國 立 中 央 大 學

數 學 研 究 所

Helmholtz 方程的凌波-有限元數值解與穩定性分析

指導教授: 單維彰

學　　生: 蘇哿穎

論文摘要

Helmholtz 方程在工程上扮演著一個重要的角色, 醫學診斷, 工業上的非破壞性測試, 潛艇作戰, 石油探勘等都在做 Helmholtz 方程的數值演算法研究. 在這篇論文中, 我們先去了解 Helmholtz 方程的一些數學及物理基本性質, 再由限元素法及 Wavelet-Galerkin 方法求得數值解, 並對數值解的誤差做分析及比較.

第一, 二章, 以電磁學中的 Maxwall 方程爲例子, 推導出 Helmholtz 方程

$$u'' + k^2 u = f,$$

接著討論 Helmholtz 中解, 變分式及 n 維基本解的性質.

在有限元素法中, 先把微分方程化成積分方程, 再以分片 n 階基底函數 $p(x)$ 去求出積分方程的逼近解 $u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i p_i(x)$; 從一些文獻中, 我們很清楚的知道, 在數值解求解的過程中, 會得到一個離散化後的波數 k'; 藉著 $|k - k'|$, 我們能夠解釋數值解的 H^1-seminorm 誤差分析圖中, 波數 k, 節點數與誤差曲線間的關係, 在第三章中有更詳細的說明.

第四章由 Fourier 分析爲導引, 簡單介紹 Wavelet 分析及與實驗相關的重要性質. 用 Wavelet-Galerkin 方法來求週期 Helmholtz 方程時, 分別以正則 (orthonormal) 自格函數 $\phi(x)$ 及提昇後的雙正交自格函數 $\Phi(x)$, 取代有限元素法中的基底函數, 實驗結果得到與有限元解類似的穩定性及誤差. 這表示我們將有機會利用(提昇)凌波函數的分解 - 重建性質, 來增進數值解的準確性, 並討論波數 k 與分解 - 重建次數間的關係.

目錄

第一章 導論

模擬波傳導現象的方程稱爲波方程(wave equation), 被寫成

$$\Psi_{tt} = c^2 \nabla \cdot (a \nabla \Psi), \quad a = (\frac{v}{c})^2. \tag{1.1}$$

其中傳送速度 v 在空間中是可變的, 而 c 是參考速度, 這個方程可被簡化成是求時間-調和(time-harmonic)的解. 假設 $\Psi(x,t)$ 在空間 Ω 中隨著某一個的角頻率 w 做振盪, 那麼

$$\Psi(x,t) = u(x) \cdot e^{-iwt}, \quad x \in \Omega \tag{1.2}$$

代入 (1.1),

$$-w^2 u(x) \cdot e^{-iwt} = c^2 \nabla \cdot (a(x) \nabla u(x)) \cdot e^{-iwt}.$$

此時定義波數(wave-number) $k = w/c$, 得到

$$\nabla \cdot (a \nabla u) + k^2 u = 0, \tag{1.3}$$

這就是和時間無關的偏微分方程 Helmholtz equation. 以實際的例子來說, 一個在均勻的, 等向性的, 無源(source-free)介質, 而且是自由空間(free-space)中的電磁波必須遵守 Maxwell 方程

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial t} &= -\frac{c}{\mu\epsilon} \nabla \times B, \\
\frac{\partial B}{\partial t} &= c \nabla \times E, \\
\nabla \cdot E &= 0, \\
\nabla \cdot B &= 0,
\end{aligned}$$

其中 $E = (E_1, E_2, E_3)$ 和 $B = (B_1, B_2, B_3)$ 分別是電場和磁場, c 是光速, ϵ 和 μ 是介質中的介電和導磁係數. 這個電磁波在一個中空圓柱的波導(waveguide)中前進, 假設電磁波的時間週期是 e^{-iwt}, 則 Maxwell 方程變成

$$\nabla \times E = -i \frac{w}{c} B, \tag{1.4}$$

$$\nabla \times B = i \mu \epsilon \frac{w}{c} E, \tag{1.5}$$

$$\nabla \cdot E = 0,$$

$$\nabla \cdot B = 0,$$

對 (1.4) 和 (1.5) 式取旋度(curl),

$$\nabla\times(\nabla\times E) = -i\frac{w}{c}(\nabla\times B),$$
$$\nabla\times(\nabla\times B) = i\mu\epsilon\frac{w}{c}(\nabla\times E).$$

對一個向量 A, 有 $\nabla\times(\nabla\times A)=\nabla(\nabla\cdot A)-\Delta A$, 因此分別得出 E 和 B 的 Helmholtz 方程

$$\Big(\Delta+\frac{\mu\epsilon w^2}{c^2}\Big)\begin{bmatrix}E\\B\end{bmatrix}=0. \tag{1.6}$$

假設電場 E 和磁場 B 在 x_1 的方向上都是週期變化, 寫成

$$\begin{bmatrix}E(x_1,x_2,x_3,t)\\B(x_1,x_2,x_3,t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E(x_2,x_3)\\B(x_2,x_3)\end{bmatrix}e^{i(kx_1-wt)},$$

那麼 E 和 B 滿足二維的 Helmholtz 方程

$$\big[\Delta_\perp+(\mu\epsilon\frac{w^2}{c^2}-k^2)\big]\begin{bmatrix}E\\B\end{bmatrix}=0, \tag{1.7}$$

其中 $\Delta_\perp\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, 把 E 和 B 分解成 x_1 方向及與 x_1 垂直方向的分量

$$\begin{aligned}E&=E_1+E_\perp, &\quad E_1&=(e_1\cdot E)e_1, &\quad E_\perp&=(e_1\times E)\times e_1,\\ B&=B_1+B_\perp, &\quad B_1&=(e_1\cdot B)e_1, &\quad B_\perp&=(e_1\times B)\times e_1,\end{aligned} \tag{1.8}$$

其中 e_1 是 x_1 方向的單位向量, 由 (1.4), (1.5) 及 (1.8) 式, 可以把 $E_\perp$ 和 $B_\perp$ 展成 E_1 和 B_1 的關係式

$$E_\perp=(\mu\epsilon\frac{w^2}{c^2}-k^2)^{-1}\big[\nabla_\perp(\frac{\partial E_1}{\partial x_1})-i\frac{w}{c}e_1\times\nabla_\perp B_1\big],$$
$$B_\perp=(\mu\epsilon\frac{w^2}{c^2}-k^2)^{-1}\big[\nabla_\perp(\frac{\partial B_1}{\partial x_1})-i\mu\epsilon\frac{w}{c}e_1\times\nabla_\perp E_1\big],$$

其中 $\nabla_\perp\equiv(0,\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3})$. 只要 E_1 和 B_1 被決定, 就可以求出整個電磁場. 假設波導的邊界是完全導體, 在導體表面, 切線方向的電場和法線方向的磁場都等於零,

$$n\times E=0,\quad n\cdot B=0,\qquad \text{on } (-\infty,\infty)\times\partial\Omega. \tag{1.9}$$

$\partial\Omega$ 是波導在 x_2, x_3 平面上的邊界, 得出

$$E_1=0,\quad \text{on } \partial\Omega,$$

再由 (1.8) 式和 $n \cdot B = 0$ 得出

$$\frac{\partial}{\partial n}(B_1 \cdot e_1) = 0, \quad \text{on } \partial\Omega.$$

令 $E_1 \cdot e_1 = \hat{E}_1$ 和 $B_1 \cdot e_1 = \hat{B}_1$, 對給定的頻率 w, 只有某些軸波數(axial wavenumber) k 有非零解 $\hat{E}_1$ 和 $\hat{B}_1$, 但 $\hat{E}_1$ 和 $\hat{B}_1$ 的邊界條件不同, 由 (1.7) 式, 固有值問題

$$[\Delta_\perp + (\mu\epsilon\frac{w^2}{c^2} - k^2)]\hat{E}_1 = 0, \qquad \hat{E}_1 = 0, \text{ on } \partial\Omega, \tag{1.10}$$

$$[\Delta_\perp + (\mu\epsilon\frac{w^2}{c^2} - k^2)]\hat{B}_1 = 0, \qquad \frac{\partial \hat{B}_1}{\partial n} = 0, \text{ on } \partial\Omega, \tag{1.11}$$

不會同時發生, 因此有兩種可能的情形:

(i) TM(transverse magnetic)波, $\hat{B}_1 \equiv 0$, on $\partial\Omega$, 只有 (1.10) 式成立.

(ii) TE(transverse electric)波, $\hat{E}_1 \equiv 0$, on $\partial\Omega$, 只有 (1.11) 式成立.

而 (1.10) 和 (1.11) 式都是 Helmholtz 方程.

方程 (1.3) 式有基本解(fundamental solution) $u = e^{ikx}$ 和 $u = e^{-ikx}$, 相當於波傳導方程的穩定解

$$u = e^{i(kx-wt)}, \quad u = e^{-i(kx+wt)}.$$

有相位速度(phase velocity) $v_\phi = w/k$. 當相位速度和聲速相等, 就是只與介質的材料性質有關, 與頻率無關[3], 這樣的波是沒有分散的(non-dispersive). 所謂分散(dispersive)是指隨著不同波長或波數 k 的波以不同的速度前進, w 固定時, k 越大, 波長越小, 相位速度也越小.

用有限元素法求 Helmholtz equation 所得到的逼近解, 並不保有不分散的性質. 把原區間以寬度 h 等分, 變成 X_h, 離散後的數值解可寫成

$$u_h = e^{i(k'x-wt)}, \; u_h = e^{-i(k'x+wt)}, \quad x \in X_h.$$

離散的波數(discrete wavenumber) k' 和頻率(原來的 k)有關, 這時數值化後的波以相位速度 $v_\phi^h = w/k'$ 前進, 不再等於聲速 c. 因分散產生的導引相位(phase lead)造成主要的數值誤差, 而誤差的大小和導引相位有關.

當我們用有限元素法求解時, 必須注意到數值解的精確度和網格的寬度 h 及波數 k 都有關. 比如說, 我們將發現分片線性有限元解在 H^1-seminorm 的相對誤差可以寫成

$$\tilde{e} \leq C_1 hk + C_2 h^2 k^3,$$

其中的 C_1 和 C_2 是與 h, k 無關的常數. 右邊的第一項 $C_1 hk$ 表現了最佳逼近解誤差, 第二項 $C_2 h^2 k^3$ 是最佳解誤差估計和 h, k 相關的倍數, 稱爲 pollution 項. 而分散的特性就被包含在這裡. 對高階有限元基底以及凌波函數(wavelet)基底的逼近解, 將在後面的章節中做更詳細的討論.

在 H^1 的子空間 V_h 上, 對線性基底而言, 當 hk^2 夠小時, H^1-seminorm 的誤差估計會滿足 quasioptimal 估計

$$|u - u_{fe}|_1 \leq C \inf_{v \in V_h} |u - v|_1, \tag{1.12}$$

其中 C 是和 h, k 無關的常數. H^1-seminorm 的最佳解是插值函數, 並沒有導引相位, 就是沒有分散的, 所以在達到 quasioptimal 時表示相對於最佳解, 有限元解中的分散性質已可被忽視了.

在第二章中, 將討論解的存在性和唯一性, 還有變分式及弱解的性質. 第三章針對離散化後, 討論有限元解的相位差對誤差估計的影響. 第四章則是以凌波函數爲基底, 用標準 Galerkin 方法求逼近解的一些實驗結果.

第二章 數學模型

考慮一維的 Helmholtz 方程和 Dirichlet-Robin 邊界條件. 給定 Ω=(0,1). 在 $\bar{\Omega}$ 上的邊界問題 $Lu = -f$

$$u''(x) + k^2 u(x) = -f(x) \tag{2.1a}$$

$$B_0 u := u(0) = 0 \tag{2.1b}$$

$$B_1 u := u'(1) - iku(1) = 0 \tag{2.1c}$$

其中 $f(x) \in C^1(0,1)$, k 是大於 0 的實數常數. 如果外部邊界條件問題 (2.1) 式滿足 Sommerfeld radiation condition 就是說, 當 $x \to \infty$ 時, $(\frac{\partial}{\partial x} - ik)u = o(1/\sqrt{x})$ 則有唯一解 [12, Theorem 7.5.5]. 在一維時, Rokin 邊界條件是一個完全吸收(無反射)邊界條件, 是由在 x 等於無限大的 Sommerfeld radiation 條件推導出 在有限區間的人造邊界.

這裡 $L^2(\Omega)$ 是所有定義在 Ω 上平方可積的複數函數形成的空間, 定義內積

$$(u,v) := \int_\Omega u(x)\bar{v}(x)dx,$$

norm

$$||u|| := \sqrt{(u,u)}.$$

我們用 $H^m(\Omega)$ 代表 m 階在 $L^2(\Omega)$ 內的 Sobolev 空間,

$$H^m(\Omega) := \{u \in L^2, \partial^i u \in L^2, i = 1, \cdots, m\}$$

令 $H^1_{(0)}(0,1) := \{v \in H^1(0,1)$ 而且 $v(0) = 0\}$. 如果一個函數 u 在 Ω 上是 ℓ 次弱可微的, 則稱 u 是 ℓ 正規(regularity ℓ), 就是 $u \in V^\ell := H^\ell(\Omega) \cap H^1_{(0)}(\Omega)$.

