

$$A = [A_1\ A_2\ \cdots A_n]$$

則由 $A\alpha = b$ 去求出 $\alpha_i$

然而在我們所做的每一種情形 $\xi_1, \ldots, \xi_n$ 都不同, 也就是矩陣 $A$ 都是可逆的。

## §3-4-1 共軛複數參數的對應

如果 $\xi_1$,$\xi_2$ 是我們的積方法的結點, 倘若 $\xi_1 = \overline{\xi_2}$。而

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_i \\ \vdots \\ \xi_i^{n-1} \end{pmatrix}$$

那麼, $A_1 = \overline{A_2}$ 。但是 $b$ 是一個實數的行向量。 那麼

$$b = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n$$

$$= \overline{\alpha_1 A_1} + \overline{\alpha_2 A_2} + \cdots + \overline{\alpha_n A_n}$$

$$= \overline{\alpha_2} A_1 + \overline{\alpha_1} A_2 + \cdots + \overline{\alpha_n} A_n$$

因此

$$A \begin{pmatrix} \overline{\alpha_2} - \alpha_1 \\ \overline{\alpha_1} - \alpha_2 \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} - \alpha_n \end{pmatrix} = 0$$

因為矩陣 $A$ 是可逆的, 所以得到

$$\alpha_1 = \overline{\alpha_2}$$

依此推論, 可以得到以下的結論。

定理 3-3 : 如果 $\xi_i$ 是實數則 $\alpha_i$ 也是實數。如果 $\xi_i$ , $\xi_j$ 是共軛複數則 $\alpha_i$ , $\alpha_j$ 也是共軛複數。

從前面的作法, 我們得到了唯一的節點 $\xi_i$ 和係數 $\alpha_i$ , 它們可能同時為複數。這些積分法的節點 $\xi_i$ 原本就是多項式 $q_n(x)$ 的根。 下面的表格我們列出在不同的 $(p, n)$ 共軛複數根 $(\xi_i)$ 有幾對。

| | $p = 2$ | $p = 3$ | $p = 4$ | $p = 5$ |
|---|---|---|---|---|
| $n = 3$ | **0** | **1** | **1** | **1** |
| $n = 4$ | **1** | **1** | **1** | **1** |
| $n = 5$ | **0** | **0** | **1** | **2** |
| $n = 6$ | **0** | **1** | **0** | **2** |

假設 $f(x)$ 是一個實數函數, 而且

$$f(\bar{\xi}) = \overline{f(\xi)}$$

如果 $\xi_1 = \overline{\xi_2}$, $\alpha_1 = \overline{\alpha_2}$ 互為共軛複數。 那麼在計算時可以令

$$\begin{aligned} G_n[f(x)] &= \alpha_1 f(\xi_1) + \alpha_2 f(\xi_2) + \cdots \\ &= \alpha_1 f(\xi_1) + \overline{\alpha_2 f(\xi_2)} + \cdots \\ &= 2\,\mathrm{Re}(\alpha_1 f(\xi_1)) + \cdots \end{aligned}$$

這樣可以減小一些計算量。

## §3-5　減少複數的節點

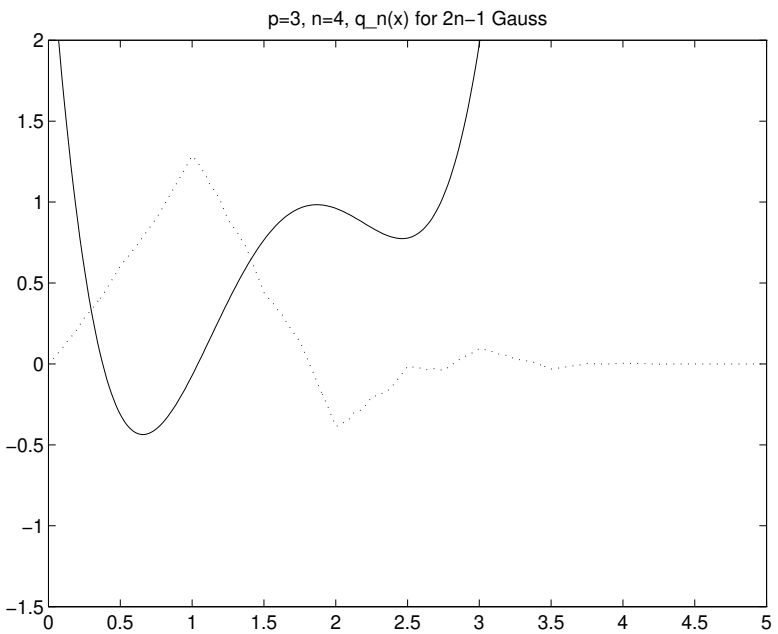
我們可以降低積分法的階數而儘量去避免複數節點和係數的產生。 也就是說, 如果我們只要 $\tilde{q}_n(x)$ 滿足

$$\int x^i \tilde{q}_n(x)\phi(x)\,dx = 0, \quad \text{for } i = 0, \ldots, n-2$$

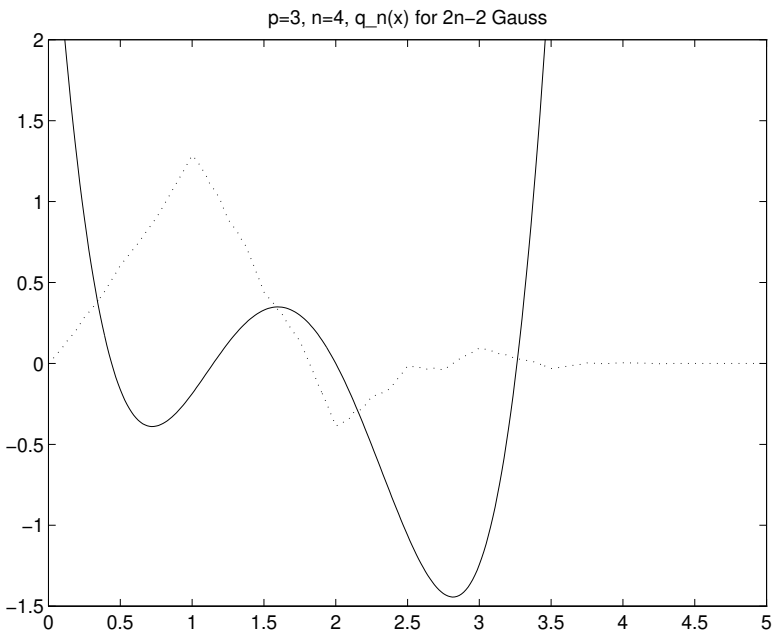
由多項式的除法

$$f(x) = p(x)\,\tilde{q}_n(x) + r(x),$$

如果 $f(x)$ 是階數小於 $2n-2$ 的多項式, 我們的積分法都是正確的。 如此一來,此降階高斯積分法的階數就是 $2n-1$ , 但是在求 $\tilde{q}_n(x)$ 時便多了一個自由度可供應用, 盡量使得作出來的 $\tilde{q}_n(x)$ 不要有共軛複數根的出現。 在這裡, 我們附上在 $p = 3, n = 4$ , $q_4(x)$ 和 $\tilde{q}_4(x)$ 的圖形




$q_4(x)$ for $p = 3$




$\tilde{q}_4(x)$ for $p = 3$, with $2n - 2$ modification.

