國 立 中 央 大 學

數 學 研 究 所

碩 士 論 文

探討臺灣高中數學空間課程之特殊性

Discussion on the Particularity of Space Courses in Taiwan High School Mathematics

研　　究　　生：王彥傑

指 導 教 授 ：單維彰

中　華　民　國　112　年　1　月

國立中央大學圖書館學位論文授權書

填單日期：__2023__/__2__/_01__

2019.9 版

授權人姓名	王彥傑	學號	108221014
系所名稱	數學所	學位類別	√碩士 □博士
論文名稱	探討臺灣高中數學空間課程之特殊性	指導教授	單維彰

學位論文網路公開授權

授權本人撰寫之學位論文全文電子檔：

‧在「國立中央大學圖書館博碩士論文系統」.

(√)同意立即網路公開

( )同意 於西元______年______月_____日網路公開

( )不同意網路公開，原因是：____________________

‧在國家圖書館「臺灣博碩士論文知識加值系統」

(√)同意立即網路公開

( )同意 於西元______年______月_____日網路公開

( )不同意網路公開，原因是：____________________

依著作權法規定，非專屬、無償授權國立中央大學、台灣聯合大學系統與國家圖書館，不限地域、時間與次數，以文件、錄影帶、錄音帶、光碟、微縮、數位化或其他方式將上列授權標的基於非營利目的進行重製。

學位論文紙本延後公開申請 (紙本學位論文立即公開者此欄免填)

本人撰寫之學位論文紙本因以下原因將延後公開

‧延後原因

( )已申請專利並檢附證明，專利申請案號：

( )準備以上列論文投稿期刊

( )涉國家機密

( )依法不得提供，請說明：______________

‧公開日期：西元__________年________月________日

※繳交教務處註冊組之紙本論文(送繳國家圖書館)若不立即公開，請加填「國家圖書館學位論文延後公開申請書」

研究生簽名：王彥傑__________　　指導教授簽名：單維彰__________

*本授權書請完整填寫並親筆簽名後，裝訂於論文封面之次頁。

國立中央大學碩士班研究生

論文指導教授推薦書

數學學系/研究所 王彥傑 研究生所提之論文

探討臺灣高中數學中空間課程的特殊性

係由本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授 單維彰 (簽章)

111 年 12 月 23 日

國立中央大學碩士班研究生

論文口試委員審定書

數學學系/研究所　王彥傑 研究生所提之論文

探討臺灣高中數學空間課程之特殊性

經本委員會審議，認定符合碩士資格標準。

學位考試委員會召集人　嚴健彰

委　　　　　員　單維彰

蕭顯勝

中華民國　112　年　1　月　9　日

101.06.15

致謝

進入中央大學數學研究所，發生許多事情，人生也有許多變化，從一開始沒有方向的考進數學研究所，再到後來認識到單維彰老師，見識到數學的廣闊，影響了我對數學的諸多看法，而後疫情爆發，對生活與學業都造成不小的衝擊，這大概是我永生難忘的一段旅程吧。

首先，必須感謝我的指導教授單維彰教授，每每與他對談，都讓我學習許多，對數學的理解、教育的看法、宏觀的態度、淵博的知識，以及著作「文化脈絡中的數學」更是讓我感動萬分，也很感謝教授對我的包容與忍耐。

其次要感謝我的媽媽，一直以來都非常堅強努力的奮鬥，養育我長大，為我提供最強力的後援，對我百般容忍，這段時間真的辛苦媽媽了。

以及，這一路上的同學與朋友們，在我有困難時願意伸出援手，互相討論與激勵，讓我有不一樣的觀點與看法。

還要感謝口試委員認真的聽講並給予建議，讓此論文有修改的地方。

最後，還是要感謝數學，數學充滿活力與趣味，本研究更讓我確信這點。

王彥傑

2023 年 1 月於中央大學

摘要

本研究主旨為探討臺灣高中數學中的空間課程之特殊性，並且透過三個層面來探討，分別為 1.歷年學測數學中空間相關的題目難度之分析，2.大學課程之相關性， 3.與其他亞洲國家的高中數學課程做比較。