$|u|_m$ 代表 H^m-seminorm

$$|u|_m := ||\partial^m u||,$$

$||u||_m$ 代表 full-norm

$$||u||_0^2 = \int |u|^2 dx, \quad ||u||_m^2 = ||u||_{m-1}^2 + |u|_m^2.$$

第一節 解的性質

Theorem 2.1 在問題(2.1)式中的解存在而且唯一.

proof: 假設 u_1 和 u_2 是 (2.1) 式中的兩個解, 令 $u = u_1 - u_2$. 則 $u(0) = 0$, 又

$$0 = \int \bar{u} L u dx = \int (-\bar{u}' u' + k^2 |u|^2) dx + u'(1)\bar{u}(1). \tag{2.2}$$

將 (2.1c) 代入 (2.2) 式中, 從虛部可得出 $u(1) = 0$, 再帶回 (2.1c), 求出 $u'(1)$ 也等於 0. 由初使值問題的唯一性 [16, p41], 得出 $u \equiv 0$. 對 BVP (2.1) 式有 Green 函數

$$G(x,s) = \frac{1}{k} \begin{cases} \sin(kx)e^{iks} & 0 \le x \le s, \\ \sin(ks)e^{ikx} & s \le x \le 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

對所有的 $k > 0$, 存在解

$$u(x) = \int_0^1 G(x,s) f(s) ds \tag{2.4}$$

□

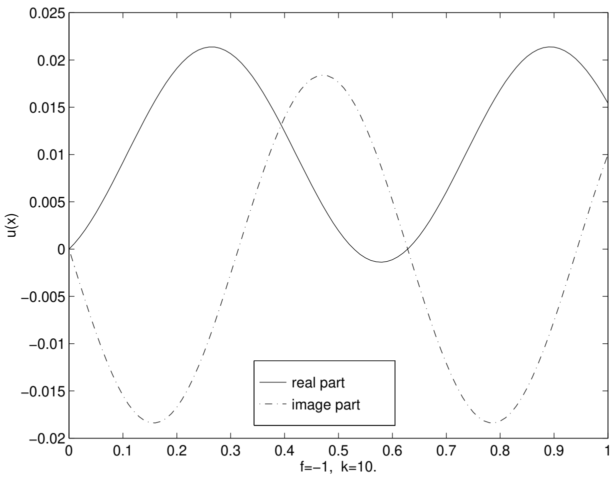


Fig 1.

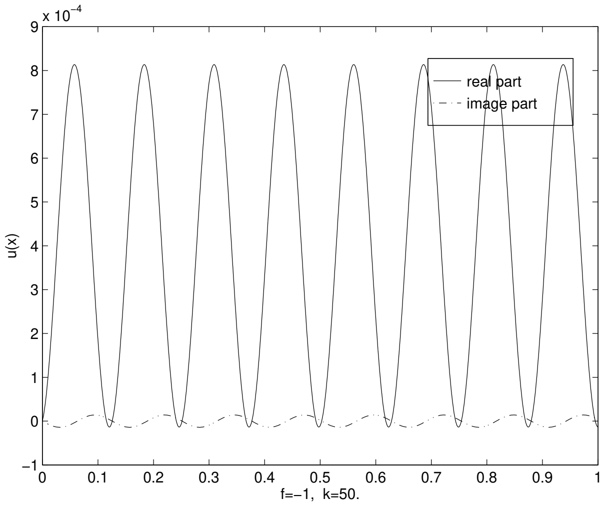


Fig 2.

圖一及圖二分別是在 $f = -1$, $k = 10$ 及 $k = 50$ 時眞解 $u(x)$ 的圖形.

以下這個 Lemma 在說明 $u(x)$ 在 H^0, H^1 及 H^2-seminor 之下的穩定性.

Lemma 2.1 讓 $u \in H^2(0,1)$ 是 BVP (2.1) 式的解, 若 $f \in L^2(0,1)$, 則

$$||u|| \le k^{-1}||f||,$$

$$|u|_1 \le ||f||,$$

$$|u|_2 \le (1+k)||f||.$$

proof:

$$u(x) = \frac{1}{k}\big(e^{ikx}\int_0^x \sin(ks)f(s)ds + \sin(kx)\int_x^1 e^{iks}f(s)ds\big),$$

所以

$$||u|| \le \frac{1}{k}||f||,$$

$$||u_x|| \le ||f||,$$

又

$$u_{xx} = -f - k^2 u,$$

因此

$$|u|_2 \le ||f|| + k^2||u|| \le (1+k)||f||.$$

□

第二節 變分式和弱解 (Variational Formulation and Weak Solution)

求解 $u \in H^1_{(0)}$ 使得

$$B(u,v) = \int_0^1 [u'(x)\bar{v}'(x) - k^2 u(x)\bar{v}(x)]dx - iku(1)\bar{v}(1) = F(v), \tag{2.8}$$

對所有的 $v \in H^1_{(0)}$, 其中

$$F(v) = \int_0^1 f(x)\bar{v}(x)dx \tag{2.9}$$

當解出的 $u \in H^2$ 時, 那麼 (2.8) 式的解就是 (2.1) 式的解. 否則稱 $u \in H^1_{(0)}$ 是弱解.

Theorem 2.2 在問題 (2.8) 式中的解存在且唯一.

proof: 首先證明 $u = 0$ 是 (2.8) 式的唯一齊次(homogeneous)解, 則 (2.8) 式的解唯一. 對所有的 v 滿足 $F(v) = 0$, 當 $v = u$ 時,

$$B(u,u) = \int_0^1 (u'(x)\bar{u}'(x) - k^2 u(x)\bar{u}(x)dx - iku(1)\bar{u}(1) = 0.$$

由虛部得出 $u(1) = 0$. 則

$$\int_0^1 u'(x)\bar{v}'(x)dx = k^2 \int_0^1 u(x)\bar{v}(x)dx, \quad v \in H^1_{(0)}$$

令 $v = x$, 得出

$$k^2 \int_0^1 uxdx = \int_0^1 u'dx = u(1) - u(0) = 0.$$

對自然數 n, 假設 $\int_0^1 ux^n dx = 0$, 再由分部積分

$$0 = \frac{-1}{n+1}\int_0^1 u'x^{n+1}dx = \frac{-k^2}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 ux^{n+2}dx.$$

從歸納法得出

$$0 = \int_0^1 ux^s dx, \quad s = 1, 3, 5, \cdots$$

從 Müntz's 定理 [13, p.45], 集合 $\mathrm{span}\{x^s | s = 1, 3, 5, \cdots\}$ 在 $L^2(0,1)$ 中緊緻, 所以 $u \equiv 0$.

對算子 B, 由 Gårding 不等式

$$Re(B(u,u)) + C||u||^2 \geq ||u||_1^2.$$

在 $C = C(k) = 1 + k^2$ 時成立. 在 [7, p.194] 中提到以下兩種情形只有一種會發生: 對 Dirichlet 邊界值 0, 齊次問題 $Lu = 0$ 存在非零解; 對 Dirichlet 邊界值 0, 問題 $Lu = f$ 的解存在. 而我們已經證明了在 $Lu = 0$ 時 $u = 0$, 所以由第二種情況知道解存在, 也就是 (2.8) 式的解存在而且唯一.

$\square$

第三節 基本解 (fundamental solution)

在前面兩節, 我們考慮了在一維空間中, 解的存在唯一性, 及變分式和弱解的性質, 這節將對 n 維空間中 $(n \geq 2)$, Helmholtz 方程的基本解略做討論.

在 n 維空間中的 Helmholtz 方程

$$
\begin{aligned}
&(\Delta + k^2)E(x) = \delta(x), \qquad (2.10)\\
&\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad x \in R^n,\\
&k = \alpha + i\beta, \quad \beta = \mathrm{Im}k \geq 0. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

由於 Helmholtz 算子和 Laplace 算子 Δ 一樣, 都具有球狀對稱(spherical symmetry), 因此存在 (2.10) 式的特別解 $u(x)$ 在旋轉後滿足

$$
(\Delta + k^2)u(x) = 0, \qquad (2.12)
$$

其中 $u = u(|x|) = u(r)$, $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} > 0$. 因爲

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i} &= \frac{\partial u(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial u(r)}{\partial r}\frac{x_i}{r},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2}(\frac{x_i}{r})^2 + \frac{\partial u(r)}{\partial r}\frac{r - x_i^2/r}{r^2},
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
0 &= (\Delta + k^2)u(r)\\
&= \frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{r})^2 + \frac{\partial u(r)}{\partial r}\sum_{i=1}^{n}\frac{r - (x_i)^2/r}{r^2} + k^2u(r)\\
&= \frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial u(r)}{\partial r} + k^2u(r), \quad \forall\, r > 0. \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

令 $w = r^{\frac{n}{2}-1}u$, 那麼上式變成 Bessel's 方程

$$
\frac{d}{dr}(r\frac{dw}{dr}) + [k^2 r - \frac{(\frac{n}{2}-1)^2}{r}]w = 0. \qquad (2.14)
$$

對 Bessel's 方程有特殊解 $H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(kr)$ 和 $H^{(2)}_{\frac{n}{2}-1}(kr)$, 其中

$$H^{(1)}_\alpha(z) = J_\alpha(z) + iN_\alpha(z),$$

$$H^{(2)}_\alpha(z) = J_\alpha(z) - iN_\alpha(z),$$

而

$$J_\alpha(z) = (\frac{z}{2})^2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+\alpha)!}(\frac{z}{2})^{2p}, \quad \alpha \geq 0,$$

$$N_\alpha(z) = \frac{1}{\sin(\pi\alpha)}[\cos(\pi\alpha)J_\alpha(z) - (-1)^\alpha J_\alpha(z)].$$

那麼 (2.12) 式的解就是

$$u(x) = r^{1-\frac{n}{2}}\big[C_1 H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(k|x|) + C_2 H^{(2)}_{\frac{n}{2}-1}(k|x|)\big]. \tag{2.15}$$

接下來考慮 (2.10) 式的解 E. 令 $B(0,r)$ 是一個以 0 爲圓心, $r>0$ 爲半徑的有界開集, 將 (2.10) 式在 $B(0,r)$ 上積分:

$$\int_{B(0,r)} (\Delta E + k^2 E)\, dV = \int_{B(0,r)} \delta(x)\, dV = 1.$$

令 $x = \rho w_n$, $\rho \in (0,r)$, $w_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, $n \geq 2$, 由散度(divergence)定理,

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{\partial B(0,r)} \nabla E(x)\cdot n_x dS \;+\; k^2\int_{B(0,r)} E(x)dV \\
&= \int_{\partial B(0,r)} \nabla E(x)\cdot \frac{x-0}{\rho} dS \;+\; k^2\int_{B(0,r)} E(x)dV \\
&= \int_{\partial B(0,1)} \nabla E(rw_n)w_n r^{n-1} dS_{w_n} \;+\; k^2\int_{B(0,r)} E(\rho w_n)dV \\
&= r^{n-1}\int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial E(rw_n)}{\partial r} dS_{w_n} \;+\; k^2\int_0^r E(\rho w_n)\rho^{n-1}w_n d\rho \\
&= r^{n-1}\frac{d}{dr}\int_{\partial B(0,1)} E(rw_n)dS_{w_n} \;+\; k^2 w_n\int_0^r \rho^{n-1}E(\rho w_n)d\rho \\
&= w_n\big[r^{n-1}E'(rw_n)w_n \;+\; k^2\int_0^r \rho^{n-1}E(\rho w_n)d\rho\big], \quad \forall r>0,
\end{aligned}$$

其中 $dS = r^{n-1}dS_{w_n}$, 而 dS_{w_n} 是 n 維單位球表面積的微分元素(differential element). 當 $r \to 0$ 時,

$$\lim_{r\to 0} r^{n-1}E'(rw_n) = \frac{1}{w_n^2}. \tag{2.16}$$

因爲

$$H_\alpha^{(1),(2)}(z) \sim (\frac{2}{\pi z})^{1/2} e^{\pm i(z-\alpha\pi/2-\pi/4)}, \quad \text{as } |z| \to \infty,$$

這裡 $+, -$ 相對於 $^{(1)}, ^{(2)}$. 由於 k 是複數, 我們讓 (2.15) 式中的 $C_2 = 0$, 這樣在 $r \to \infty$ 時, $u(x)$ 才不會以指數成長. 藉由 $\frac{d}{dr}(r^{-\alpha} H_\alpha^{(1)}(r)) = -r^{-\alpha} H_{\alpha+1}^{(1)}(r)$ 及

$$\lim_{z\to 0} H_\alpha^{(1)}(z) = \begin{cases} \frac{2i}{\pi} \ln z & \alpha = 0, \\ -\frac{i2^\alpha(\alpha-1)!}{\pi} z^{-\alpha} & \forall \alpha > 0. \end{cases}$$

得出

$$\begin{aligned} u'(rw_n)w_n &= \frac{du(x)}{dr} \\ &= C_1 k^{\frac{n}{2}-1} \Big(\frac{d}{d(kr)} \big[(kr)^{1-\frac{n}{2}} H_{\frac{n}{2}-1}(kr) \big] \Big) \frac{d(kr)}{dr} \\ &= C_1 r^{1-n} k^{1-\frac{n}{2}} \frac{i2^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2}-1)!}{\pi}, \end{aligned}$$

也就是當 $r \to 0$ 時,

$$r^{n-1} u'(rw_n) = C_1 k^{1-\frac{n}{2}} \frac{i2^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2}-1)!}{\pi w_n}.$$

再與 (2.16) 式比較, 得出

$$C_1 = -\frac{i\pi 2^{-\frac{n}{2}} k^{\frac{n}{2}-1}}{(\frac{n}{2}-1)! w_n} = -\frac{i}{4}(\frac{k}{2\pi})^{\frac{n}{2}-1},$$

因此 (2.10) 式的解

$$E(x) = -\frac{i}{4}(\frac{k}{2\pi r})^{\frac{n}{2}-1} H_{\frac{n}{2}-1}^{(1)}(kr), \quad n \geq 2, \tag{2.17}$$

其中 $r = |x|$.