## §3-6 誤差估計

我們以 $\int \phi(x)\sin(x)\,dx$ 的積分來做誤差估計。 這裡 $\phi(x)$ 的階數是 $p = 3$ 。並且以 Sweldens 和 Piessens 在文獻 [9] , 第 18 頁所附上的值

$$\int \phi(x)\sin(x)\,dx \approx 0.741104421925905$$

為正確值。

而在表格中的 flops 乃是用 Matlab 作計算時實際使用到的計算量 (兩個浮點數相乘或相加的次數)

傳統的積分法:

| h=1/64 | flops | error |
|---|---|---|
| 三角積分法 | 967 | 2.5098E −07 |
| 辛普森法 | 1445 | 3.2540E −07 |

以下, $j = 0$ 是表示 $\int \phi(x)\sin(x)\,dx$ 使用 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sin(\xi_i)$ 去計算。 $j = 1$ 是表

示將 $\phi(x)$ 從第 0 層提升至第 1 層, 把積分轉成

$$\int \phi(x)\sin(x)\,dx = \int \sum_k c_k \phi(2x-k)\sin(x)\,dx = \frac{1}{2}\sum_k c_k \int \phi(x)\sin(\frac{x+k}{2})\,dx$$

使用 $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2p-1} c_k \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sin(\frac{\xi_i+k}{2})$ 去計算。而 factor 是由 $j=0$ 的 error 除以 $j=1$ 的 error , 由定理 3-2 它的值是近似於 $2^{2n+\frac{1}{2}}$ 。

我們的高斯積分法(包含單點積分法):

| | j=0 | | j=1 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | flops | error | flops | error | factor |
| $n=1$ | 2 | 1.1734E−02 | 43 | 1.4358E−03 | 8 |
| $n=3$ | 16 | 1.3186E−03 | 175 | 1.8770E−05 | 70 |
| $n=4$ | 19 | 3.7360E−06 | 205 | 1.4342E−08 | 260 |
| $n=5$ | 14 | 8.4632E−08 | 163 | 8.7791E−11 | 964 |
| $n=6$ | 25 | 1.2032E−09 | 475 | 3.8236E−13 | 3140 |

多點積分法: ( $n$ 是表示 $n$ 點積分法)

| | j=0 | | j=1 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | flops | error | flops | error | factor |
| $n=3$ | 8 | 4.4507E−03 | 103 | 8.1297E−04 | 6 |
| $n=4$ | 11 | 3.6626E−03 | 133 | 2.2334E−04 | 16 |
| $n=5$ | 14 | 1.2855E−04 | 163 | 4.9068E−05 | 26 |
| $n=6$ | 17 | 3.0239E−03 | 193 | 6.4034E−05 | 47 |

降階高斯積分法:

| | j=0 | | j=1 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | flops | error | flops | error | factor |
| $n=3$ | 8 | 1.0862E−03 | 103 | 5.3486E−05 | 20 |
| $n=4$ | 11 | 5.6013E−07 | 133 | 1.0349E−07 | 5.4 |
| $n=5$ | 14 | 8.7726E−08 | 163 | 1.6515E−10 | 531 |
| $n=6$ | 17 | 2.9373E−08 | 193 | 2.4798E−11 | 1184 |

注意: 在 $n=4$ 的例子中 $j=0$ 和 $j=1$ 的差別不大, 這是因為 $j=0$ 時算出來的積分值和正確值太靠近了。這是一個有趣的巧合。

# 第四章 凌波函數的隨變性積分法

## §4-1 引言

當一個函數 $f(x)$ 在某一個特定區間, 有比較大的變化性質, 使積分 $\int \phi(x)f(x)\,dx$ 因此而產生了較大的誤差。為了要減少誤差, 我們可以只把這一特定的區間加以細分成更小的區間, 然後再去積分, 以便達成降低誤差的目的。

我們借助於隨變性 (adaptive) 積分的想法, 參閱 [6]。但是我們的方法和一般傳統的隨變性積分法並不完全相同, 是利用自格函數的自格等式使積分 $\int \phi(x)f(x)\,dx$ 變成了 $\sum_k \int c_k\phi(2x-k)f(x)dx$ , 原本的積分範圍是 $[0,\quad 2p-1]$ 因此而變成 $2p$ 個 $[\frac{k}{2},\quad \frac{(2p-1+k)}{2}]$ 小區間, 由此去降低誤差。

## §4-2 主要理論

如果 $\phi(x)$ 的階數是 $p \geq 2$ 以及 $f(x) \in C^3$ 。以下我們使用單點積分法來推導出隨變性積分法。定義

$$M_n = \int x^n\phi(x)dx\,, \quad h = 2^{-j}$$

將 $f(x)$ 對 $x = h(M_1 + k)$ 作泰勒展開式, 得

$$\begin{aligned} f(x) =& f(h(M_1+k)) + f'(h(M_1+k))(x - h(M_1+k)) \\ &+ \frac{f^{(2)}(h(M_1+k))}{2!}(x-h(M_1+k))^2 + \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}(x-h(M_1+k))^3 \end{aligned}$$

那麼

$$\begin{aligned} f(h(x+k)) =& f(h(M_1+k)) + f'(h(M_1+k))h(x - M_1) \\ &+ \frac{f^{(2)}(h(M_1+k))}{2!}h^2(x-M_1)^2 + \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}h^3(x-M_1)^3 \end{aligned}$$

則對於任意的 $j, k$

$$\begin{aligned}
\int \phi_{j,k} f(x)dx &= \int \sqrt{2^j}\phi(2^j x - k) f(x)dx \\
&= \sqrt{h}\int \phi(x) f(h(x+k))dx \\
&= \sqrt{h}\{ \int \phi(x) f(h(M_1+k))dx + \int \phi(x)\frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi(x))(x-M_1)^3 dx\} \\
&= \sqrt{h}\int \phi(x)\{ f(h(M_1+k)) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi(x))(x-M_1)^3)\} dx \\
&= \sqrt{h} f(h(M_1+k)) + \sqrt{h}h^3 \int \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}(x-M_1)^3 dx \qquad (1)
\end{aligned}$$