此篇論文採用文本分析法，調查 99 課綱下的 101 至 110 年的學測數學中的空間相關題目，檢驗其答對率並分析這些題目有何共通點。然後調查普通物理、普通化學、經濟學、統計學這四門大學常見的數學相關科目之教科書，檢驗這四門科目究竟哪裡有用到高中所學的空間知識。最後調查日本、香港、中國這三個亞洲國家的高中數學的空間課程，藉以比較臺灣高中數學內容的安排。

由以上三層面所得到的研究結果，做出統整與其結論，並論述臺灣高中數學中的空間課程之特殊性。期望對於我國數學教育中的空間課程進行反思與改良。

關鍵字：空間概念、空間向量、空間中的平面、學測數學、臺灣、香港、日本、中國

Abstract

The purpose of this research is to explore the particularity of the space curriculum in Taiwanese high school mathematics, and to explore it through three levels, namely 1. The analysis of the difficulty of space-related topics in mathematics in the past academic tests, 2. The relevance of university courses, 3 .Comparison with high school mathematics programs in other Asian countries.

This paper uses the text analysis method to investigate the space-related questions in the 101 to 110 years of mathematics under the 99 syllabus, test the correct answer rate and analyze what these questions have in common. Then investigate the textbooks of four common mathematics-related subjects in general physics, general chemistry, economics, and statistics, and examine how these four subjects are useful for the spatial knowledge learned in high school. Finally, the space curriculum of high school mathematics in three Asian countries, Japan, Hong Kong, and China, is investigated to compare the arrangement of high school mathematics content in Taiwan.

Based on the research results obtained from the above three levels, the integration and conclusions are made, and the particularity of the space curriculum in Taiwan high school mathematics is discussed. It is expected to reflect and improve the space curriculum in mathematics education in my country.

Keywords: space concept, space vector, plane in space, academic mathematics, Taiwan, Hong Kong, Japan, China

目錄

表目錄

圖目錄

第一章 緒論

1-1 研究動機與背景

在高中數學中，學生會在二年級下學期碰到空間相關之單元，基本上可以依序分為以下兩大單元：一：「空間概念」、「空間向量的坐標表示法」、「空間向量的內積」、「外積、體積與行列式」；二：「平面方程式」、「空間中的直線方程式」。

如果是以前的 99 課綱，在第二單元還多了「三元一次聯立方程組」這個主題，主要是用三元一次聯立方程組來討論空間中的三平面關係。然而此單元在 108 課綱已經弱化。

在教材的安排上，空間這個主題佔了高中二年級下學期的一半之多，可以說是半個學期。在歷屆的學測數學考科中，每年也約出現一到三題不等。然而根據大考中心的統計資料可以發現；空間相關的題目答對率通常都不高，甚至是偏低的。這個現象，讓我開始收集數據並記錄下來，發現數年的資料都是如此，顯示這單元並非容易學習與掌握的。不禁讓我想要問，這是否出了什麼問題？

在我進入了大學的數學系，經歷了不同科目的洗禮、見識到高等數學的廣闊之後，某日回顧高中數學的課程時，我產生一個疑問：「高中所學的空間中的平面方程式、直線方程式這些內容到底有用在哪裡？哪個地方是非它們不可的？」其他單元；數與式、指數與對數、三角函數等等都能在許多科目上看到其應用，甚至是在大一微積分的課程中就必然會出現。然而高二下學期所學的

空間課程，似乎就沒那麼具體的例子可以說了。

不禁令我反思：「高中生進入大學科系之後，又有多少科系會真正應用到其高中數學中空間課程的知識點與概念？」如果大多數的科系根本沒用到，那又為何要在高中如此強調這些內容的教學？做那些演練題，又為的是什麼？難道除了在學測考驗學生之外，就再也看不到了嗎？如果是，是否該承認對於某些人而言，空間就是一個淘汰失敗者的單元？