第三章 有限元解

在一維區間 Ω 上用 $n+1$ 個點等分成 n 份,

$$X_h = \{x_j = \frac{j}{n},\ j = 0, 1, \cdots, n\} \subset [0, 1] \tag{3,1}$$

每一等份的寬度 $h = 1/n$, $[x_{j-1}, x_j]$ 則稱爲一個元素, x_i 稱爲節點. 令基底函數 $\phi_i \in H^1(0,1)$, $i = 0, 1, \cdots, n$, 是階數小於等於 p 的多項式, 有限元子空間 $S_h^p(\Omega)$=span$\{\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_n\} \subset H^1(\Omega)$, 令

$$V_h^p := \{v \in S_h^p(0,1),\ v(0) = 0\}.$$

對 $u \in V_h^p$, 如果所有的 $v \in V_h^p$ 使得 $B(u,v) = F(v)$, 則 u 稱爲有限元解, 定義在 V_h^p 上的函數稱爲網格函數(mesh function), 和網格寬度 h 有關, 對於在 X_h 上 $u = u_h$, 我們定義左右微分

$$d^i u := \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_i}; \quad D^i u := \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1}}.$$

在網格函數的線性空間中, 定義內積

$$(f_h, g_h)_h := h \sum_{j=1}^{n} f_j \bar{g}_j,$$

離散化的 L^2-norm 我們表示成 $||\cdot||$, 而離散化的 H^1-seminorm 是

$$|u_h|_1^2 := h \sum_{i=1}^{n} |d^i u_h|^2.$$

第一節 離散數值解

我們用標準的 Galerkin 有限元素法在均勻的網格上, 用 p 階的基底求解方程 (2.8) 式, 會得到一組離散的線性方程

$$[L_h]\{u_h\} = \{R_h\}. \tag{3.2}$$

L_h 是一個複數的 $n \times n$ 矩陣

$$[L_h] = \begin{bmatrix} 2S_p(K) & T_p(K) & & & \\ T_p(K) & 2S_p(K) & T_p(K) & & \\ & & \ddots & & \\ & & T_p(K) & 2S_p(K) & T_p(K) \\ & & & T_p(K) & S_p(K) - iK \end{bmatrix},$$

$K = hk = wh/c$ 是標準化後的頻率(normalized frequency). $S_p(K)$ 和 $T_p(K)$ 是 K 的實值有理(rational)多項式函數, $\{u_h\}$ 是有限元素解 u_{fe} 在節點上的值所形成的向量, $\{R_h\} = \{h(f, \phi_i)\} = \{r_i\}$, $\phi_i \in S_h^p(\Omega)$ 是基底函數.

在 (2.8) 式中的齊次解(homogeneous solution)是

$$F_h = \{e^{-ik'x},\ e^{ik'x} |\ x \in \{\frac{j}{n} : j = 0, 1, \cdots, n\}\}, \tag{3.3}$$

k' 是離散後的波係數, 我們考慮在方程內部 $x_j = j/n$, $0 < j < n$ 的解

$$T_p(K)e^{ik'(j-1)h} + 2S_p(K)e^{ik'jh} + T_p(K)e^{ik'(j+1)h} = 0, \tag{3.4}$$

令 $\lambda = e^{ik'h}$, 得出

$$T_p(K)\lambda^2 + 2S_p(K)\lambda + T_p(K) = 0,$$

那麼

$$\lambda_\pm = -\frac{S_p(K)}{T_p(K)} \pm \sqrt{\frac{S_p^2(K)}{T_p^2(K)} - 1} = \begin{cases} (*)\text{複數}, & \text{if } |\frac{S_p(K)}{T_p(K)}| < 1, \\ (**)\text{實數}, & \text{if } |\frac{S_p(K)}{T_p(K)}| \geq 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

由 λ 可推出 k' 在 $(*)$ 中是實數, 在 $(**)$ 中是純虛數, 物理意義上, $(*)$ 描述了前進波, $(**)$ 代表衰退波. 考慮前進波 $(*)$ 的情況得到

$$\cos k'h = -\frac{S_p(K)}{T_p(K)}, \tag{3.6}$$

相對於真實的波方程, (3.6) 式表現了數值解的兩個散射特性 cutoff frequency 和 phase lead.

(i) Cutoff frequency K_0: $|\cos(k'h)| = |S_p(K_0)/T_p(K_0)| = 1$, 如果真實解是前進波, 那數值解只有在 K 小於 K_0 時是表示前進波, 而由 (3.9) 式可看出 K_0 隨著 p 而增加, 就

是基底階數越高, 所須的有限元素越少, 在同樣的有限元素數目時, 如果 p 階的離散波係數是複數, 那麼在 $p-1$ 階也是複數.

(ii) 數値解的導引相位(phase lead): 在 p=1 時, $S_1(K)=1-k^2/3$, $T_1(K)=-1-k^2/6$, 代入 (3.6) 做 Taylor 展開式

$$\begin{aligned} k'h =& \arccos\left(-\frac{S_1(K)}{T_1(K)}\right) \\ =& hk - \frac{k^3h^3}{24} + \frac{3(hk)^5}{640} + O((hk)^7). \end{aligned}$$

對固定的 k

$$k - k' = k\,O(k^2h^2), \tag{3.7}$$

由 F_h, 有離散的 Green 函數

$$G(x,s) = \frac{1}{\sin k'h}\begin{cases} \sin k'x(A\sin k's + \cos k's) & 0 \le x \le s, \\ \sin k's(A\sin k'x + \cos k'x) & s \le x \le 1. \end{cases} \tag{3.8}$$

其中

$$A = \frac{t^2\sin k'\cos k' + i\sqrt{144-12t^2}}{12 - t^2\cos^2 k'},$$

對一般的 p 階基底函數, 在 [2] 中有下面定理.

Theorem 3.1 (*Phase difference*) 令 $p \ge 1$, k' 是 (2.8) 式 h-p 有限元素解相對於波係數 k 的離散波係數, 如果 $hk/p < 1$, 則

$$|k-k'| \le kC(p)\left(\frac{hk}{2p}\right)^{2p}, \tag{3.9}$$

其中 $C(p) = C_1(e/4)^{2p}(\pi p)^{-1/2}/4$, C_1 是和 h, k, p 無關的常數, e 是絕對誤差.

從定理 3.1 可以看出, 如果要減少相位差(phase difference), 控制 p 的增加比縮小 h 來的有效. 圖三及圖四是分片線性有限元素解在波係數 $k=10$, 逼近解在實部及虛部的情形, 可以很清楚的看出離散化後所造成的相位差.

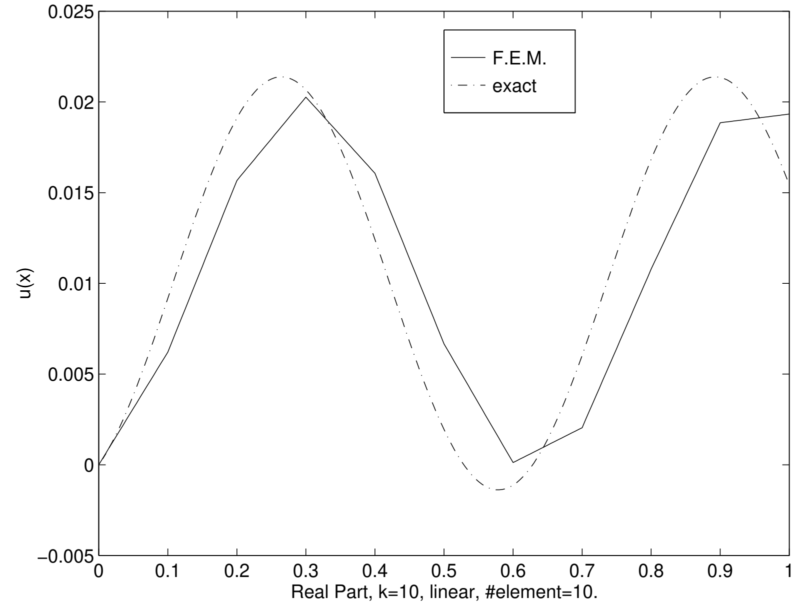


Fig 3.

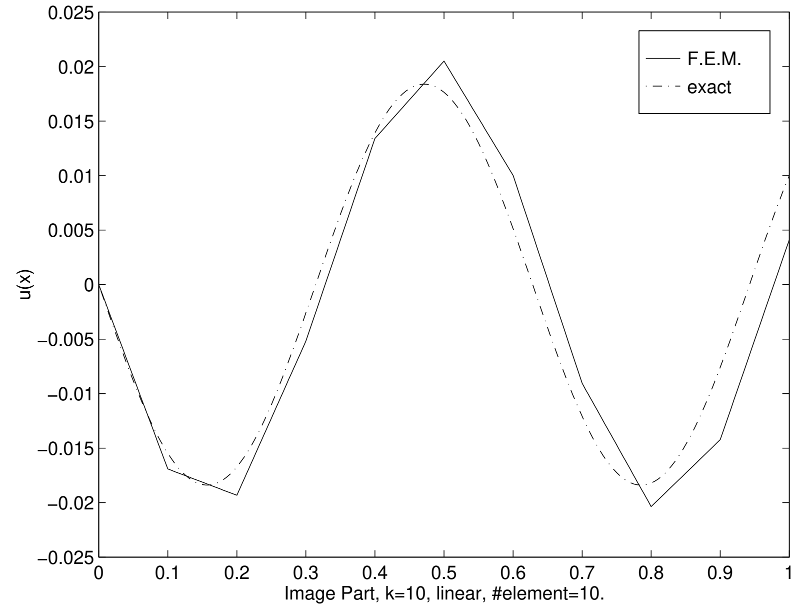


Fig 4.

第二節 有限元解的 H^1-seminorm 誤差估計

在 $V_h^1(\Omega)$ 上的誤差估計

我們已經知道在一維時, 對 $u \in H^1(\Omega)$ 的 H^1-seminorm 最佳分片線性逼近函數是內插函數 u_I.

Lemma 3.1 讓 $u \in H^2(0,1)$, $u_I \in S_h^1(0,1)$ 是 u 的分片線性內插函數, 則

$$\inf_{v \in S_h} ||u - v|| \leq ||u - u_I|| \leq (\frac{h}{\pi})^2 |u|_2,$$
$$\inf_{v \in S_h} |u - v|_1 = |u - u_I|_1 \leq (\frac{h}{\pi}) |u|_2,$$
$$||u - u_I|| \leq (\frac{h}{\pi}) |u - u_I|_1.$$

proof: See e.g., [14, p45].

Theorem 3.2 當 (2.8) 式中的 $f \in L^2(\Omega)$ 時, 若 $u \in H^2(\Omega)$ 是 (2.8) 或 (2.1) 的解, 則

$$|u - u_I|_1 \leq \frac{h}{\pi}(1+k)||f||.$$

proof: 由 Lemma 3.1 和 Lemma 2.1 得証.

在 Douglas [5] 中提到了 Theorem 3.3 的 quasioptimal 誤差估計.

Theorem 3.3 (*Asymptotic estimate on* V_h^1) 對 BVP (2.1) 式. 令 $f \in L^2(0,1)$, $u \in H^2(0,1)$ 是眞解, $u_{fe} \in V_h^1$ 是有限元解, 假設 h 和 k 滿足下述常數中的分母都是正的, 則

$$|u - u_{fe}|_1 \leq C_s \inf_{v \in V_h} |u - v|_1. \tag{3.10}$$

其中

$$C_s := \frac{2(1 + (\frac{hk}{2\pi})^2)^{1/2}}{(\frac{1}{2} - 6C_1^2 k^2 h^2 (1+k)^2)^{1/2}},$$

和

$$C_1 := \frac{2}{(1 - 2(1+k)\frac{k^2h^2}{\pi^2})\pi}.$$

更進一步,

$$|u - u_{fe}|_1 \leq C_s (1+k) h ||f||. \tag{3.11}$$

proof: See [1, Appendix A].

在上面的定理中, 必須要 h^2k^2, h^2k^3 和 h^2k^4 是夠小, C_s 的分母才會是正的. 如果 h 和 k 滿足定理中的假設, 那麼有限元解會以最佳逼近解的速度收斂, 也就是說, 在數值實驗中要 hk^2 夠小才會出現 quasioptimal 的性質.

如果對某個 $\alpha > 0$, $hk^2 < \alpha$, 則 $h \leq \alpha/k^2$, 而且

$$|u - u_{fe}|_1 \leq C(1+k)\frac{1}{k^2}||f||. \tag{3.12}$$

當 k 增大時, 定理中的誤差估計會趨近到 0.