接下來再利用自格等式而得到

$$\begin{aligned}
\int \phi_{j,k} f(x)dx &= \int \sqrt{2^j}\phi(2^j x - k) f(x)dx \\
&= \sqrt{2^j}\sum_n c_n \int \phi(2^{j+1}x - 2k - n) f(x)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n c_n \sqrt{2^{j+1}} \int \phi(2^{j+1}x - 2k - n) f(x)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n c_n \int \phi_{j+1,2k+n} f(x)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n c_n \sqrt{\frac{h}{2}} \int \phi(x) f(\frac{h}{2}(x+2k+n))dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n c_n \sqrt{\frac{h}{2}} f(\frac{h}{2}(M_1+2k+n)) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{h}{2}}(\frac{h}{2})^3 \sum_n c_n \int \frac{f^{(3)}(\xi_n(x))}{3!}(x-M_1)^3 dx \\
&\approx \frac{\sqrt{h}}{2}\sum_n c_n f(\frac{h}{2}(M_1+2k+n)) \\
&\quad + \sqrt{h}(\frac{h}{2})^3 \int \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-M_1)^3 dx \qquad (2)
\end{aligned}$$

在 (2) 中我們假設 $\xi_n(x) = \xi$ , $0 \le n \le 2p-1$ 。若同時假設 (1) 中的 $\xi(x) = \xi$

然後作 (2) × 8 − (1) , 得到

$$7\int \phi_{j,k}(x)f(x)dx \approx 4\sqrt{h}\sum_n c_n f(\frac{h}{2}(M_1+2k+n)) - \sqrt{h}f(h(M_1+k))$$

也就是

$$\int \phi_{j,k}(x)f(x)dx \approx \frac{1}{7}\Big[4\sqrt{h}\sum_n c_n f(\frac{h}{2}(M_1+2k+n)) - \sqrt{h}f(h(M_1+k))\Big] \quad (3)$$

我們估計的誤差為

$$\frac{1}{7}[\frac{\sqrt{h}}{2}\sum_n c_n f(\frac{h}{2}(M_1+2k+n)) - \sqrt{h}f(h(M_1+k))] \quad (4)$$

給定一個實數 $\epsilon$ 而要求積分 $\int \phi_{j,k}f(x)\,dx$ 的誤差小於 $\epsilon$ 。由前面的討論, 我們用 (4) 來作後驗誤差估計 (a posteriori error estimate) 。

令 $\frac{\sqrt{2}}{2p\,|c_n|}\epsilon = \epsilon_n$ , 如果 $\int \phi_{j+1,2k+n}f(x)\,dx$ 的誤差小於 $\epsilon_n$ , 那麼從

$$\int \phi_{j,k}f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n c_n \int \phi_{j+1,2k+n}f(x)dx$$

得到

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n |c_n|\epsilon_n \le \epsilon$$

於是滿足我們的要求。

如果有某一個 $\int \phi_{j+1,2k+n}f(x)\,dx$ 的誤差超過 $\epsilon_n$ , 則利用自格等式, 使得

$$\phi_{j+1,2k+n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_m c_m \phi(2^{j+2}x - 4k - 2n - m)$$

相同地去計算 $\int \phi_{j+2,4k+2n+m}f(x)\,dx$ 的誤差, $0 \le m \le 2p-1$ , 而此時我們要求的誤差範圍變成了 $\epsilon_m = \frac{\sqrt{2}}{2p\,|c_m|}\epsilon_n$ , 如果又有某一個 $\int \phi_{j+2,4k+2n+m}f(x)\,dx$ 的誤

差超過 $\epsilon_m$ 則再一次使用自格等式。 由此就得到了 $\int \phi(x)_{j,k} f(x)\, dx$ 的隨變性積分法。 而隨變性積分法的程式在附錄 D 。

## §4-3 隨變性積分法的缺點

我們舉出一個例子, 當 $f(x) = x^3$ , $\phi(x)$ 是 $p = 3$ 的自格函數, 因為 $D^{(3)}(x^3) = 6$ 是一個常數, 所以在 4-2 節中的第 (3) 式, 我們知道

$$\int \phi(x) f(x) dx \ = \frac{8}{7} \times \frac{1}{2} \sum_n c_n f(\frac{1}{2}(M_1 + n)) - \frac{1}{7} f(M_1) = 0.44546004491324$$

是正確的而不只是近似而已。 但是誤差項

$$\frac{1}{7}[\frac{1}{2} \sum_n c_n f(\frac{1}{2}(M_1 + n)) - f(M_1)] = 1.2585 \times 10^{-2}$$

卻不等於零, 導致我們的隨變性積分法必須繼續再作下去, 直到誤差小於每一步驟我們所要求的誤差範圍為止。 相同地, 一般求取 $\int f(x)\, dx$ 的隨變性積分法也同樣有這種缺點。 我們只能說, 在實際應用時, 這種情況發生的機會很小。

## §4-4 誤差估計

我們將使用的例子是 $p = 2$ 時 $\int x^5 \phi(x)\, dx$ 的積分。由第二章的 (5) 式, 只要經過變數變換我們可以求出在任意 $j,k$ 時 $\int x^5 \phi_{j,k}(x)\, dx$ 的正確值, 如此一來在執行隨變性積分法的程式中, 每一次算出來 $\int x^5 \phi_{j,k}(x)\, dx$ 的值, 都可以和正確值比較而得到真正的誤差, 並且和我們理論所估計的誤差比較一下。

下面的表格中, true-err 是代表真正的誤差, error 是代表後驗估計的誤差, eps 是代表要求的誤差範圍。在程式的每一步驟中, 如果 eps 大於 error 則 $j$ 會往上一層而變成 $j + 1$。這裡我們輸入的誤差範圍 eps 是 $10^{-3}$。

從表格中, 我們發現後驗估計的誤差, 是只比真的誤差大一點點, 這表示它是一個好的誤差估算方法。但是, 一旦估算的誤差小於 eps, 它可能一下子就小很多。這個原因是, 雖然 $\mathbf{supp}\, \phi(x) = [0,\ \ 2p - 1]$, 但是在 $[0,\ \ 2p - 1]$ 的右邊三分之一的部分, $|\phi(x)|$ 的值幾乎是零。這現象使得由隨變性積分法求出來的答案, 其誤差往往比所要求的範圍, 小了很多。

| (j,k) | true-err | error | eps |
|---|---|---|---|
| (0,0) | 9.7985091868044E-02 | 0.15290024417622 | 1.0000000000000E-03 |
| (1,3) | 4.9026624362130E-02 | 5.3791406794917E-02 | 1.9318516195159E-03 |
| (2,9) | 7.2319649939985E-03 | 7.4942003501763E-03 | 3.7320506798262E-03 |
| (3,21) | 7.9195232741114E-04 | 8.0468313193600E-04 | 7.2097681499376E-03 |
| (3,20) | 7.2091900622695E-04 | 7.3307179682506E-04 | 4.1625615821613E-03 |
| (3,19) | 6.5322284997649E-04 | 6.6479762665444E-04 | 1.1153550143849E-03 |
| (3,18) | 5.8886385865975E-04 | 5.9986062141805E-04 | 1.9318515533914E-03 |
| (2,8) | 5.8296379784615E-03 | 6.0657154105413E-03 | 2.1547004646270E-03 |
| (3,19) | 6.5322284997649E-04 | 6.6479762665444E-04 | 4.1625615821613E-03 |
| (3,18) | 5.8886385865975E-04 | 5.9986062141805E-04 | 2.4032560499792E-03 |
| (3,17) | 5.2784203228384E-04 | 5.3826078112047E-04 | 6.4395051779715E-04 |