「因為光畫圖就是個大問題，畢竟是要在平面的黑板上畫立體的透視圖。」[1]。我們可以很直觀的發現，不論是在黑板或是課本、參考書等傳統教學媒介，要在二維的平面上描述與操作三維空間，都是相對困難的，這也增進了空間教學的困難。空間中的平面與直線到底怎樣，發生什麼事情，學生可能是無感的，多半是依賴代數操作。具體而言空間中的平面與直線到底怎麼樣，誰在乎呢？而原本代數操作就不好的學生又如何能夠有感？

1-2 研究目的

我希望論述的是臺灣高中數學課程中，空間課程可能是特殊的，甚至可能是失敗的。好好審視空間課程到底學了什麼？為什麼而學？以及扮演什麼角色？在臺灣高中數學中，空間課程是否有問題？

1-3 研究問題

本研究分以下三個面向來探討高中數學課程中的空間內容。

一、歷年學測數學中空間相關的題目之答對率

檢驗高中生在學測數學考科中，表現得如何？空間是否真的是比較困難的單元？可以由答對率的高低與排序，來探究學生對這個單元的掌握程度。

二、大學課程之相關性

在高中生進入大學科系後，又有多少科系會真正應用到其高中數學空間課程的知識點與概念？如果明明沒有用到，或是會用到的科系很少，那要求所有高中生必須學習此單元的目的與原因到底是什麼？如果對於大多數的大學生而言，在大學幾乎使用不上相關知識與技能，那麼要求高中生必須花大量的時間與精力，在高中二年級學習空間課程分明就是一個折磨與考試取向的磨練罷了。

三、與其他亞洲國家的高中數學課程做比較

檢視其他亞洲國家的高中數學是否也有空間相關的單元？放了哪些內容？可以做個簡單的比較，藉以探討臺灣高中數學的安排是否較為特殊。

1-4 研究限制

本研究範圍受限於時間、人力、以及現實經濟等因素，無法做出更嚴謹以及更全面的分析，還請多包涵。以下針對各項限制作說明。

一、歷年學測數學考科中，空間相關的題目之資料，以 99 課綱的資料為主

108 課綱雖然已經上路，但由於 111 年的學測數學才算得上 108 新課綱的首次學測，考量到資料過少，且兩課綱畢竟有所差異，必須分開討論。111 年學測數學的部分將另外討論，本研究也可作為過去資料的驗證。而過去更舊的課綱將不在此研究關注。

二、為什麼只考慮學測數學？

由於指考數甲題目太少，每年份試卷的單選題、多選題與選填題總共只有 11 題，有幾年甚至不會有空間相關的題目，多數情況就算有也只是放在非選擇題的手寫題上。雖然大考中心有其非選擇題的得分統計，但由於非選題與選擇題差異性過大，且樣本數少，在此不特別做分析與比較。

三、大學課程之相關性

由於受限於本人時間與經濟等限制因素，無法調查全台灣所有大專院校，也無多的時間調查全部用書與課程內容。故此與教授討論後決定延續高晟鈞的研究，參考其論文：《大一上學期各系必修課程與高中數學教育微積分課程的探討》[2]，詳情請見本研究之「第三章 研究方法」。

四、外文部分

由於研究的國家有中國大陸、日本、香港等，但因為不熟悉其他外文，所以在資料的蒐集是有限制的，得到的資料多借助過去的論文、翻譯書籍、以及使用軟體進行翻譯而。所以這部分受限於人力、物力、時間等因素，僅就我所查到的資訊、相關書籍、期刊與論文作文獻式的探討。

1-5 名詞解釋

為了使本研究討論的範圍與主題更加明確，本論文所涉及的相關重要名詞，界定如下。

1.大學入學學科能力測驗之數學考科，避免贅述，簡稱學測數學。

2.大學入學指定科目考試之數學考科，避免贅述，簡稱指考數學。

3.普通高級中學課程綱要，避免贅述，簡稱 99 課綱[3]。

4.十二年國民基本教育課程綱要，避免贅述，簡稱 108 課綱[4]。

5.《十二年國民基本教育課程綱要綜合型高級中等學校 數學領域課程手冊》，避免贅述，簡稱《課程手冊》[5]。

第二章 文獻探討

本章依研究主題進行相關文獻之探討，以作為相關理論之基礎。

本章共分三節，第一節「99 課綱與 108 課綱一覽」回顧 99 課綱與 108 課綱中空間課程的部分且作比較。第二節「民國 51 年的空間課程」回頭看看在民國 51 年代時的課綱中，空間課程又是如何安排的，並且將空間課程做簡單的探討。第三節「相關文獻」尋找過去相關研究，做為參考與佐證。