Lemma 3.2 (*Stability on V_h^1*) 令 $u_{fe} \in V_h^1$ 是 (2.8) 式在給定 $f \in L^2(0,1)$ 時的有限元解, 如果 h 夠小, 使得 $hk \leq 1$, 就會存在一個和 h, k 無關的常數 C, 使得

$$|u_{fe}|_1 \leq C||f||. \tag{3.13}$$

proof: 因為 u_{fe} 是分片線性函數,

$$||u'_{fe}||^2 = h\sum_{i=1}^{n}(d^iu_{fe})^2.$$

令 $u_h := u_{fe}|_{X_h}$, 以離散的 Green 函數表達

$$u_i = h\sum_{j=1}^{n}G_{ij}r_j,$$

那麼

$$d^iu = h\sum_{j=1}^{n}d^iG_{ij}r_j,$$

而且

$$|d^iu| \leq ||d^iG|| \cdot ||u||, \tag{3.14}$$

其中 $||d^iG||^2 = h\sum_{j=1}^{n}(d^iG_{\cdot j})^2$, $||r||^2 = h\sum_{j=1}^{n}r_j^2$. 由 $r_j = h(f,\phi_j)$, 存在常數 C_1, 使得

$$||r|| \leq C_1h^2||f||.$$

又 Green 函數的導函數

$$d^iG_{\cdot l} = \frac{1}{h^2\cos(\frac{k'h}{2})}\begin{cases} \cos(\frac{k'h}{2}(2i-1))(A\sin(k's_l)+\cos(k's_l)), & i \le l, \\ \sin(k's_l)\big(A\cos(\frac{k'h}{2}(2i-1))-\sin(\frac{k'h}{2}(2i-1))\big), & i \ge l. \end{cases}$$

由 (3.9) 式及足夠小的 hk (滿足 $hk < 1$) 推得存在 α, 使得 $k'h \le \alpha < \pi$; 也就是 $h^2|d^iG_{\cdot l}|$ 是有界的. 所以存在 C_2 使得

$$|d^iG_{\cdot j}| \le \frac{C_2}{h^2}, \quad \forall\ i, j.$$

因此

$$||d^iG|| \le \frac{C_2}{h^2}, \quad \forall\ i.$$

□

Theorem 3.4 (*Preasymptotic estimate on* V_h^1) 令 $u \in H^2(0,1)$ 是 (2.8) 式在 $f \in L^2(0,1)$ 時的真解, $u_{fe} \in S_h^1(0,1)$ 是 (2.8) 式的有限元解, 如果 $hk \le 1$, 則

$$|u-u_{fe}|_1 \le \Big(\frac{hk}{\pi} + C(\frac{hk}{\pi})^2(1+k)\Big)||f||, \tag{3.15}$$

其中 C 是和 h, k 無關的常數.

proof: 令 $u_I \in V_h^1$ 是 u 的內插函數, 定義 $z \in V_h^1$, $z := u_{fe} - u_I$. 那麼由線性算子 B 及 V_h^1 的正交性

$$\begin{aligned} B(u-u_I, v) =& B(u-u_{fe}, v) + B(u_{fe}-u_I, v) \\ =& B(u_{fe}-u_I, v) = B(z, v), \quad \forall v \in V_h^1. \end{aligned}$$

因爲 $((u-u_I)', v') = (u-u_I)v'|_0^1 - \int_0^1 (u-u_I)v''dx = 0$, 所以

$$B(u-u_I, v) = k^2(u-u_I, v),$$

也就是 z 是 $B(z,v) = k^2(u-u_I, v)$ 的解, 由 Lemma 3.2 可得

$$|z|_1 \le Ck^2||u-u_I||,$$

由三角不等式

$$\begin{aligned}|u-u_{fe}|_1 &\le |u-u_I|_1+|z|_1\\ &\le |u-u_I|_1+Ck^2||u-u_I||. \end{aligned} \tag{3.16}$$

再把 Lemma 3.1 和 Lemma 2.1 代入 (3.16) 式得証.

□

Corollary 1 如果 $hk \le 1$, 則對 $k > 1$,

$$|u-u_{fe}|_1 \le Ck \inf_{v\in S_h} |u-v|_1. \tag{3.17}$$

其中 C 和 h, k 無關.

proof: 由 (3.16) 式

$$|u-u_{fe}|_1 \le (1+C_1k^2h)|u-u_I|_1 \le Ck \inf_{v\in V_h^1} |u-v|_1.$$

□

在 $V_h^p(\Omega)$ 上的誤差估計

在 Babuška [2] 中對 h-p 均勻網格上有以下定理 3.5 至 3.8 的誤差估計.

Theorem 3.5 (*Asymptotic estimate on V_h^p*) 令 $u \in V^{\ell+1}$, $u_{fe} \in V_h^p$ 分別是 (2.8) 式中在均勻 h-p 網格上的眞解和有限元解, 則

$$|u-u_{fe}|_1 \le C_1(p)C_2\left(\frac{h}{2p}\right)^m |u|_{m+1}, \tag{3.18}$$

其中 $C_1(p) = (e/2)^p(\pi p)^{-1/4}$, $m = \min(\ell, p)$, 而且

$$C_2 = \left(\frac{4+(\frac{hk}{2p})^2}{\frac{1}{2}-6k^2(\frac{hk}{p})^2(1+\sqrt{\frac{3}{2}}(\frac{hk}{p})^2)}\right)^{1/2},$$

h, k 必須要滿足 C_2 是正的.

因爲要滿足 C_2 是正的, 所以

$$\frac{hk^2}{p} < c^* = \frac{1}{\sqrt{12}}. \tag{3.19}$$

如果滿足 (3.19), 那 C_2 和 h, k, p 無關, 則 (3.18) 和 k 無關,

$$|u - u_{fe}|_1 \leq C_2 |u - u_I|_1, \qquad (3.20).$$

其中 u_I 是 u 的最佳逼近解, 也就是 (3.18) 式表示了沒有散射的現象. 不過由圖五可看出在比 (3.18) 式中的 h 還粗的網格就已經發生 quasioptimal 收斂了.

對 BVP (2.1) 式給定 $f = -1$, 則有眞解

$$u(x) = \frac{1}{k^2}(1 - e^{ikx} + i \sin(kx) e^{ik}), \tag{3.21}$$

滿足

$$Ak^\ell |u|_1 \leq ||u^{(\ell+1)}|| = |u|_{\ell+1} \leq Bk^\ell |u|_1. \tag{3.22}$$

常數 A, B 只和 u 的振幅有關, 我們稱這樣的解是振盪的(oscillatory). 再把不等式 (3.22) 帶回 (3.18) 式

$$\widetilde{e} := \frac{|e|_1}{|u|_1} \leq C(\frac{hk}{2p})^p,$$

也就是在滿足 (3.19) 式的條件下, H^1-seminorm 的相對誤差是沒有散射的, 而且對固定的 p, 相對誤差 $\widetilde{e} \leq C_p k^{-p}$ 隨著 k 的增加, 以 k^{-p} 的速度遞減.

Theorem 3.6 (*Stability on V_h^p*) 令 $u_{fe} \in V_h^p$ 是 (2.8) 式在 $f \in L^2(\Omega)$ 時的有限元解, 假設 $hk \leq \alpha < \pi$(constant resolution), 則

$$|u_{fe}|_1 \leq C||f||. \tag{3.23}$$

Theorem 3.7 (*Preasympotic estimate on V_h^p*, I) 令 (2.1) 式的眞解 $u \in V^{\ell+1}$, (2.8) 式的有限元解 $u_{fe} \in V_h^p$, 假設 $hk \leq \alpha < \pi$, 則

$$|u - u_{fe}|_1 \leq C_1(p)\left(1 + C_2 k \left(\frac{hk}{2p}\right)\right)\left(\frac{h}{2p}\right)^m |u|_{m+1}, \tag{3.24}$$

其中 $C_1(p)=(e/2)^p(\pi p)^{-1/4}$, $m=\min(\ell,p)$, C_2 是和 h, k, p 無關的常數.

如果 (3.24) 式中的 $k^2h/2p$ 是有界的, 那麼 (3.24) 式就可以化成 (3.18) 式的 asymptotic 估計. 對於振盪解有

$$\widetilde{e}\le C_1(p)\left(\frac{hk}{2p}\right)^m + C_1(p)C_2k\left(\frac{hk}{2p}\right)^{m+1}. \tag{3.25}$$

Definition (*Pollution*) 考慮 k 是參數的 Helmholtz 問題, 在空間 V 中定義 norm 爲 $||\cdot||_V$ 的變分式, 假設眞解 $u\neq 0$, $u\in V$ 存在而且唯一, 有限元解 $u_{fe}\in V_h\subset V$, 並且

$$\widetilde{e}:=\frac{||u-u_{fe}||_V}{||u||_V}\le C(k)\inf_{v\in V_h}\frac{||u-v||}{||u||} \tag{3.26}$$

成立. 如果 C 可被寫成

$$C(k)=C_1+C_2k^\beta\theta^\gamma, \tag{3.27}$$

其中 $\beta>0$, $\gamma\ge 0$, $\theta=hk/p$, 而且 C_1, C_2 和 h, k, p 無關, 那麼有限元解稱爲 polluted, 而且 $C_2k^\beta\theta^\gamma e_{ba}$ 被稱爲 pollution 項.

有 pollution 項表示數值解有散射的現象發生, 如果誤差估計是 non-polluted, 那有限元解就是沒有散射, (3.25) 式右端的第一項包含振幅誤差(amplitude error), 而 pollution 項包含了相位誤差(phase error).

當問題 (2.1) 式中的 $f=-1$, $k=50$, 我們用分片線性函數(p=1)去逼近眞解時, 有誤差估計

$$\widetilde{e}\le C_1(hk)+C_2k(hk)^2, \tag{3.28}$$

其中 C_1, C_2 和 h, k 無關.

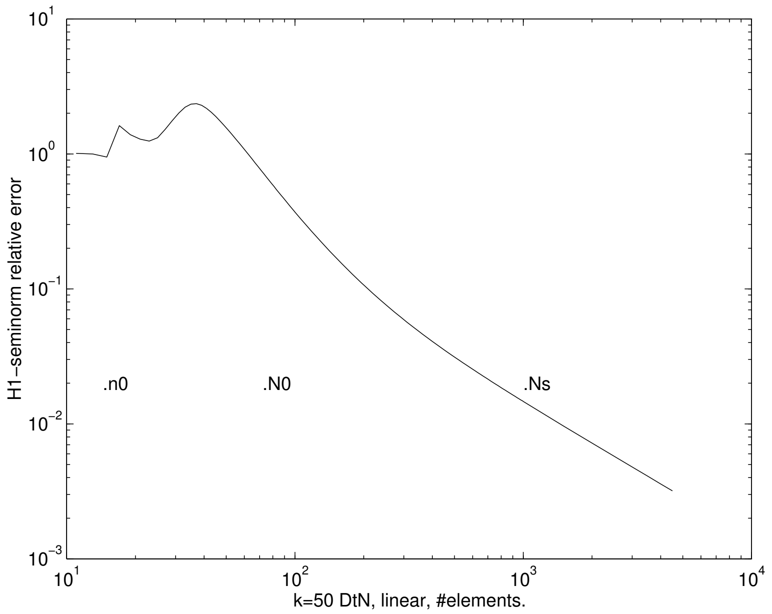


Fig 5.

圖五 (log-log座標) 可分爲四個部分,

(1) $n < n_0$: $k/n_0 = hk = \sqrt{12}$, 在 $n < n_0$ 時的有限元解是衰退(decaying)波.

(2) $n_0 < n \le N_0 = \sqrt{k^3/24}$: 有限元解是前進波, 但誤差以超過 100% 做振盪, 此時誤差估計中的 pollution 項大於振幅誤差, 對 N_0 的估計, 我們假設解 $u = \sin(kx)$, 逼近解 $u_h = u_{fe}|_{X_h} = \sin(k'x_h)$, 振幅的差 $|\sin(kx_h) - \sin(k'x_h)|$ 在 [0,1] 的最大值發生在靠近 1 的地方, 當 $x = 1$ 時,

$$|\sin k - \sin k'| = 2|\cos\frac{k+k'}{2}||\sin\frac{k-k'}{2}|,$$

在 k 夠大時, $||\sin(kx)||_\infty = 1$, 如果 $|\sin\frac{k-k'}{2}| \le 1/2$, 則 L^∞ 的相對誤差小於 1, 也就是在 $k - k' \le \pi/3 \approx 1$ 的時候, 在由 (3.10) 式得出 $k^3h^2/24 \approx k - k' \approx 1$.

(3) $N_0 < n \le N_s$, 在 $n = N_s$ 時, 有限元解沒有散射而且是 quasioptimal 收斂, 由 Theorem 3.5 的限制條件粗略估計得出 $N_s = k^2/c^*$, 在這個區段中, 誤差仍被 pollution 項控制, 但以 superoptimal (比 n^{-1} 快) 的速度收斂. 當我們取 $c^* = 1$ 時, $N_s = 2500$, 但在圖五中所標示的 N_s, 顯示了在比 2500 更少元素時的誤差就已是 optimal 速度收斂, 在 Theorem 3.8 中會找出更精確的 N_s.

(4) $n > N_s$, 有限元解以 optimal (n^{-1})速度穩定收斂.

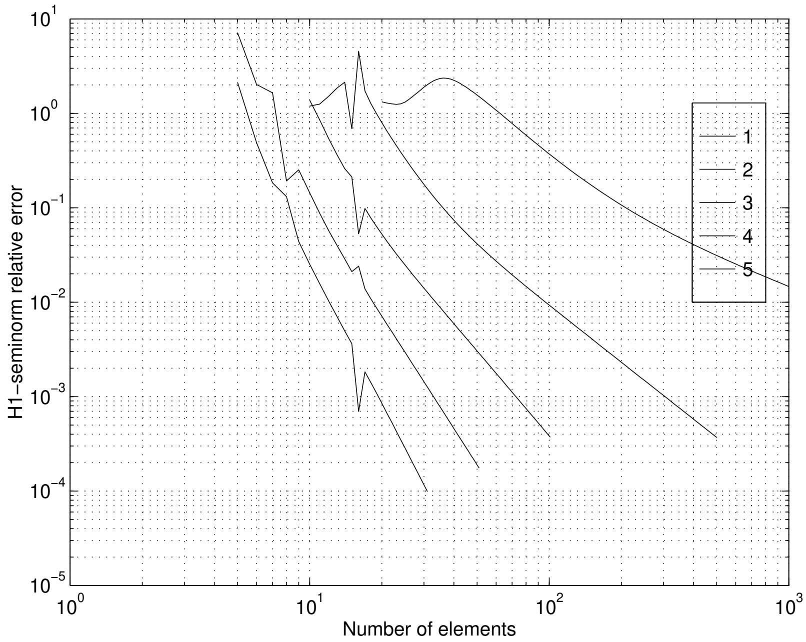


Fig 6.