| (j,k) | true-err | error | eps |
|---|---|---|---|
| (3,16) | 4.7015737084521E-04 | 4.7999810575991E-04 | 1.1153550143849E-03 |
| (2,7) | 4.5783338081904E-03 | 4.7882533161526E-03 | 5.7735024942777E-04 |
| (3,17) | 5.2784203228384E-04 | 5.3826078112047E-04 | 1.1153550143849E-03 |
| (3,16) | 4.7015737084521E-04 | 4.7999810575991E-04 | 6.4395051779715E-04 |
| (3,15) | 4.1580987434386E-04 | 4.2507259533637E-04 | 1.7254602120935E-04 |
| (4,33) | 4.2087239721766E-05 | 4.2521822497120E-05 | 3.3333331051430E-04 |
| (4,32) | 3.9632710764792E-05 | 4.0054521117280E-05 | 1.9245007655530E-04 |
| (4,31) | 3.7251923426851E-05 | 3.7660961362310E-05 | 5.1566842596301E-05 |
| (4,30) | 3.4944877722154E-05 | 3.5341143229419E-05 | 8.9316391362700E-05 |
| (3,14) | 3.6479954278157E-04 | 3.7348424985075E-04 | 2.9885847537845E-04 |
| (4,31) | 3.7251923426851E-05 | 3.7660961362437E-05 | 5.7735022966591E-04 |
| (4,30) | 3.4944877722154E-05 | 3.5341143229292E-05 | 3.3333331051430E-04 |
| (4,29) | 3.2711573636490E-05 | 3.3095066721016E-05 | 8.9316391362700E-05 |
| (4,28) | 3.0552011174301E-05 | 3.0922731835962E-05 | 1.5470052778890E-04 |
| (2,6) | 3.4780524831604E-03 | 3.6618140670113E-03 | 9.9999996577145E-04 |
| (3,15) | 4.1580987434386E-04 | 4.2507259533637E-04 | 1.9318515533914E-03 |
| (3,14) | 3.6479954278157E-04 | 3.7348424985075E-04 | 1.1153550143849E-03 |
| (3,13) | 3.1712637615389E-04 | 3.2523306930101E-04 | 2.9885847537845E-04 |
| (4,29) | 3.2711573636490E-05 | 3.3095066721016E-05 | 5.7735022966591E-04 |
| (4,28) | 3.0552011174301E-05 | 3.0922731835962E-05 | 3.3333331051430E-04 |
| (4,27) | 2.8466190337362E-05 | 2.8824138574508E-05 | 8.9316391362700E-05 |
| (4,26) | 2.6454111123009E-05 | 2.6799286936909E-05 | 1.5470052778890E-04 |
| (3,12) | 2.7279037446304E-04 | 2.8031905368880E-04 | 5.1763806362804E-04 |
| (1,2) | 2.6571630813872E-02 | 3.0152640733510E-02 | 1.1153550525619E-03 |
| (2,7) | 4.5783338081904E-03 | 4.7882533161526E-03 | 2.1547004646270E-03 |
| (3,17) | 5.2784203228384E-04 | 5.3826078112047E-04 | 4.1625615821613E-03 |
| (3,16) | 4.7015737084521E-04 | 4.7999810575991E-04 | 2.4032560499792E-03 |
| (3,15) | 4.1580987434386E-04 | 4.2507259533637E-04 | 6.4395051779715E-04 |
| (3,14) | 3.6479954278157E-04 | 3.7348424985075E-04 | 1.1153550143849E-03 |
| (2,6) | 3.4780524831604E-03 | 3.6618140670114E-03 | 1.2440168932754E-03 |
| (3,15) | 4.1580987434386E-04 | 4.2507259533637E-04 | 2.4032560499792E-03 |
| (3,14) | 3.6479954278157E-04 | 3.7348424985075E-04 | 1.3875205273871E-03 |
| (3,13) | 3.1712637615389E-04 | 3.2523306930101E-04 | 3.7178500479498E-04 |
| (3,12) | 2.7279037446304E-04 | 2.8031905368880E-04 | 6.4395051779715E-04 |
| (2,5) | 2.5287940033705E-03 | 2.6863976631177E-03 | 3.3333332192382E-04 |
| (3,13) | 3.1712637615389E-04 | 3.2523306930101E-04 | 6.4395051779715E-04 |
| (3,12) | 2.7279037446304E-04 | 2.8031905368880E-04 | 3.7178500479498E-04 |
| (3,11) | 2.3179153771125E-04 | 2.3874220301342E-04 | 9.9619491792816E-05 |
| (4,25) | 2.4515773533018E-05 | 2.4848176922720E-05 | 1.9245007655530E-04 |
| (4,24) | 2.2651177566502E-05 | 2.2970808532324E-05 | 1.1111110350477E-04 |
| (4,23) | 2.0860323223459E-05 | 2.1167181765623E-05 | 2.9772130454234E-05 |