2-1 99 課綱與 108 課綱一覽

要探討臺灣高中數學的空間課程，首先必須好好檢視課綱之內容，了解其內容到底涵蓋了什麼。考量到 108 新課綱才上路三年左右，且 111 年的學測數學才算是 108 課綱的首次學測，與 99 課綱豐富的資料相比，108 課綱的資料是相對少的，因此本研究將會以 99 課綱為主，108 課綱為輔。本節將比較 99 課綱與 108 課綱，為的是回顧過去與正視現在。一方面探討過去的空間課程，另一方面也順便展望現在與未來。

特別注意到，108 課綱中在高中二年級(十一年級)會有「分軌」，分為數學 A 與數學 B，學生可依照個人的數學需求進行選擇，對於數學有高需求的學生可以修習數學 A，對於數學有不同面向需求或是需求較低的學生，可以修習數學 B，而本研究關心的是數學 A 之內容。至於 A、B 兩類課程的差異實情，可以參考《課程手冊》的第 550 至 634 頁的說明，或參閱 763 頁的簡明對照表。

根據《課程手冊》提到：「為促進各界理解各領域/科目課程綱要，國家教

育研究院進行各領域/科目課程綱要研修外，同時發展各領域/科目課程手冊，解析各領域/科目課程綱要內涵特色，並且發展教學示例，提供教材編選、學校課程規劃實施、以及教師教學之參考。本課程手冊係為參考性質，期待教材研發者、學校課程與教學設計者、教學者等能自行視情境脈絡與需求加以轉化與實踐。」[5]《課程手冊》能視為課綱的詳細版本，雖然這是針對 108 課綱的，而本研究以 99 課綱為主，但考量到 108 課綱的數學 A 之內容與 99 課綱中的空間課程差異是不大的，因此《課程手冊》具有相當的參考價值。本研究會將《課程手冊》做為一大參考。

本節將高中數學 99 課綱與 108 課綱的教材綱要分別列表如下，並針對兩課綱做比較。以下列出 99 課綱的空間課程內容。

表 1 臺灣高中數學 99 課綱的空間課程

主題	子題	內容	備註
一、空間向量	1.空間概念	1.1 空間中兩直線、兩平面、及直線與平面的位置關係	1.1 僅作簡單的概念性介紹
	2.空間向量的坐標表示法	2.1 空間坐標系：點坐標、距離公式	
		2.2 空間向量的加減法、係數乘法，線性組合	
	3.空間向量的內積	3.1 內積與餘弦的關聯、正射影與高、柯西不等式、兩向量垂直的判定	
	4.外積、體積與行列式	4.1 外積與正弦的關聯、兩向量所張出的平行四邊形面積	
		4.2 三向量所張出的平行六面體體積	
		◎4.3 三階行列式的定義與性質	4.3 不含特殊技巧行列式題型
二、空間中的	1.平面方程式	1.1 平面的法向量、兩平面的夾角、點到平面的距離	

主題	子題	內容	備註
	2.空間直線方程式	2.1 直線的參數式、直線與平面的關係 ◎2.2 點到直線的距離、兩平行線的距離、兩歪斜線的距離	
	3.三元一次聯立方程組	3.1 消去法 ◎3.2 三平面幾何關係的代數判定	