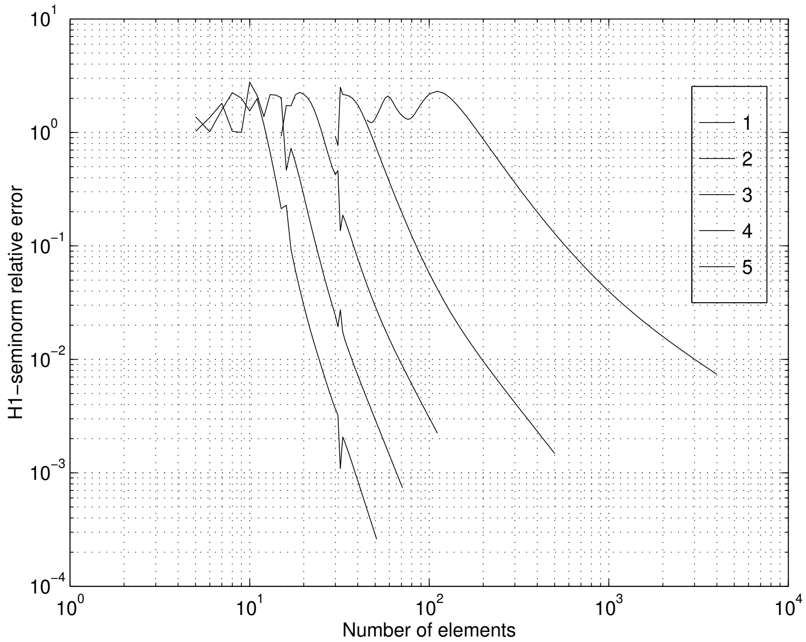


Fig 7.

圖六和圖七是在 $k = 50$ 及 $k = 100$ 時 H^1-seminorm 的有限元相對誤差, 圖中的曲線由右至左分別代表了線性, 二次, 三次, 四次及五次多項式基底, 其中的跳點發生

在 $kh = l\pi$, $l = 1, 2, \cdots$. 此時 $k' = k(1 - l^2\pi^2)$, 帶回 (3.2) 式後會發現, 除了原本 BVP (2.1) 式的有限元解外, 又增加了方程 $u'' + K^2 u = 0$ 的解 $\sin(Kx)$ 或 $\cos(Kx)$, 其中 $K = kl\pi\sqrt{l^2\pi^2 - 2}$, 是不穩定的固有值(eigenvalue)問題.

Theorem 3.8 (*Preasymptoric estimate on* V_h^p, II) 假設 (2.1) 式中的 $f \in H^{\ell-1}(\Omega)$ 使得真解 $u \in V^{\ell+1}$ 是振盪解, $u_{fe} \in V_h^p$ 是 (2.8) 式的有限元解, $hk \leq \alpha < \pi$, 則 H^1-seminorm 的相對誤差

$$\widetilde{e} \leq C_1(p)\left(\left(\frac{hk}{2p}\right)^m + C_1(p)C_2 k\left(\frac{hk}{2p}\right)^{p+m}\right), \tag{3.29}$$

其中 $m = \min(\ell, p)$, $C_1(p)$ 和 Theorem 3.7 的定義一樣.

在定理 3.8 中, (i) 若 $\ell \geq p$ 則

$$\tilde{e} \leq C_1\left[1 + C_1 C_2 k(\frac{hk}{2p})^p\right](\frac{hk}{2p})^p, \tag{3.30}$$

此時 pollution 項和位相差同級, 如果誤差 $\tilde{e}$ 是在 quasioptimal 區間, 則

$$k(\frac{hk}{2p})^p \leq c^*, \tag{3.31}$$

其中 c^* 要夠小, 這裡找出來的 h 比 (3.19) 式明顯有更大的 quasioptimal 區間.

(ii) 若 $\ell < p$, 則

$$\tilde{e} \leq C_1\left[1 + C_1 C_2 k(\frac{hk}{2p})^p\right]\left(\frac{hk}{2p}\right)^m, \tag{3.32}$$

此時 pollution 項比相位差小, 並不是造成誤差的主要原因.

第三節 L^2-norm 的誤差估計

在二維時, Bayliss [19] 說令 p 是有限元基底的階數, $m = p + 1$, 如果 hk^2 夠小, 則

$$||u - u_{fe}|| \leq C_m h^m(1 + k^{m+1})||u||, \tag{3.33}$$

其中 C_m 只和 m 有關.

Theorem 3.9 令 u, u_{fe} 是 (2.8) 式的眞解和分片線性有限元解, 假設 $hk < 1$, $f \in L^2(\Omega)$, 則

$$||u - u_{fe}|| \leq (1 + Ck)(\frac{h}{\pi})^2 |u|_2. \tag{3.34}$$

proof: 和定理 3.4 的証法相似, 令 u_I 是 u 的內插函數, $z = u_I - u_{fe}$, 則

$$||u - u_{fe}|| \leq ||u - u_I|| + ||z||,$$

對所有的 $v \in V_h^1$,

$$B(z, v) = k^2(u - u_I, v).$$

由離散的 Green 函數可以推出

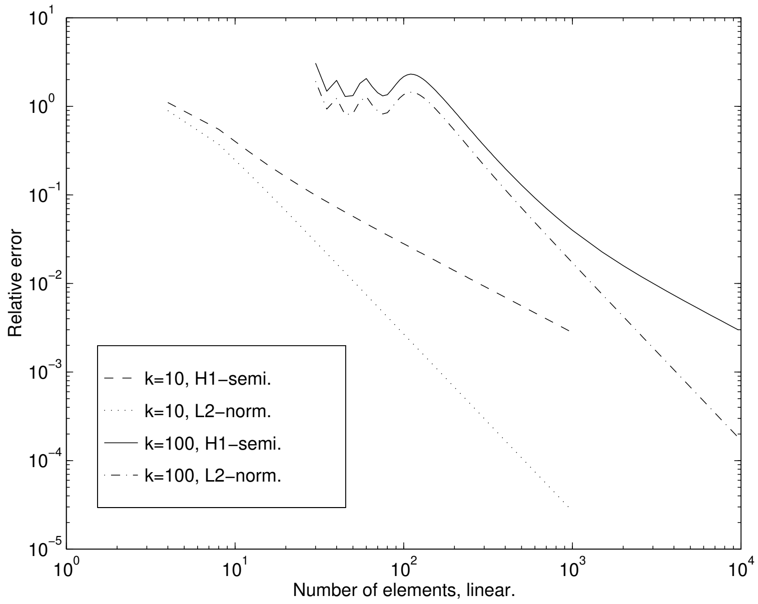
$$||z|| \leq Ck||u - u_I||,$$

其中 C 和 h, k 無關. 所以

$$||u - u_{fe}|| \leq (1 + Ck)||u - u_I|| \leq (1 + Ck)(\frac{h}{\pi})^2 |u|_2.$$

□

從圖八可看出 H^1-seminorm 和 L^2-norm 一開始都有類似的上下振盪發生, 開始收斂後, H^1-seminorm 會趨向穩定的 n^{-1} 速度收斂, L^2-norm 則以固定的 n^{-2} 速度收斂, 和 H^1-seminorm 不同的是, L^2-norm 在收斂區間的收斂常數和 k 有關, 而且離散解的散射性不能被忽視.



Relative error
Number of elements, linear.
k=10, H1−semi.
k=10, L2−norm.
k=100, H1−semi.
k=100, L2−norm.

Fig 8.

第四章 Wavelet - Galerkin 方法

第一節 從 Fourier 分析到 Wavelet 分析

首先定義

$$L^2(0,2\pi) = \{f: \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty,\ f(x) = f(x-2\pi),\ \forall x \in R\}.$$

對任意的 $f \in L^2(0,2\pi)$, 有 Fourier 展開式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{4.1}$$

其中 f 的 Fourier 係數是

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

(4.1) 式會在 $L^2(0,2\pi)$ 中收斂, 而且 $w_n(x) = e^{inx}$, $n \in Z$ 是 $L^2(0,2\pi)$ 中的正則 (orthonormal) 基底, 也是一個正弦 (sinusoidal) 波. 由 $\{w_n(x)\}$ 的正則性, (4.1) 式滿足 *Parseval* 等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2, \tag{4.2}$$

$w_n(x)$ 的頻率隨著 $|n|$ 的大小而改變, 因此 (4.1) 式表示了在 $L^2(0,2\pi)$ 中的函數, 可由各種不同頻率的波函數組成.

接著定義

$$L^2(R) = \{f: \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty\}.$$

對於屬於 $L^2(R)$ 中的函數, 在 x 等於 $\pm\infty$ 處必須遞減到 0, 因此正弦波函數 w_n 並不屬於 $L^2(R)$. 但我們有遞減速度很快的凌波函數(wavelet)可以展成 $L^2(R)$.

考慮正則凌波函數, Ingrid Daubechies 定義了古典的有限涵蓋凌波函數. 令 $c_k = 0$, $k \notin \{0,1,\cdots,2p-1\}$. 滿足

$$(1) \sum_k c_k = 2 \tag{4.3a}$$

$$(2) \sum_k (-1)^k k^m c_k = 0, \quad 0 \le m \le p-1, \quad (0^0 := 1), \tag{4.3b}$$

$$(3) \sum_k c_k c_{k-2m} = 2\delta_{0,m}. \tag{4.3c}$$

其中 p 是一個正整數, 也稱作 Daubechies 凌波函數的階數. 對每個 $p \ge 1$, 有 $2p$ 個非零的 c_k 解. 在 $p=2$ 時,

$$c_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4},\ c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4},\ c_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4},\ c_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}.$$

令自格函數

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x-k), \tag{4.4}$$

是有限涵蓋的而且 supp $\phi(x) = [0, 2p-1]$.

Definition (多重解分析): 令 V_j 是一族 $L^2(R)$ 的子空間, 滿足

$$(1) \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots,$$

$$(2) \cup_{j=-\infty}^{\infty} V_j \text{在 } L^2(R) \text{ 中稠密},$$

$$(3) \cap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\},$$

$$(4) f(x) \in V_j \Longleftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}.$$

令 $\phi(x)$ 是屬於 $L^1(R) \cap L^2(R)$ 的自格函數, 定義

$$\phi_{j,k}(x) = \sqrt{2^j}\phi(2^j x - k), \quad j, k \in Z,$$

$$V_j = \text{span}\{\phi_{j,k}(x) : \ k \in Z\}.$$

如果 $\hat{\phi}(0) = 1$, 而且 $\{\phi_{jk}\}$ 是 V_j 的 Riesz 基底, 則由 [9] 的 proposition 5.31 和 proposition 5.32, 數列 V_j 自動滿足多重解分析.

相對於自格函數 $\phi(x)$, 令 $d_k = (-1)^k c_{1-k}$, 稱

$$\psi(x) = \sum_k d_k \phi(2x-k), \tag{4.5}$$

是一個凌波函數. 明顯的, $\psi(x) \in V_1$, 並且

$$\langle \psi(x-k), \psi(x-l) \rangle = \delta_{k,l},$$

$$\langle \psi(x-k), \phi(x-l) \rangle = 0.$$

定義

$$\psi_{j,k}(x) = \sqrt{2^j}\psi(2^j x - k), \quad j,k \in Z,$$

$$W_j = \text{span}\{\psi_{j,k}(x):\ k \in Z\}.$$

則 $\{\psi_{jk}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 形成一組正則集合, 而且

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}.$$

也就是

$$L^2(R) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j = \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots.$$

圖九及圖十是 Daubechies 在 $p=2$ 的正則自格及凌波函數.