| (j,k) | true-err | error | eps |
|---|---|---|---|
| (3,10) | 1.9412986589562E-04 | 2.0050251727539E-04 | 1.7254602120935E-04 |
| (4,23) | 2.0860323223459E-05 | 2.1167181765623E-05 | 3.3333331051430E-04 |
| (4,22) | 1.9143210504335E-05 | 1.9437296622492E-05 | 1.9245007655530E-04 |
| (4,21) | 1.7499839408908E-05 | 1.7781153103056E-05 | 5.1566842596301E-05 |
| (4,20) | 1.5930209937176E-05 | 1.6198751207222E-05 | 8.9316391362701E-05 |
| (2,4) | 1.7305583688298E-03 | 1.8620041044704E-03 | 5.7735024942777E-04 |
| (3,11) | 2.3179153771125E-04 | 2.3874220301342E-04 | 1.1153550143849E-03 |
| (3,10) | 1.9412986589562E-04 | 2.0050251727539E-04 | 6.4395051779715E-04 |
| (3,9) | 1.5980535901750E-04 | 1.6559999647452E-04 | 1.7254602120935E-04 |
| (3,8) | 1.2881801707609E-04 | 1.3403464061076E-04 | 2.9885847537845E-04 |
| (1,1) | 1.0951151056859E-02 | 1.3348388463351E-02 | 2.9885848560794E-04 |
| (2,5) | 2.5287940033705E-03 | 2.6863976631177E-03 | 5.7735024942777E-04 |
| (3,13) | 3.1712637615389E-04 | 3.2523306930101E-04 | 1.1153550143849E-03 |
| (3,12) | 2.7279037446304E-04 | 2.8031905368880E-04 | 6.4395051779715E-04 |
| (3,11) | 2.3179153771125E-04 | 2.3874220301342E-04 | 1.7254602120935E-04 |
| (4,25) | 2.4515773533018E-05 | 2.4848176922720E-05 | 3.3333331051430E-04 |
| (4,24) | 2.2651177566502E-05 | 2.2970808532324E-05 | 1.9245007655530E-04 |
| (4,23) | 2.0860323223459E-05 | 2.1167181765623E-05 | 5.1566842596301E-05 |
| (4,22) | 1.9143210504335E-05 | 1.9437296622492E-05 | 8.9316391362700E-05 |
| (3,10) | 1.9412986589562E-04 | 2.0050251727539E-04 | 2.9885847537845E-04 |
| (2,4) | 1.7305583688298E-03 | 1.8620041044704E-03 | 3.3333332192382E-04 |
| (3,11) | 2.3179153771125E-04 | 2.3874220301342E-04 | 6.4395051779715E-04 |
| (3,10) | 1.9412986589562E-04 | 2.0050251727539E-04 | 3.7178500479498E-04 |
| (3,9) | 1.5980535901750E-04 | 1.6559999647452E-04 | 9.9619491792816E-05 |
| (4,21) | 1.7499839408908E-05 | 1.7781153103056E-05 | 1.9245007655530E-04 |
| (4,20) | 1.5930209937176E-05 | 1.6198751207222E-05 | 1.1111110350477E-04 |
| (4,19) | 1.4434322088919E-05 | 1.4690090935100E-05 | 2.9772130454234E-05 |
| (4,18) | 1.3012175864024E-05 | 1.3255172286627E-05 | 5.1566842596301E-05 |
| (3,8) | 1.2881801707609E-04 | 1.3403464061076E-04 | 1.7254602120935E-04 |
| (2,3) | 1.0833455795359E-03 | 1.1886333910703E-03 | 8.9316394419871E-05 |
| (3,9) | 1.5980535901750E-04 | 1.6559999647452E-04 | 1.7254602120935E-04 |
| (3,8) | 1.2881801707609E-04 | 1.3403464061076E-04 | 9.9619491792816E-05 |
| (4,19) | 1.4434322088919E-05 | 1.4690090935100E-05 | 1.9245007655530E-04 |
| (4,18) | 1.3012175864024E-05 | 1.3255172286627E-05 | 1.1111110350477E-04 |
| (4,17) | 1.1663771263271E-05 | 1.1893995261771E-05 | 2.9772130454234E-05 |
| (4,16) | 1.0389108285880E-05 | 1.0606559860611E-05 | 5.1566842596301E-05 |
| (3,7) | 1.0116784007208E-04 | 1.0580644968409E-04 | 2.6692962376284E-05 |
| (4,17) | 1.1663771263271E-05 | 1.1893995261771E-05 | 5.1566842596301E-05 |
| (4,16) | 1.0389108285880E-05 | 1.0606559860611E-05 | 2.9772130454234E-05 |
| (4,15) | 9.1881869322685E-06 | 9.3928660830871E-06 | 7.9774183121659E-06 |
| (5,33) | 9.3000539400090E-07 | 9.3960840738935E-07 | 1.5411188485913E-05 |
| (5,32) | 8.7576745433360E-07 | 8.8508823435442E-07 | 8.8976538208743E-06 |

| (j,k) | true-err | error | eps |
|---|---|---|---|
| (5,31) | 8.2315898961016E-07 | 8.3219753642196E-07 | 2.3841191558349E-06 |
| (5,30) | 7.7218000010815E-07 | 7.8093631352456E-07 | 4.1294155092044E-06 |
| (4,14) | 8.0610072022980E-06 | 8.2529139292441E-06 | 1.3817293829902E-05 |
| (3,6) | 7.6854828005152E-05 | 8.0915423694634E-05 | 4.6233567040248E-05 |
| (4,15) | 9.1881869322685E-06 | 9.3928660830871E-06 | 8.9316391362700E-05 |
| (4,14) | 8.0610072022980E-06 | 8.2529139292441E-06 | 5.1566842596301E-05 |
| (4,13) | 7.0075690959681E-06 | 7.1867033990278E-06 | 1.3817293829902E-05 |
| (4,12) | 6.0278726133067E-06 | 6.1942344924681E-06 | 2.3932254936498E-05 |
| (2,2) | 5.8715563548983E-04 | 6.6628552291707E-04 | 1.5470053308408E-04 |
| (3,7) | 1.0116784007208E-04 | 1.0580644968409E-04 | 2.9885847537845E-04 |
| (3,6) | 7.6854828005152E-05 | 8.0915423694630E-05 | 1.7254602120935E-04 |
| (3,5) | 5.5878980875231E-05 | 5.9361562642318E-05 | 4.6233567040248E-05 |
| (4,13) | 7.0075690959681E-06 | 7.1867033990278E-06 | 8.9316391362700E-05 |
| (4,12) | 6.0278726133067E-06 | 6.1942344924681E-06 | 5.1566842596301E-05 |
| (4,11) | 5.1219177542861E-06 | 5.2755072095680E-06 | 1.3817293829902E-05 |
| (4,10) | 4.2897045189200E-06 | 4.4305215503245E-06 | 2.3932254936498E-05 |
| (3,4) | 3.8240298682463E-05 | 4.1144866527132E-05 | 8.0078887128852E-05 |
| (1,0) | 2.1651850910963E-03 | 3.3786499844402E-03 | 5.1763808134604E-04 |
| (2,3) | 1.0833455795359E-03 | 1.1886333910703E-03 | 9.9999996577145E-04 |
| (3,9) | 1.5980535901750E-04 | 1.6559999647452E-04 | 1.9318515533914E-03 |
| (3,8) | 1.2881801707609E-04 | 1.3403464061076E-04 | 1.1153550143849E-03 |
| (3,7) | 1.0116784007208E-04 | 1.0580644968409E-04 | 2.9885847537845E-04 |
| (3,6) | 7.6854828005152E-05 | 8.0915423694630E-05 | 5.1763806362804E-04 |
| (2,2) | 5.8715563548983E-04 | 6.6628552291707E-04 | 5.7735024942777E-04 |
| (3,7) | 1.0116784007208E-04 | 1.0580644968409E-04 | 1.1153550143849E-03 |
| (3,6) | 7.6854828005152E-05 | 8.0915423694630E-05 | 6.4395051779715E-04 |
| (3,5) | 5.5878980875231E-05 | 5.9361562642318E-05 | 1.7254602120935E-04 |
| (3,4) | 3.8240298682463E-05 | 4.1144866527132E-05 | 2.9885847537845E-04 |
| (2,1) | 2.4198853669074E-04 | 2.9496050001087E-04 | 1.5470053308408E-04 |
| (3,5) | 5.5878980875231E-05 | 5.9361562642318E-05 | 2.9885847537845E-04 |
| (3,4) | 3.8240298682463E-05 | 4.1144866527132E-05 | 1.7254602120935E-04 |
| (3,3) | 2.3938781426821E-05 | 2.6265335349081E-05 | 4.6233567040248E-05 |
| (3,2) | 1.2974429108336E-05 | 1.4722969108159E-05 | 8.0078887128852E-05 |
| (2,0) | 4.7844283138693E-05 | 7.4658322351672E-05 | 2.6794918325961E-04 |