以下列出 108 課綱中空間課程內容。此表格為參考《課程手冊》與泰宇出版的高中數學第四冊 A[6]，再自己整理編輯而成。

表 2 臺灣高中數學 108 課綱的空間課程

主題	學習內容	備註
一、空間概念	1.空間的基本性質， 2.空間中兩直線、兩平面、直線與平面的位置關係， 3.三垂線定理。	須認識兩面角，但除了直角以外，不必以幾何方式處理一般的兩面角。
二、空間向量的坐標表示法與內積	空間坐標系： 1.點坐標 2.兩點距離 3.點到坐標軸或坐標平面的投影 空間向量： 1.坐標空間中的向量係數積與加減 2.線性組合 空間向量的運算： 1.正射影與內積 2.兩向量平行與垂直的判定 3.柯西不等式 4.外積	可用柯西不等式解釋二維數據的相關係數範圍。※ (※ 為進階或延伸教材，教師宜適當補充，建議不納入全國性考試的範圍。)

三、空間向量的外積與三階行列式	空間向量的運算： 1.正射影與內積 2.兩向量平行與垂直的判定 3.柯西不等式 4.外積 三階行列式： 1.三向量決定的平行六面體體積 2.三重積	
四、平面方程式	平面方程式： 1.平面的法向量與標準式 2.兩平面的夾角 3.點到平面的距離	參考教具：計算機
五、空間中的直線	空間中的直線方程式： 1.空間中直線的參數式與比例式 2.直線與平面的關係 3.點到直線距離 4.兩平行或歪斜線的距離	

有些教科書的單元編排為「空間概念」、「空間向量的坐標表示法」、「空間向量的內積」、「外積、體積與行列式」，不過與上述表格中「空間概念」、「空間向量的坐標表示法與內積」、「空間向量的外積與三階行列式」三單元之學習內容皆為相同，不需在意此差別。

比較 99 課綱與 108 課綱的空間課程的內容，可以發現兩者的差異基本上是不大的，唯一的差別為：「三元一次聯立方程組」，108 課綱弱化了三平面幾何關係的代數判定，放到附錄作為補充，且將三元一次聯立方程組移到後面的矩陣單元。

在《課程手冊》中關於空間概念的基本說明；提到「與 99 課綱的差異」:

就內容而言，與 99 課綱相同。但新課綱特別增訂了空間概念的學習脈絡，例如在七年級透過三視圖熟練空間中的思維，9 年級以長方體為具體物件而學習線與線的平行、垂直、歪斜，面與面的垂直與平行，以及線與面的垂直。10 年級雖無空間概念條目，但是在三角比的應用上，刻意安排長方體上的測量，鞏固線與面的垂直概念，並練習基本的操作。所以，新課綱的教材，應善用這些提早安排的前置經驗。[5]

雖然兩課綱並無差很多，但對於 108 課綱在國中階段增加的課程，對國中生來說，建立了空間概念的學習脈絡與前置經驗，對於未來上高中面對的空間課程，相信是有幫助的，本人對此表示肯定。

在教學斟酌中提到:「高中數學課程裡，嚴格來說並沒有空間幾何，而僅為空間概念。此概念的發展，就功能而言有兩大目標：測量距離與夾角，而為了支援這兩項目標，課程儘速提供直角坐標系作為輔助工具。」[5]

這邊不得不談到所謂的「空間幾何」與「空間概念」又差在哪裡？在此引述項武義[7]指出：

自古到今，幾何學的研究在方法論上大體可以劃分成下述幾個階段：

(1)實驗幾何：用歸納實驗去發現空間之本質。

(2)推理幾何：以實驗幾何之所得為基礎，改用演譯法，以邏輯推理去探索新知，並對于已知的各種各樣空間本質，精益求精地作系統化和深刻的分析。在

這方面，古希臘文明獲得了輝煌的成就，它也是全人類理性文明中的重大篇章。

(3)坐標解析幾何：笛卡兒 (Descartes) 和費瑪 (Fermat) 通過坐標系的建立，把當代數學中的兩大主角——幾何學和代數學——簡明有力地結合起來，開創了近代數學的先河。其自然而然的結果是微積分的產生和大量地運用解析法研討自然現象。