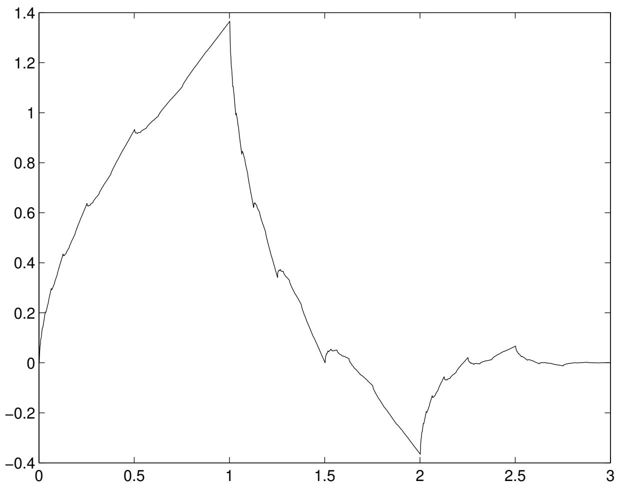


Fig 9. ϕ_2

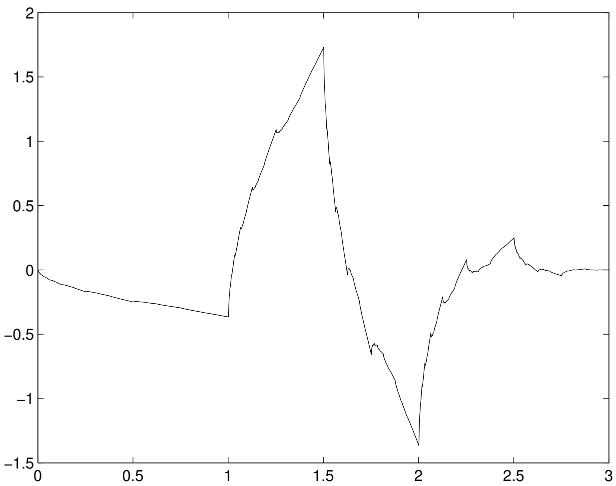


Fig 10. ψ_2

對 $f \in L^2(R)$, 有 Wavelet 展開式

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}\psi_{j,k}(x), \tag{4.6}$$

其中 $c_{j,k} = < f, \psi_{j,k} >$, 換句話說, 如果我們在 $L^2(R)$ 中定義

$$\big(W_\psi f\big)(b,a) := |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\psi(\frac{x-b}{a})}dx, \quad f \in L^2(R), \tag{4.7}$$

則

$$c_{j,k} = \big(W_\psi f\big)(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}). \tag{4.8}$$

同樣的對於 $f \in L^2(R)$, 有 Fourier 轉換

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx. \tag{4.9}$$

(4.9) 式不僅表現了頻率, 也決定了表現頻率所需要的時間定義域. 信號的頻率和周期的長度成正比, 也就是越小的時間定義域才能精確的表現越高頻的信號, 越大的時間定義域才能完整顯示越低頻的函數. 但從 (4.9) 式中可發現, 不論是對低頻或是高頻的信號, Fourier 轉換所需要的時間域都是 $[-\infty, \infty]$. 從 (4.8) 式可以看出有限涵蓋的凌波函數避免了上述的缺點.

以下討論凌波函數的分解及重建, 對正則凌波函數, 因爲 $V_1 = V_0 \oplus W_0$, $\phi(2x) \in V_1$,

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x - k), \tag{4.10}$$

$$\psi(x) = \sum_k d_k \phi(2x - k), \tag{4.11}$$

所以存在 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 兩個序列, 使得

$$\phi(2x) = \sum_k a_{-2k} \phi(x - k) + b_{-2k} \psi(x - k),$$

並且

$$\phi(2x - \ell) = \sum_k a_{\ell-2k} \phi(x - k) + b_{\ell-2k} \psi(x - k), \quad \ell \in Z. \tag{4.12}$$

這就是 ϕ 及 ψ 唯一被決定的凌波分解及合成關係式.

考慮 $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$, 令 f 在 $V_{j=N}$ 的投影 $f_N \in V_N$, 則

$$f_N = f_{N-1} + g_{N-1},$$

其中 $f_{N-1} \in V_{N-1}$, $g_{N-1} \in W_{N-1}$, 而且有唯一的級數展開式

$$f_j(x) = \sum_k p_k^j \phi(2^j x - k), \tag{4.13}$$

和

$$g_j(x) = \sum_k q_k^j \psi(2^j x - k), \tag{4.14}$$

這裡 $\{p_k^j\}$ 及 $\{q_k^j\}$ 分別都是平方和小於無限大的序列, 再繼續推導可得

$$f_N = g_{N-1} + g_{N-2} + \cdots g_{N-M} + f_{N-M},$$

由 (4.12)–(4.14) 式可得出分解演算法:

$$p_k^{j-1} = \sum_\ell a_{\ell-2k} p_\ell^j, \quad q_k^{j-1} = \sum_\ell b_{\ell-2k} p_\ell^j. \tag{4.15}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & q^{N-1} & & q^{N-2} & & & & q^{N-M} \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ p^N & \rightarrow & p^{N-1} & \rightarrow & p^{N-2} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & p^{N-M} \end{array}$$

再由 (4.10), (4.11), (4.13) 及 (4.14) 式可得出重建演算法:

$$p_k^j = \sum_\ell c_{k-2\ell} p_\ell^{j-1} + d_{k-2\ell} q_\ell^{j-1}. \tag{4.16}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} q^{N-M} & & q^{N-M+1} & & & & q^{N-1} & & \\ & \searrow & & \searrow & & & & \searrow & \\ p^{N-M} & \rightarrow & p^{N-M+1} & \rightarrow & \cdots & & p^{N-1} & \rightarrow & p^N \end{array}$$

第二節 正則凌波函數的一些性質

對 $\phi(x)$ 做 Fourier 轉換,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-iwx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\sum_n c_n \phi(2x-n)) e^{-iwx} dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_n c_n \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-iw\frac{x+n}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_n c_n e^{-i\frac{w}{2}n} \hat{\phi}(\frac{w}{2}), \end{aligned}$$

令特徵函數 $M_0^{\phi}(w) = \frac{1}{2}\sum_n c_n e^{-iwn}$ 是一個週期爲 2π 的函數, 則

$$\hat{\phi}(w) = M_0^{\phi}(\frac{w}{2})\hat{\phi}(\frac{w}{2}). \tag{4.17}$$

同樣的對 $\psi(x)$ 做 Fourier 轉換, 得到

$$\hat{\psi}(w) = M_1^{\phi}(\frac{w}{2})\hat{\phi}(\frac{w}{2}). \tag{4.18}$$

其中 $M_1^{\phi}(w) = \frac{1}{2}\sum_n d_n e^{-iwn}$, 爲了簡便, 分別以 $M_0(w)$ 及 $M_1(w)$ 來代替 $M_0^{\phi}(w)$ 及 $M_1^{\phi}(w)$. 由 (4.3b) 式可推得 $M_1^{(m)}(0) = 0$, $m = 0, \cdots, p-1$, 帶回 (4.18) 式

$$\hat{\psi}^{(m)}(0) = 0, \qquad m = 0, 1, \cdots, p-1,$$

也就是

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi(x) dx = 0, \quad m = 0, 1, \cdots, p-1. \tag{4.19}$$

所以 $\sum_{k\in Z} k^m \phi(x-k)$, 可以展開成首項是 1 的 m 階的多項式, 其中的 $m = 0, 1, \cdots, p-1$.

由 $\phi(x)$ 是正則函數,

$$\begin{aligned}
\delta_{0,k} &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\overline{\phi(x-k)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\overline{\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(x) e^{iw(x-k)} dw\Big)} dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{\phi}(w) e^{-iwk}} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-iwx} dx\Big) dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(w)|^2 e^{ikw} dw \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n\in Z} |\hat{\phi}(w+2n\pi)|^2 e^{ikw} dw,
\end{aligned}$$

由 *Parseval* 等式,

$$\sum_{n\in Z} |\hat{\phi}(w+2n\pi)|^2 = 1, \quad a.e. \tag{4.20}$$

又 $\hat{\phi}(0) = \int \phi = 1$, 也就是

$$\hat{\phi}(2n\pi) = 0, \quad \forall\ k \in Z,\ k \neq 0. \tag{4.21}$$

更進一步,

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{n\in Z} |\hat{\phi}(2w+2n\pi)|^2 \\
&= \sum_{n\in Z} |M_0(w+n\pi)|^2 |\hat{\phi}(w+n\pi)|^2 \\
&= \sum_{n\in Z} |M_0(w+2n\pi+\pi)|^2 |\hat{\phi}(w+2n\pi+\pi)|^2 \\
&\quad + \sum_{n\in Z} |M_0(w+2n\pi)|^2 |\hat{\phi}(w+2n\pi)|^2 \\
&= |M_0(w+\pi)|^2 \sum_{n\in Z} |\hat{\phi}(w+2n\pi+\pi)|^2 \\
&\quad + |M_0(w)|^2 \sum_{n\in Z} |\hat{\phi}(w+2n\pi)|^2,
\end{aligned}
$$

所以

$$
|M_0(w)|^2 + |M_0(w+\pi)|^2 = 1, \tag{4.22}
$$

而且

$$
|M_0(w)|^2 + |M_1(w)|^2 = 1. \tag{4.23}
$$

因爲 $\phi(x)$ 是有限函蓋, supp $\phi(x) = [0, 2p-1]$. 令 $g(x) = \sum_{k\in Z} \phi(x-k)$, 當 $x \in [0,1]$ 時, 只有有限個非零項組合成 $g(x)$, 也就是 $x-k$ 落在 $[0,2p-1]$ 的那些項, 而且 $g(x) \in L^1[0,1] \cap L^2[0,1]$, 又 $\{e^{i2n\pi x}\}_{n\in Z}$ 是 $L^1[0,1] \cap L^2[0,1]$ 的正則基底, 因此

$$
g(x) = \sum_n a_n e^{i2n\pi x},
$$

其中

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 g(x)\overline{e^{i2n\pi x}}dx \\
&= \int_0^1 \sum_{k\in Z} \phi(x-k) e^{-i2n\pi x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-k) e^{-i2n\pi x} dx \\
&= e^{-i2n\pi k}\hat{\phi}(2n\pi) \;\; = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0, \\ 0 & \text{if } n \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

換句話説,

$$
g(x) = \sum_{k\in Z} \phi(x-k) = 1, \quad a.e. \qquad x \in [0,1]. \tag{4.24}
$$

考慮積分

$$H_k=\int_{-\infty}^{\infty}\phi'(x)\phi'(x-k)dx, \tag{4.25}$$

因爲 $\phi(x)$ 的涵蓋是 $[0,2p-1]$, 就是當 $k\geq 2p-1$, $k\leq 1-2p$ 時, $H_k=0$. 在 $2-2p\leq k\leq 2p-2$ 時,

$$\begin{aligned}H_k&=\int_{-\infty}^{\infty}\big(\sum_n 2c_n\phi'(2x-n)\big)\big(\sum_l 2c_l\phi'(2x-2k-l)\big)dx\\&=2\sum_{n,l}c_nc_lH_{2k+l-n}.\end{aligned} \tag{4.26}$$

此線性系統可寫成

$$Ax=\frac{1}{2}x, \tag{4.27}$$

其中 $x=(H_{2-2p},\cdots,H_{2p-2})^T$, $A=[a_{ij}]$, $a_{ij}=\sum_n c_nc_{n+j-2k}$, $2-2p\leq j\ ,k\leq 2p-2$. H_k 就是 (4.27) 式中對應固有值是 $1/2$ 固有向量的常數倍數. 令 $\sum_k k^2\phi(x-k)=x^2+ax+b$, a 和 b 是常數, 由分部積分

$$\begin{aligned}1=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dx\quad&=\quad\int_{-\infty}^{\infty}(x)'\phi(x)dx\\&=-\int_{-\infty}^{\infty}x\phi'(x)dx\\&=-\int_{-\infty}^{\infty}(x+\frac{a}{2})\phi'(x)dx\\&=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+ax+b)'\phi'(x)dx\\&=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[\sum_k k^2\phi(x-k)]'\phi'(x)dx\\&=-\frac{1}{2}\sum_k k^2\int_{-\infty}^{\infty}\phi'(x)\phi'(x-k)dx,\end{aligned}$$

所以有

$$\sum_k k^2H_k=-2, \tag{4.28}$$

因此, 可以正確的求出 H_k 的值.

接著考慮 $\phi(n)$ 及 $\phi'(n)$, $n=0,1,\cdots,2p-2$. 由

$$\phi(x)=\sum_k c_k\phi(2x-k),$$
$$\phi'(x)=\sum_k 2c_k\phi'(2x-k).$$

可寫成

$$Bx=\lambda x, \tag{4.29}$$

其中 $B=[b_{ij}]$, $b_{ij}=c_{2i-j-1}$, 而且 c_k 滿足 (4.3b) 式, 當 $p\geq 3$ 時, ϕ 至少是一次可微的函數, 由上三式可推得矩陣 B 至少會有固有值 $\lambda=1,\ 1/2$, 而 $\phi(n)$ 及 $\phi'(n)$ 分別是對應 $\lambda=1$ 及 $\lambda=1/2$ 固有向量的常數倍數. 因爲 $\sum_{k\in Z}\phi(x-k)=1$, $x\in R$, 所以有 $\sum_{n=0}^{2p-1}\phi(n)=1$, 而且 $\sum_{k\in Z}k\phi(x-k)=x+c$, c 是常數, 因此有 $\sum_{n=0}^{2p-1}k\phi'(n)=1$.

第三節 Helmholtz 方程週期解

我們將以凌波函數爲基底, 使用 Galerkin 方法來求解 Helmholtz 方程, 首先考慮方程

$$u''+k^2u=0,\quad x\in[0,1], \tag{4.30a}$$

$$u(0)=u(1),\ u'(0)=u'(1). \tag{4.30b}$$

其中 $k=2n\pi,\ n\in N$, 則 $u=a\cos(kx)+b\sin(kx),\ \ a,\ b\in C$, 均是 (4.30) 式的解, 因此再加入

$$\int_0^1 xudx=-\frac{1}{k}, \tag{4.30c}$$
$$\int_0^1 xu'dx=0, \tag{4.30d}$$

可以確保有唯一解 $u=\sin(kx)$.

對於 (4.30) 式, 考慮變分(variational)問題. 求解 $u\in H^1$, $u(0)=u(1)$, 使得

$$\begin{aligned}B(u,v)=&\int_0^1(u'(x)\bar{v}'(x)-k^2u(x)\bar{v}(x))dx\\ B(u,v)=&0,\qquad \forall v\in H^1,\ v(0)=v(1).\end{aligned} \tag{4.31}$$

Wavelet Galerkin method

我們選用 $p=3$ 在第 j 層的 Daubechies 正則自格函數 $\{\phi_{jk}\}_{k\in N}$ 爲基底. 令 $u_h=\sum_{i=1}^{m}u_i\phi_{ji}$, 其中 $m=2^j$, 而且 ϕ_{ji} 在區間 [0,1] 做循環. 這裡積分範圍雖然只有在 [0,1] 區間, 但因爲是循環, 所以仍可以用 (4.27) 式的方法求出. 由 (4.31) 式得出

$$[L](u)=(r), \tag{4.32}$$

其中 L 是一個 $m\times m$ 的實數對角矩陣, u 是由 u_i 形成的向量, r 是 $m\times 1$ 的零向量. 再把 (4.30c) 及 (4.30d) 離散化後分別取代 L 及 r 的最後兩列後, 求出 u.