最後由隨變性積分法算出來的值是 $-1.0658816590327$，已知 $\int x^5\phi(x)\,dx$ 的正確值是 $-1.06587281288636$，誤差小於 $10^{-5}$ 。

## §4-5 計算複雜度的實例

這裡我們定義複雜度是等於求 $f(x)$ 值的次數。

而使用的例子是 $p = 3$ 時 $\int \sin(x)\phi(x)\,dx$ 的積分來比較隨變性積分法和其它關於凌波函數積分法的複雜度。同樣是以 Sweldens 和 Piessens 在文獻 [9]，第 18 頁所附上的值

$$\int \phi(x)\sin(x)\,dx \approx 0.741104421925905$$

為正確值。

這裡輸入隨變性積分法程式的誤差範圍 eps 是 $10^{-3}$ 。

| 積分法 | 複雜度 | 誤差 |
|---|---|---|
| 隨變性積分法 | 7 | 3.0465E-06 |
| 高斯積分法(n=3) | 3 | 1.3186E-03 |
| 高斯積分法(n=4) | 4 | 3.7360E-06 |
| 多點積分法(n=4) | 4 | 3.6626E-03 |
| 多點積分法(n=5) | 5 | 1.2855E-04 |

# 參考資料


[1] G. Beylkin, R. Coifman and V. Rokhlin, Fast wavelet transforms and numerical algorithms I, *Comm. Pure Appl. Math.* , 44(1991), 141–183

[2] R. L. Burden and J. D. Faires, *Numberical Analysis* . PWS-Kent Publishing Company, Boston, 4th edition, 1989

[3] C. K. Chui, *An Introduction to Wavelets* . Academic Press, 1992.

[4] I. Daubechies, Orthonormal bases of compactly suppprted wavelets. *Comm. Pure and Appl. Math.* , 41:909-996, 1988.

[5] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets* . Number 61 in CBMS-NSF Series in Applied Mathematics. SIAM Publications, Philadelphia, 1992.

[6] D. Kincaid and W. Cheney, *Numberical Analysis* . Brooks/Cole Publishing Company, Califormia 1991.

[7] S. G. Mallat, Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$. *Trans. on Acoust. Signal Speech Process* . , 37(12):2110, 1989.

[8] W. C. Shann and C. C. Yen, Quadratures involving polynomials and Daubechies' wavelets, Technical Report 9301, Department of Mathematics, National Central University, 1993.

[9] W. Sweldens and R. Piessens, Quadrature formulae for the calculation of the wavelet decomposition, *SIAM J. Numer. Anal.* , to appear

# 附錄 A：高斯積分法的節點和係數

$p = 2$

| $(n,i)$ | $\xi_i$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|
| (1,1) | 0.63397459621556 | 1 |
| (3,1) | 1.85398195699219 | −0.07262857918309 |
| (3,2) | 0.94865666875603 | 0.68180500132258 |
| (3,3) | 0.31172072819668 | 0.39082357786051 |
| (4,1) | 1.82798430751721 $+0.45020656885721i$ | −0.00160274913007 $+0.02971483854802i$ |
| (4,2) | 1.82798430751721 $-0.45020656885721i$ | −0.00160274913007 $-0.02971483854802i$ |
| (4,3) | 0.82217249471188 | 0.73061564649654 |
| (4,4) | 0.24174685361411 | 0.27258985176361 |
| (5,1) | 2.23778372975925 | 0.05467914901670 |
| (5,2) | 2.09966506962737 | −0.11477575402994 |
| (5,3) | 1.02010790269007 | 0.47759206382530 |
| (5,4) | 0.54721799773165 | 0.44744491867854 |
| (5,5) | 0.15222741126484 | 0.13505962250941 |
| (6,1) | 2.28117751464604 | 0.02792551584118 |
| (6,2) | 2.06371294356439 | −0.08960703428231 |
| (6,3) | −0.95852890926568 | 0.00000303033402 |
| (6,4) | 1.03266393496472 | 0.45675210958273 |
| (6,5) | 0.56739097863560 | 0.45737864470667 |
| (6,6) | 0.16275201459027 | 0.14754773381771 |
| (7,1) | 2.78832306008704 | −0.00022574706113 |
| (7,2) | 2.46210342201677 | 0.00672206152160 |
| (7,3) | 1.97275660244042 | −0.07612872853480 |
| (7,4) | 1.12539362688421 | 0.29589823591417 |
| (7,5) | 0.74328442996566 | 0.45361298019809 |
| (7,6) | 0.36302849390479 | 0.25186723765694 |
| (7,7) | 0.09723472210368 | 0.06825396030513 |

$p = 3$

| $(n,i)$ | $\xi_i$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|
| $(1,1)$ | 0.81740116781088 | 1 |
| $(3,1)$ | 0.83679814627878<br>$+1.61087855653956i$ | 0.00057921020673<br>$-0.01202031872953i$ |
| $(3,2)$ | 0.83679814627878<br>$-1.61087855653956i$ | 0.00057921020673<br>$+0.01202031872953i$ |
| $(3,3)$ | 0.77860721087508 | 0.99884157958654 |
| $(4,1)$ | 2.61618483371743<br>$+0.48737056981009i$ | $-0.02137823834808$<br>$-0.01148595899103i$ |
| $(4,2)$ | 2.61618483371743<br>$-0.48737056981009i$ | $-0.02137823834808$<br>$+0.01148595899103i$ |
| $(4,3)$ | 1.04014494664051 | 0.79142237820121 |
| $(4,4)$ | 0.37746644865900 | 0.25133409849494 |
| $(5,1)$ | 2.79211020674284 | 0.03880629792682 |
| $(5,2)$ | 2.25355479164059 | $-0.15086296456882$ |
| $(5,3)$ | 1.40170119125279 | 0.34598575242945 |
| $(5,4)$ | 0.84420044943554 | 0.61621979788713 |
| $(5,5)$ | 0.29259703484100 | 0.14985111632542 |
| $(6,1)$ | 5.46131862556554 | 0.00000044559779 |
| $(6,2)$ | 2.57149023311148<br>$+0.22111363448839i$ | $-0.03392167705860$<br>$-0.05983651852639i$ |
| $(6,3)$ | 2.57149023311148<br>$-0.22111363448839i$ | $-0.03392167705860$<br>$+0.05983651852639i$ |
| $(6,4)$ | 1.15604089890289 | 0.62219204833397 |
| $(6,5)$ | 0.61387125229038 | 0.38064782917392 |
| $(6,6)$ | 0.19149418055927 | 0.06500303101152 |
| $(7,1)$ | 4.47857310205822<br>$+1.05143578827202i$ | $-0.00000095941644$<br>$+0.00000286759259i$ |
| $(7,2)$ | 4.47857310205822<br>$-1.05143578827202i$ | $-0.00000095941644$<br>$-0.00000286759259i$ |
| $(7,3)$ | 2.57570942404071<br>$+0.08389261266139i$ | $-0.03668363412723$<br>$-0.18462596086262i$ |
| $(7,4)$ | 2.57570942404071<br>$-0.08389261266139i$ | $-0.03668363412723$<br>$+0.18462596086262i$ |
| $(7,5)$ | 1.17868753794210 | 0.59177391194094 |
| $(7,6)$ | 0.64718292632192 | 0.40416729884928 |
| $(7,7)$ | 0.21083254066883 | 0.07742797629712 |