(4)向量幾何：從現代的觀點來看，空間最為根本而且控制全局的本質乃是由它的所有保長變換所構成的變換群 (transformation group)，通常又稱之為 3-維的歐氏群 (Euclidean group of E^3)，而幾何學所研究者就是這個變換群的不變量理論(invariant theory) 。因為所有幾何量都根源于長度，所以必然在保長變換之下保持不變；反之，任何在保長變換群的作用之下保持不變的（亦即不變量—invariants）也都具有幾何意義，而且也一定根源于長度。向量幾何在本質上乃是坐標解析幾何的返璞歸真，它的最大優越性在于向量運算的正交不變性(orthogonal invariance)。可以說，向量幾何乃是不依賴于坐標系的解析幾何(coordinate-free analytical geometry)，它自然而然地化解了原先在坐標解析幾何中，由坐標系的選取所引入的各種各樣（非幾何的）非不變量的困擾！Hamilton 和 Grassmann 分別是 3-維和高維的向量代數的創始者。

筆者認為，「空間幾何」便是前面所說的「推理幾何」，用邏輯推理的演繹法去探索空間的本質。歐幾里德的《幾何原本》[8]便屬於此。

對比臺灣高中數學的空間概念；如同學習內容所述的幾個大重點：空間的基本性質，空間中兩直線、兩平面、直線與平面的位置關係，三垂線定理。根

據《課程手冊》所言：「最根本的教學之道，仍是『多使用實體模型』，提供學生真實的（動手的）經驗。」[5]且教科書上也多提供實際生活的例子或建議模型來幫助學生建立空間概念，所以空間概念這些內容皆可歸類為「實驗幾何」的部分。其中除了三垂線定理有推理幾何的成分在，然而關於三垂線定理的細節並不特別關注，且教科書也會使用三明治作為例子來幫助學生建立三垂線定理的觀念。故可以說明空間概念此單元絕大多部分皆屬於「實驗幾何」的範疇，「推理幾何」的成分是很少的。

實際上根據張海潮·鍾伊婷[9]提到：「三垂線定理在無坐標幾何之下, 幫助證明了命題 6, 即平面之法線均互相平行, 也幫助了將來 (2000 多年之後) 建立三度空間的坐標。」三垂線定理或許常被遺忘與不重視，但其概念卻幫助後續建立了空間座標。其重要性是有的。只是很可惜的被忽略了。

而往後建立了空間坐標系的單元，皆屬於「坐標解析幾何」的範圍，又稱解析幾何(Analytic Geometry)、坐標幾何(Coordinate Geometry)，在解決問題上很大程度皆依賴空間坐標系與向量的工具，並不涉及空間中的推理幾何。所以才說「高中數學課程裡，嚴格來說並沒有空間幾何，而僅為空間概念」。

2-2 早期的課綱

我去教科書圖書館考察民國 51、61、72 年的課程標準，關注各次課綱的修訂中，空間課程的變化為何？

參閱的書目為以下：

中學課程標準全 1 冊 (民國 51 年的課程標準)[10]

國民中學課程標準全 1 冊 (民國 61 年國民中學課程標準)[11]

高級中學課程標準全 1 冊 (民國 60 年高級中學課程標準)[12]

國民中學課程標準全 1 冊 (民國 72 年國民中學課程標準)[13]

高級中學課程標準全 1 冊 (民國 72 年高級中學課程標準)[14]

重點為以下幾點：

1.民國 51 年的課程標準中，國中並沒有直角坐標，當年的國中將課程分為「算術」、「代數」、「幾何」三門課程。高中則是分為「三角」、「平面幾何」、「立體幾何」、「代數」、「解析幾何」，詳盡的情形於 2-3 作介紹。

2.民國 61 年的課程標準才在國中端首次加入直角坐標，以及在高中三年級的課程首次出現了向量，課程標準寫著向量與向量空間 (以三維為限)。

3.民國 72 年，向量的課程被移到了高一，高二有空間概念與空間向量，從此之後，平面向量正式成為高中數學的一大重點，往後的課綱也都遵循著先教平面向量，後教空間向量的順序。

引用單維彰：「雖然版本之間存在著歧異的看法，但是自從 60 年以降，向量（特別是平面向量）就進入了我國高中數學的必修課程之中。在臺灣的同儕國家之中，這是一項獨特的安排。」[15]，關於 60 年的向量課程，亦可參閱於此。