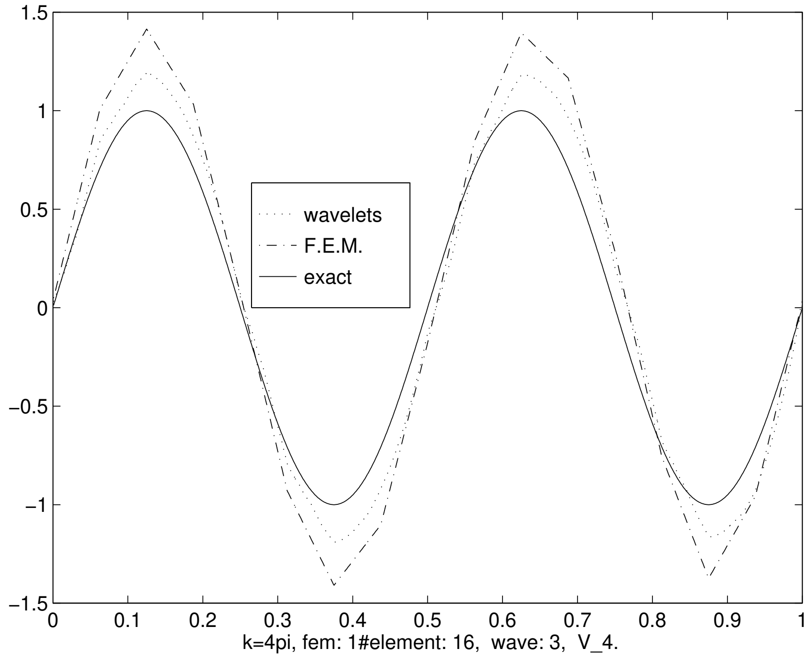


Fig 11.

接著我們由實驗數據, 來比較 Waavelet-Galerkin 方法及標準 Galerkin 方法的差別, 並討論誤差估計. 以下圖形中的橫座標是節點數, 縱座標是相對誤差, 若節點數等於 m, 則 L 是一個 $m\times m$ 的矩陣.

圖十一是在 $k=4\pi$, 凌波函數 $p=3$, 在 V_4, 有限元分片線性基底在 16 個元素時的逼近解, 仍然可以看的出相位差的存在, 如果替換了不同的限制條件((4.30c) 和 (4.30d)), 則有不同程度的相位差.

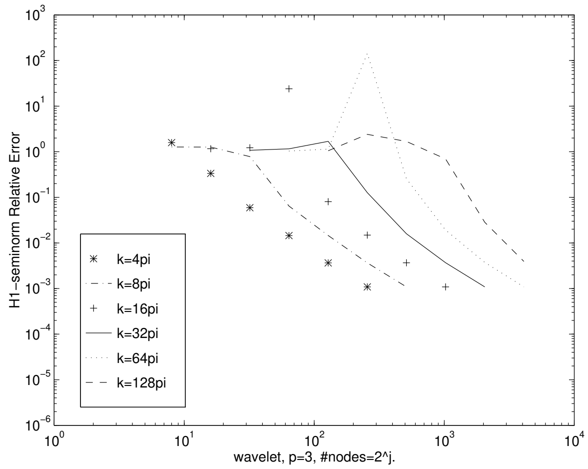


Fig 12.

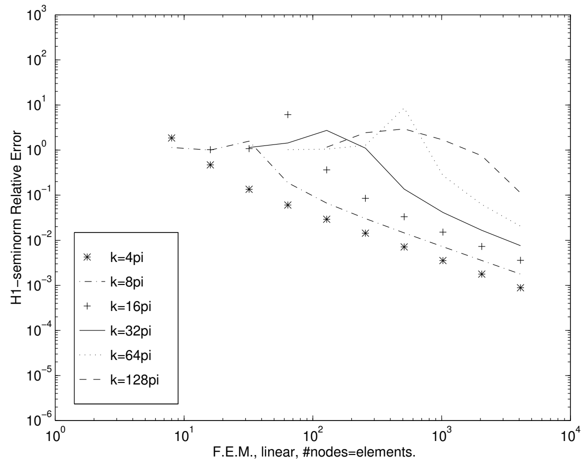


Fig 13.

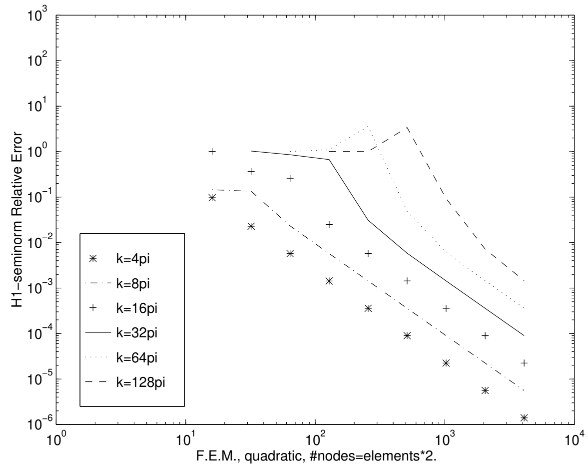


Fig 14.

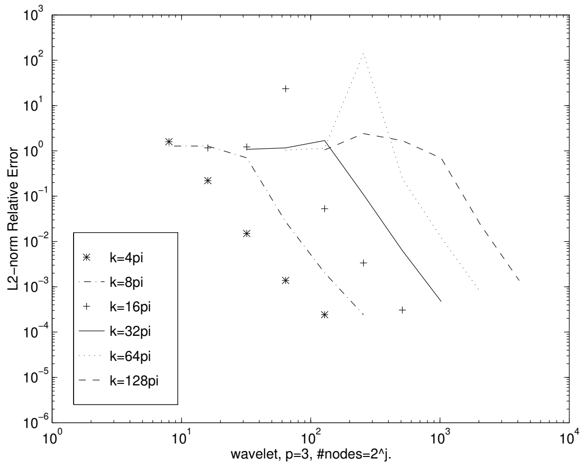


Fig 15.

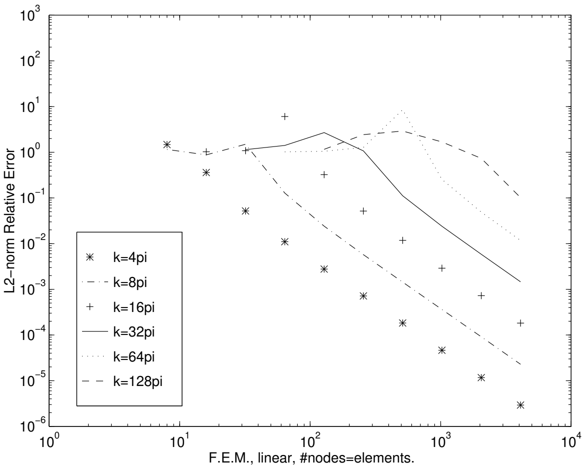


Fig 16.

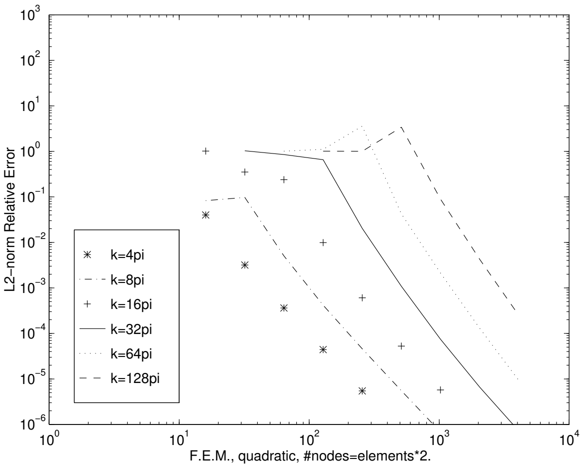


Fig 17.

圖十二, 圖十三和圖十四是凌波函數 $p = 3$, 有限元線性和二階基底, 分別對不同波係數 k 的 H_1-seminorm 相對誤差, 凌波函數 ($p = 3$)的收斂速度介於有限元一階和二階基底之間, 也呈現了 superoptimal 和 optimal 兩段區間.

圖十五, 圖十六和圖十七則是凌波函數 $p = 3$, 有限元線性及二階對不同 k 的 L_2-norm 相對誤差, 這裡凌波函數的收斂速度幾乎要和有限元二階基底一樣快了.

Boundary Condition

再回到問題 (2.1) 式, 令 $f = 1$, $u(0) = u(1) = 0$, $u'(0) = u'(1) = 0$, $k = 2n\pi$, $n \in N$. 有 Green 函數

$$G(x,s) = \frac{1}{k}\begin{cases} -\cos(ks)\sin(kx) & 0 \le x \le s, \\ \sin(ks)\cos(kx) & s \le x \le 1. \end{cases} \tag{4.33}$$

真解 $u = (1-\cos(kx))/k^2$, 而且滿足 Robin 邊界條件. 再 (4.32) 式得出 L 及 r 後, 由 (4.29) 式求得 $\phi(n)$, $\phi'(n)$, $n = 0, 1, \cdots, 2p-2$. 令 $r = 2p-3$, $m = 2^j$, 則

$$u(1) = \sum_{i=m-r}^{m} u_i\phi_i(1),$$
$$u'(1) = \sum_{i=m-r}^{m} u_i\phi_i'(1).$$

把未知的 u_{m-1} 及 u_m 移至左項, 整理後得出關係式

$$u_{m-1} = \sum_{i=m-r}^{m-2} A_i u_i + C, \tag{4.34}$$
$$u_m = \sum_{i=m-r}^{m-2} B_i u_i + D. \tag{4.35}$$

其中 A_i 及 B_i 是對應於 u_i 的常數係數, $i = m-4, \cdots, m-2$. 再帶回 (4.32) 式

$$\begin{pmatrix} & & \\ & L & \\ & & \end{pmatrix}_{m\times m} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{m-r} \\ \vdots \\ u_{m-2} \\ \sum_{i=m-r}^{m-2} A_i u_i + C \\ \sum_{i=m-r}^{m-2} B_i u_i + D \end{pmatrix}_{m\times 1} = \begin{pmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{pmatrix}_{m\times 1},$$

相當於

$$
\begin{pmatrix} & \hat{L} & \end{pmatrix}_{m\times(m-2)} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{m-2} \end{pmatrix}_{(m-2)\times 1} = \begin{pmatrix} \hat{r} \end{pmatrix}_{m\times 1},
$$

其中 $\hat{L}_i = L_i + A_i L_{m-1} + B_i L_m$, $i = m-r, \cdots, m-2$, L_i 是矩陣 L 的第 i 行向量, $\hat{r} = -Lr'$, $r' = [0, \cdots, 0, C, D]^T_{1\times m}$. 此時我們有 m 方程去求解 $m-2$ 個未知的 u_i, 因此選取 $\hat{L}$ 中的 $m-2$ 個列向量及對應 $\hat{r}$ 中的 $m-2$ 個元素, 得出

$$
\begin{pmatrix} & \tilde{L} & \end{pmatrix}_{(m-2)\times(m-2)} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{m-2} \end{pmatrix}_{(m-2)\times 1} = \begin{pmatrix} \tilde{r} \end{pmatrix}_{(m-2)\times 1}.
$$

在使用一般的有限元基底時, 我們明確的知道 $u(0)$ 及 $u'(1)$ 在節點上的值 (Dirichlet to Neumann 邊界問題), 但是由 (4.34) 及 (4.35) 式只得到 $2p-2$ 個 u_i 的互相關係, 也因此整個數值解有平移的現象發生. 圖十八是在 $k = 4\pi$, $p = 3$ 在第 6 層的 wavelet 逼近解, 可以清楚的看出平移的現象.

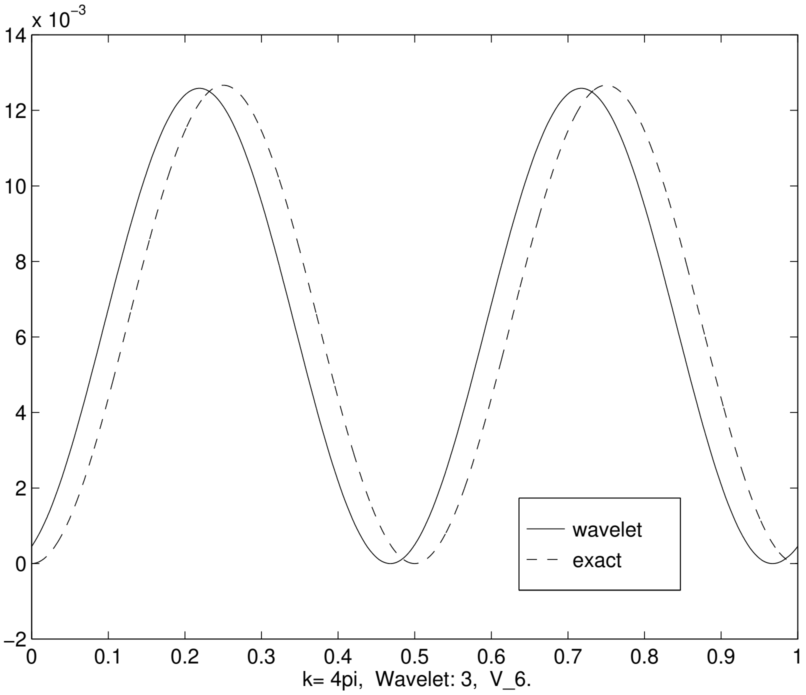


Fig 18.