$p = 4$

| $(n,i)$ | $\xi_i$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|
| $(1,1)$ | 1.00539321344325 | 1 |
| $(3,1)$ | 1.04853064016700 $+1.12270284604329i$ | 0.00582782384279 $-0.03775107090999i$ |
| $(3,2)$ | 1.04853064016700 $-1.12270284604329i$ | 0.00582782384279 $+0.03775107090999i$ |
| $(3,3)$ | 0.91911835999572 | 0.98834435231443 |
| $(4,1)$ | $-13.29316295385726$ | 0.00000001233185 |
| $(4,2)$ | 1.04870131854078 $+1.15248737264806i$ | 0.00513128131232 $-0.03495345854712i$ |
| $(4,3)$ | 1.04870131854078 $-1.15248737264806i$ | 0.00513128131232 $+0.03495345854712i$ |
| $(4,4)$ | 0.92354209518181 | 0.98973742504352 |
| $(5,1)$ | 4.61726528964245 | $-0.00053401798351$ |
| $(5,2)$ | 2.67235922251032 $+0.95675476012388i$ | $-0.01295799723697$ $+0.00415965321700i$ |
| $(5,3)$ | 2.67235922251032 $-0.95675476012388i$ | $-0.01295799723697$ $-0.00415965321700i$ |
| $(5,4)$ | 1.18913819012104 | 0.83700888584884 |
| $(5,5)$ | 0.47379399072650 | 0.18944112660860 |
| $(6,1)$ | 3.94366658549433 | $-0.00792748111292$ |
| $(6,2)$ | 3.23315290836936 | 0.06629885561877 |
| $(6,3)$ | 2.64987921353945 | $-0.14629135547889$ |
| $(6,4)$ | 1.38125504525822 | 0.63352192099921 |
| $(6,5)$ | 0.80140844130021 | 0.39610599477028 |
| $(6,6)$ | 0.29950221136834 | 0.05829206520355 |
| $(7,1)$ | 10.93584889360532 | 0.00000000000305 |
| $(7,2)$ | 3.95901608028771 | $-0.00722142046070$ |
| $(7,3)$ | 3.18990839145403 | 0.07694268230176 |
| $(7,4)$ | 2.68227830058250 | $-0.15550102364591$ |
| $(7,5)$ | 1.37399594572587 | 0.64170556424073 |
| $(7,6)$ | 0.79192845439016 | 0.38839556905085 |
| $(7,7)$ | 0.29378418210910 | 0.05567862851022 |

$p = 5$

| $(n,i)$ | $\xi_i$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|
| $(1,1)$ | 1.19390801802382 | 1 |
| $(3,1)$ | 1.25428263303571<br>$+1.00151785534769i$ | 0.01407584394593<br>$-0.05773750685075i$ |
| $(3,2)$ | 1.25428263303571<br>$-1.00151785534769i$ | 0.01407584394593<br>$+0.05773750685075$ |
| $(3,3)$ | 1.07315878800004 | 0.97184831210815 |
| $(4,1)$ | $-2.58944859529928$ | 0.00003845830217 |
| $(4,2)$ | 1.27636083192646<br>$+1.12768571824378i$ | 0.00946477103611<br>$-0.03994664647459i$ |
| $(4,3)$ | 1.27636083192646<br>$-1.12768571824378i$ | 0.00946477103611<br>$+0.03994664647459i$ |
| $(4,4)$ | 1.10062888134422 | 0.98103199962560 |
| $(5,1)$ | $-2.87523653705961$<br>$+4.18141688485679i$ | $-0.00000010983907$<br>$-0.00000168708091i$ |
| $(5,2)$ | $-2.87523653705961$<br>$-4.18141688485679i$ | $-0.00000010983907$<br>$+0.00000168708091i$ |
| $(5,3)$ | 1.24836871943867<br>$+1.07067091192301i$ | 0.00968867797940<br>$-0.04811022314115i$ |
| $(5,4)$ | 1.24836871943867<br>$-1.07067091192301i$ | 0.00968867797940<br>$+0.04811022314115i$ |
| $(5,5)$ | 1.08776044193297 | 0.98062286371933 |
| $(6,1)$ | 5.56435230095822<br>$+1.64107252080303i$ | $-0.00000815787191$<br>$+0.00003818595320i$ |
| $(6,2)$ | 5.56435230095822<br>$-1.64107252080303i$ | $-0.00000815787191$<br>$-0.00003818595320i$ |
| $(6,3)$ | 2.48470130835400<br>$+1.19657102755324i$ | $-0.00255065671302$<br>$+0.01158756780720i$ |
| $(6,4)$ | 2.484701308354000<br>$-1.19657102755324i$ | $-0.00255065671302$<br>$-0.01158756780720i$ |
| $(6,5)$ | 1.33870571228889 | 0.86048155339437 |
| $(6,6)$ | 0.57107814282311 | 0.14463607577551 |
| $(7,1)$ | 4.84191424774232<br>$+0.32413577320860i$ | $-0.00240791157234$<br>$-0.00209858296438i$ |
| $(7,2)$ | 4.84191424774232<br>$-0.32413577320860i$ | $-0.00240791157234$<br>$+0.00209858296438i$ |
| $(7,3)$ | 3.11838727017794<br>$+0.26642501795941i$ | $-0.04045814479353$<br>$-0.10080746972709i$ |
| $(7,4)$ | 3.11838727017794<br>$-0.26642501795941i$ | $-0.04045814479353$<br>$+0.10080746972710i$ |
| $(7,5)$ | 1.55280807081402 | 0.68726281232263 |
| $(7,6)$ | 0.92719246932299 | 0.35803699341169 |
| $(7,7)$ | 0.37895405914017 | 0.04043230699741 |

$p = 6$

| $(n,i)$ | $\xi_i$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|
| $(1,1)$ | 1.38216031903122 | 1 |
| $(3,1)$ | 1.45726490981802 $+0.94726157933517i$ | 0.02379864281376 $-0.07362531144389i$ |
| $(3,2)$ | 1.45726490981802 $-0.94726157933517i$ | 0.02379864281376 $+0.07362531144389i$ |
| $(3,3)$ | 1.23195113745759 | 0.95240271437248 |
| $(4,1)$ | 1.53327704834971 $+1.16482883844267i$ | 0.01401263918423 $-0.03605137849375i$ |
| $(4,2)$ | 1.53327704834971 $-1.16482883844267i$ | 0.01401263918423 $+0.03605137849375i$ |
| $(4,3)$ | 1.29332963278913 | 0.97108940454931 |
| $(4,4)$ | $-0.83164635694094$ | 0.00088531708224 |
| $(5,1)$ | $-0.17147440381559$ $+2.65577472362587i$ | 0.00010860785579 $-0.00000671092069i$ |
| $(5,2)$ | $-0.17147440381559$ $-2.65577472362587i$ | 0.00010860785579 $+0.00000671092069i$ |
| $(5,3)$ | 1.41145691062709 $+1.03782962135098i$ | 0.01080933816073 $-0.06174015885721i$ |
| $(5,4)$ | 1.41145691062709 $-1.03782962135098i$ | 0.01080933816073 $+0.06174015885721i$ |
| $(5,5)$ | 1.25080909138176 | 0.97816410796695 |
| $(6,1)$ | $-18.62517431742508$ | 0.00000000000229 |
| $(6,2)$ | $-0.54909523631005$ $+2.74345535522482i$ | 0.00004703827359 $-0.00003899664296i$ |
| $(6,3)$ | $-0.54909523631005$ $-2.74345535522482i$ | 0.00004703827359 $+0.00003899664296i$ |
| $(6,4)$ | 1.42912723078705 $+1.05972249138916i$ | 0.01125253107663 $-0.05680307622270i$ |
| $(6,5)$ | 1.42912723078705 $-1.05972249138916i$ | 0.01125253107663 $+0.05680307622270i$ |
| $(6,6)$ | 1.25787121904897 | 0.97740086129727 |
| $(7,1)$ | 8.78753318160388 | $-0.00000025426113$ |
| $(7,2)$ | 5.04829403882989 $+3.11520590344564$ | 0.00000845176687 $-0.00000611791003i$ |
| $(7,3)$ | 5.04829403882989 $-3.11520590344564i$ | 0.00000845176687 $+0.00000611791003i$ |
| $(7,4)$ | 2.36633538047098 $+1.23563672860587i$ | 0.00777489980905 $+0.01205280699199i$ |
| $(7,5)$ | 2.36633538047098 $-1.23563672860587i$ | 0.00777489980905 $-0.01205280699199i$ |
| $(7,6)$ | 1.49008040424012 | 0.87244144898761 |
| $(7,7)$ | 0.66987702575422 | 0.11199210212169 |

# 附錄 B：降階高斯積分法的節點和係數

$p = 2$

| $(n,i)$ | $\xi_i$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|
| (3,1) | 3.00000000000000 | −0.00631879373397 |
| (3,2) | 0.67764863047653 | 0.98294971554288 |
| (3,3) | −0.56328927653163 | 0.02336907819108 |
| (4,1) | 3.00000000000000 | 0.00099405785708 |
| (4,2) | 2.04855983124020 | −0.04734410523937 |
| (4,3) | 0.89093301440708 | 0.71274964679850 |
| (4,4) | 0.27867911243881 | 0.33360040058378 |
| (5,1) | 3.00000000000000 | 0.00027423380675 |
| (5,2) | 1.65349472110165 | −0.37146215564768 |
| (5,3) | 1.46757921354218 | 0.48771416696038 |
| (5,4) | 0.73030997601860 | 0.66600811429536 |
| (5,5) | 0.20789980691111 | 0.21746564058519 |
| (6,1) | 2.34261663883618 | 0.01319250852215 |
| (6,2) | 2.00000000000000 | −0.08361681502742 |
| (6,3) | 1.36792596513962 | 0.05534229477591 |
| (6,4) | 0.95794462516759 | 0.49688816309039 |
| (6,5) | 0.50560074655241 | 0.39956857689194 |
| (6,6) | 0.13981471353029 | 0.11862527174703 |
| (7,1) | 2.99999999999978 | −0.00002600824313 |
| (7,2) | 2.40910267501624 | 0.00843547496730 |
| (7,3) | 1.98657385875824 | −0.07655913503059 |
| (7,4) | 1.10809138444397 | 0.32155238001365 |
| (7,5) | 0.71926472705375 | 0.44860986436870 |
| (7,6) | 0.34352126695631 | 0.23669451146334 |
| (7,7) | 0.09026818381032 | 0.06129291246074 |

$p = 3$

| $(n,i)$ | $\xi_i$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|
| (3,1) | 2.00000000000000 | −0.03139312458098 |
| (3,2) | 0.88547371286237 | 1.00630555305830 |
| (3,3) | −0.43327020942973 | 0.02508757152268 |
| (4,1) | 3.26212510933283 | 0.00620524042592 |
| (4,2) | 1.99999999999999 | −0.12156139107441 |
| (4,3) | 1.14747718552823 | 0.77687081182345 |
| (4,4) | 0.43972405777840 | 0.33848533882503 |
| (5,1) | 2.86423892147569 | 0.02447799344032 |
| (5,2) | 2.00000000000001 | −0.40385589160877 |
| (5,3) | 1.73846643765399 | 0.48496244368516 |
| (5,4) | 0.91316311134242 | 0.71915529172539 |
| (5,5) | 0.31498951632078 | 0.17526016275791 |
| (6,1) | −6.88631044505931 | 0.00000000019931 |
| (6,2) | 2.85796068932912 | 0.02523909654664 |
| (6,3) | 2.00000000000003 | −0.43262805569474 |
| (6,4) | 1.75953292253543 | 0.50444386852161 |
| (6,5) | 0.92006445696233 | 0.72359330778301 |
| (6,6) | 0.31885301580741 | 0.17935178264417 |
| (7,1) | 4.43560376494515 | 0.00002178233908 |
| (7,2) | 3.24904741856322 | −0.00943333651927 |
| (7,3) | 3.00000000000339 | 0.03956557897282 |
| (7,4) | 2.34513945398719 | −0.10910627590918 |
| (7,5) | 1.19444589715261 | 0.57678978555107 |
| (7,6) | 0.66286241978871 | 0.41979883640322 |
| (7,7) | 0.21749330176632 | 0.08236362916227 |