第四節 提昇凌波函數

在這一節中, 我們將使用一套由 Daubechies 正則自格函數 $\phi(x)$ 提昇後的函數

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t) - \phi(t-1)dt, \tag{4.36}$$

爲基底, 去求解 Helmholtz 方程. 對提昇後 $\Phi(x)$ 的性質只做簡略的描述, 詳細的理論及證明請參閱 [18].

令 $\phi(x)$ 及 $\tilde{\phi}(x)$ 皆是可以展成多重解分析的自格函數, 若 $\{\phi(x),\ \psi(x),\ \tilde{\phi}(x),\ \tilde{\psi}(x)\}$ 是一組雙正交系統, $n \in N$, 則

$$\langle \tilde{\phi}(x),\ \phi(x-n)\rangle = \langle \tilde{\psi}(x),\ \psi(x-n)\rangle = \delta_{0,n}, \tag{4.37}$$

$$\langle \tilde{\phi}(x),\ \psi(x)\rangle = \langle \tilde{\psi}(x),\ \phi(x)\rangle = 0. \tag{4.38}$$

與 4.2 節正則函數類似的做法, 令 $M_0^{\phi} = M_0$, $M_1^{\phi} = M_1$, $M_0^{\widetilde{\phi}} = \widetilde{M}_0$ 及 $M_1^{\widetilde{\phi}} = \widetilde{M}_1$, 由 (4.37) 及 (4.38) 兩式可得到

$$\widetilde{M}_0(w)\overline{M_0(w)} + \widetilde{M}_0(w+\pi)\overline{M_0(w+\pi)} = 1, \quad a.e. \tag{4.39a}$$

$$\widetilde{M}_1(w)\overline{M_1(w)} + \widetilde{M}_1(w+\pi)\overline{M_1(w+\pi)} = 1, \quad a.e. \tag{4.39b}$$

$$\widetilde{M}_0(w)\overline{M_1(w)} + \widetilde{M}_0(w+\pi)\overline{M_1(w+\pi)} = 0, \tag{4.39c}$$

$$\widetilde{M}_1(w)\overline{M_0(w)} + \widetilde{M}_1(w+\pi)\overline{M_0(w+\pi)} = 0, \tag{4.39d}$$

也就是說, 只要有兩套自格與凌波函數的特徵函數 M_0, M_1, $\widetilde{M}_0$ 及 $\widetilde{M}_1$ 滿足 (4.39) 式, 則此兩套自格凌波函數自動形成一組對偶的雙正交基底.

在 [18] 中證明了 (4.36) 式中的 $\Phi(x)$ 是一個自格函數

$$\Phi(x) = \sum_{n} h_n \Phi(2x-n)$$

其中 (h_n) 是由 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 與 Daubechies 的 p 階正則自格係數 (c_n) 作離散型的疊積而來. $\Phi(x)$ 也展出一多重解分析, 而且

$$\sum_{n=0}^{2p} (-1)^n n^m h_n = 0, \quad m = 0, \cdots, p, \quad (0^0 := 1), \tag{4.40}$$

由上式可以看出 $\Phi(x-n)$ 的生成集包含了 p 階以及 p 階以下的多項式, 比 Daubechies 的 p 階正則自格函數逼近能力增加了. 由於 $\Phi(x)$ 不是正交的自格函數, 因此考慮一般的雙正交系統, 也就是藉由 $\Phi(x)$ 的對偶自格函數 $\tilde{\Phi}(x)$ 來導出對應於 $\Phi(x)$ 的凌波函數. 而新雙正交系統 $\{\Phi(x),\ \Psi(x),\ \tilde{\Phi}(x),\ \tilde{\Psi}(x)\}$ 的特徵函數也必須滿足相對於 (4.39) 式的關係式. 由於 (4.36) 式可以用另一種方式表達

$$\Phi(x) = \chi_{[0,1]} * \phi(x),$$

因此

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}(w) &= \hat{\chi}_{[0,1]}(w)\cdot\hat{\phi}(w)\\
&= (\frac{1+e^{-i\frac{w}{2}}}{2})\hat{\chi}_{[0,1]}(\frac{w}{2})M_0^{\phi}(\frac{w}{2})\hat{\phi}(\frac{w}{2})\\
&:= M_0^{\Phi}(\frac{w}{2})\hat{\Phi}(\frac{w}{2})
\end{aligned}$$

其中

$$M_0^{\Phi}(w) = (\frac{1+e^{-i\frac{w}{2}}}{2})M_0^{\phi}(w).$$

我們選擇

$$M_0^{\tilde{\Phi}}(w) = \begin{cases} \frac{2e^{-iw}}{1+e^{-iw}}M_0^{\phi}(w) & \text{if } w \neq (2n+1)\pi, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

及

$$M_1^{\tilde{\Phi}}(w) = -e^{-iw}\overline{M_0^{\Phi}(w+\pi)}, \quad M_1^{\Phi}(w) = -e^{-iw}\overline{M_0^{\tilde{\Phi}}(w+\pi)}.$$

相對於這些特徵函數, 有自格係數 (h_n):

$$\begin{aligned}
h_0 &= \frac{c_0}{2}, \quad h_N = \frac{c_{N-1}}{2},\\
h_n &= \frac{c_{n-1}+c_n}{2}, \quad n = 0,\cdots,N-1,
\end{aligned}$$

其中 c_n 是正則自格係數. 對偶自格係數 $(\tilde{h}_n)$:

$$\tilde{h}_{-1} = 0,$$

$$\tilde{h}_n = 2c_n - \tilde{h}_{n-1}, \quad n = 0,\cdots,N-2.$$

凌波係數 (g_n) 及對偶凌波係數 $(\tilde{g}_n)$:

$$g_n = (-1)^n\tilde{h}_{1-n}, \quad \tilde{g}_n = (-1)^n h_{1-n}.$$

這樣造出來 Ψ 的消散數(vanishing moments)會比 ψ 的消散數多一, Φ 比 ϕ 還要平滑; 反過來說, $\tilde{\Psi}$ 的消散數比 ψ 的消散數少一, $\tilde{\Phi}$ 比 ϕ 來的不平滑.

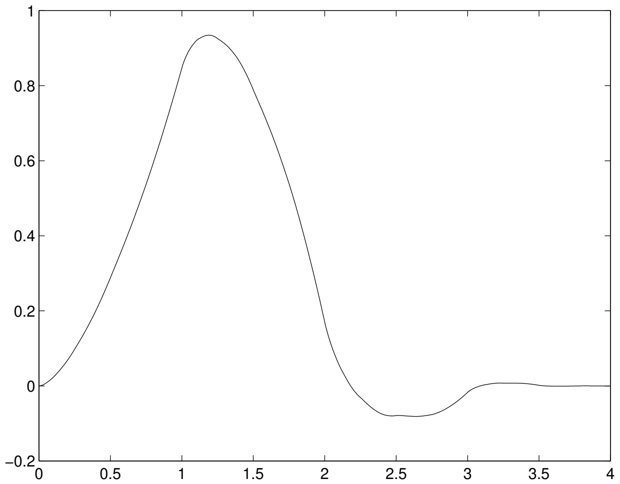


Fig 19. $\Phi_2(x)$

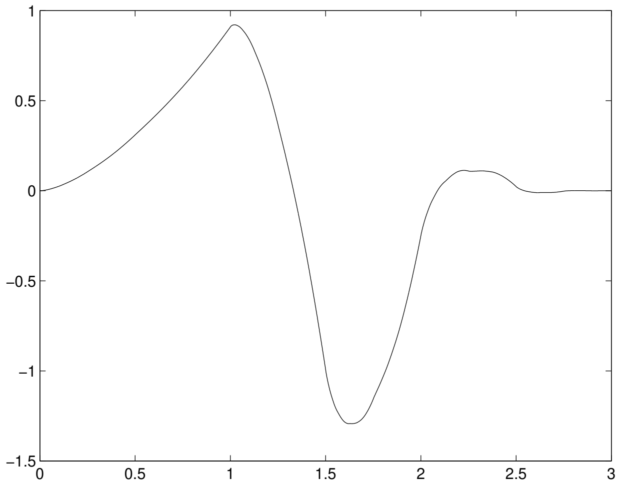


FIg 20. $\Psi_2(x)$

圖十九和圖二十則是提昇後的自格函數 $\Phi_2(x)$及凌波函數 $\Psi_2(x)$, 比起圖九 Daubechies 的 $\phi_2(x)$ 及圖十的 $\psi_2(x)$ 要平滑許多了. 底下我們以 $\Phi_2(x)$ 爲基底, 使用 Galerkin 方法去求解問題 (4.30) 式, 圖二十一及圖二十二分別是 H^1-seminorm 及 L^2-norm 的相對誤差. 和圖十二及圖十五做比較, 提昇後的 $\Phi_2(x)$ 收斂速度跟 $\phi_3(x)$ 一樣快, 而且相對誤差也變小了; 從 H^1-seminorm 及 L^2-norm 的誤差圖形中, 也可以清楚的看出相位差的存在.

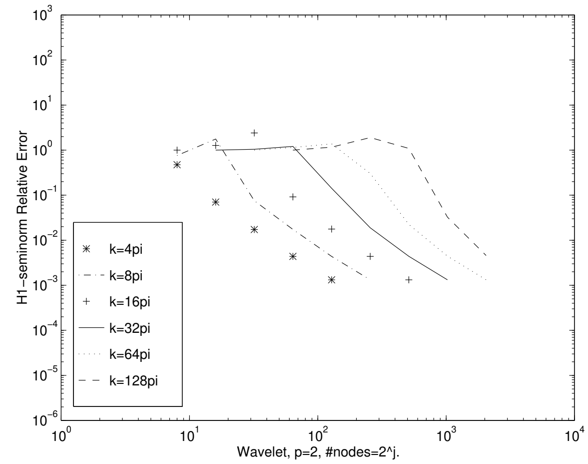


Fig 21.

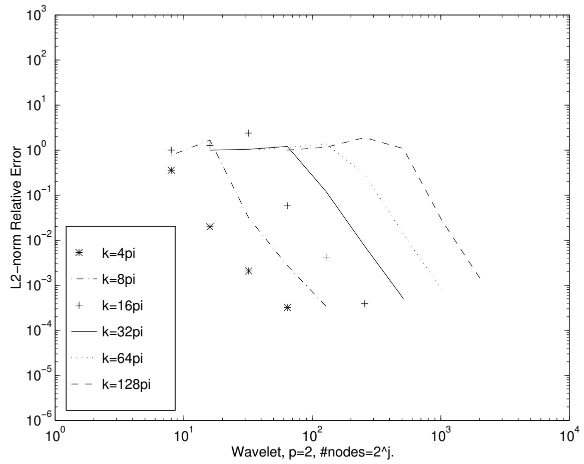


Fig 22.

Reference

1. F.Ihelnburg and I.Babuška, 'Finite element solution to Helmholtz equation with high wavenumber - part I: The h-version of FEM', *Comp. Math. Appl.*, **30**(9), 9-37(1995).

2. F.Ihelnburg and I.Babuška, 'Finite element solution to Helmholtz equation with high wavebumber - part II: The hp-version of FEM', *SIAM J. Numer. Anal.*, **34**(1), 315-358(1997).

3. F.Ihelnburg and I.Babuška, 'Dispersion analysis and error estimation of Galerkin finite element methods for Helmholtz equation', *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, **38**, 3745-3774(1995).

4. A.K.Aziz, R.B.Kellogg and A.B.Stephens, 'A two point boundary value problem with a rapidly oscillating solution', *Numer. Math.*, **53**, 107-121(1988).

5. J.Douglas Jr., J.E.Santos, D.Sheen and L.Schreiyer, 'Frequency domain treatment of one-dimension scalar wave', *Math. Models and Methods in Appl. Sci.*, **3**(2),171-194(1993).

6. A.Zemla, 'On the fundamental solutions for the difference Helmholtz operator', *SIAM J. Numer. Anal.*, **32**(2), 560-570(1995).

7. F.John, *Partial Differential Equations*, Fourth edition, Springer, New York, (1982).

8. G.Strang and T.Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, (1996).

9. I.Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, (1992).

10. W.-C.Shann and C.-C.Yan, 'Quadratrues involving polynomials and Daubechies' wavelets', Technical Report 9301, Department of Mathematics, National Central

University, (1993).

11. S.C.Brenner and L.R.Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, New York, (1994).

12. G.Chen and J.Zhou, *Boundary Element Methods*, Academic Press Limited, London, (1992).

13. N.I.Achieser, *Vorlesungen über Approximations Theory*, Akademieverlag, Berlin, (1953).

14. G.Strang and G.J.Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1973).

15. A.Cohen and R.D.Ryan, *Wavelets and Multiscale Signal Pricessing*, Chapman & Hall, London, (1995).

16. G.Birkhoff and G.C.Rota, *Ordinary Differential Equations*, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Singapore, (1989).

17. 嚴健彰, "凌波理論", 中央大學數學系碩士論文, (1995).

18. 曾正男, "一套提昇凌波函數逼近能力與平滑度的方法" 中央大學數學系碩士論文, (1997).

19. A.Bayliss, C.I.Goldstein and E.Turkel, 'On accuracy conditions for the numerical computation of waves', *J. Comp. Phys.*, **59**, 396-404(1985).