2-3 民國 51 年的空間課程

我去教科書圖書館考察過去民國 51 年的課程標準以及當年代的高中數學教科書，由於過於久遠的資料是不可外借，只可以在館內參閱和於館內中使用電腦進行查詢與列印而已。以下為自己整理其資料，會附上其資料是出自於哪本

書。最後為個人的一些分析與看法。

2-3-1 民國 51 年的課程標準

參閱的書目為：中學課程標準全 1 冊 (民國 51 年的課程標準)[10]

本書為初級中學課程標準及高級中學課程標準彙編本，這邊僅關注高中數學的部分。

以下依序為其時間分配 (書上是寫時間支配)、教材大綱、實施方法，其中教材大綱與實施方法僅列出本研究所關注的空間課程相關的部分。

2-3-2 民國 51 年的課程標準-時間分配

表 3 民國 51 年之課程標準，數學課程之時間分配

<table>
<tr><th>課程</th><th>學期</th><th colspan="2">每週上課時數 (小時)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">三角</td><td>高一上學期</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>高一下學期</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">平面幾何</td><td>高一上學期</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>高一下學期</td><td colspan="2">2</td></tr>
<tr><td>立體幾何</td><td>高二上學期</td><td colspan="2">自然組 2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">代數</td><td>高二上學期</td><td>自然組 3</td><td>社會組 4</td></tr>
<tr><td>高二下學期</td><td>自然組 5</td><td>社會組 4</td></tr>
<tr><td>高三上學期</td><td>自然組 3</td><td>社會組 2</td></tr>
</table>

	高三下學期	自然組 3	社會組 2
解析幾何	高三上學期	自然組 3	社會組 2
	高三下學期	自然組 3	社會組 2

2-3-3 民國 51 年的課程標準-教材大綱

此部分只關注本研究所關心的空間課程，也就是當年的「立體幾何」與「解析幾何」這兩份課程。

表 4 民國 51 年之課程標準，立體幾何與解析幾何之教材大綱

課程	內容
立體幾何	一、空間之線與面 二、二面角、多面角 三、柱體與椎體 四、正多面體，相似體 五、圓柱及圓錐、球之截面及切面 六、球面三角形 七、球面圖形及球之面積與體積
解析幾何 (自然組)	一、笛卡兒坐標(基本公式) 二、軌跡與方程式 1.軌跡及方程式之基本關係 2.作圖討論 (教材從簡)

	三、直線 1.直線方程式 2.距離及交角 四、圓之方程式及其性質 五、橢圓，拋物線及雙曲線之方程式及其性質 六、坐標軸之移轉 1.移軸 2.轉軸 七、一般二次方程式 八、切線及法線 九、極坐標 十、參數方程式 (教材從簡) 十一、超越曲線 (教材從簡) 十二、立體解析幾何 (教材從簡) 1.坐標 2.直線 3.平面 4.二次曲線
解析幾何 (社會組)	一、笛卡兒坐標(基本公式) 二、軌跡與方程式 1.軌跡及方程式之基本關係 2.作圖討論 (教材從簡) 三、直線 1.直線方程式 2.距離及交角

	四、圓之方程式及其性質 五、橢圓，拋物線及雙曲線之方程式及其性質 六、坐標軸之移轉 1.移軸 2.轉軸 七、切線及法線 八、極坐標

2-3-4 民國 51 年的課程標準-實施方法

由於此部分有些繁雜，以下只列出本研究所關心的空間課程相關的部分。

一、高中幾何，應訓練學生自動探求之能力，並注意邏輯次序，使達於相當之嚴謹程度。

二、幾何證題及作圖，應就可能範圍內，盡量採用代數方法，以求已知量與未知量之關係。

三、立體幾何，以明空間性質及量法為主，務使學生能透視平面上之圖形，了解各種立體之構造。

四、解析幾何，應融會代數、幾何、三角諸科，是其相互為用，簡略提示中學階段數學科之總結束，及高深研究之基礎。

2-3-5 當年的教科書-新標準立體幾何

參閱的書目為：新標準高中立體幾何[16]

本書課程依據為民國 51 年中學課程標準，且經教育部審定，供高級中學及

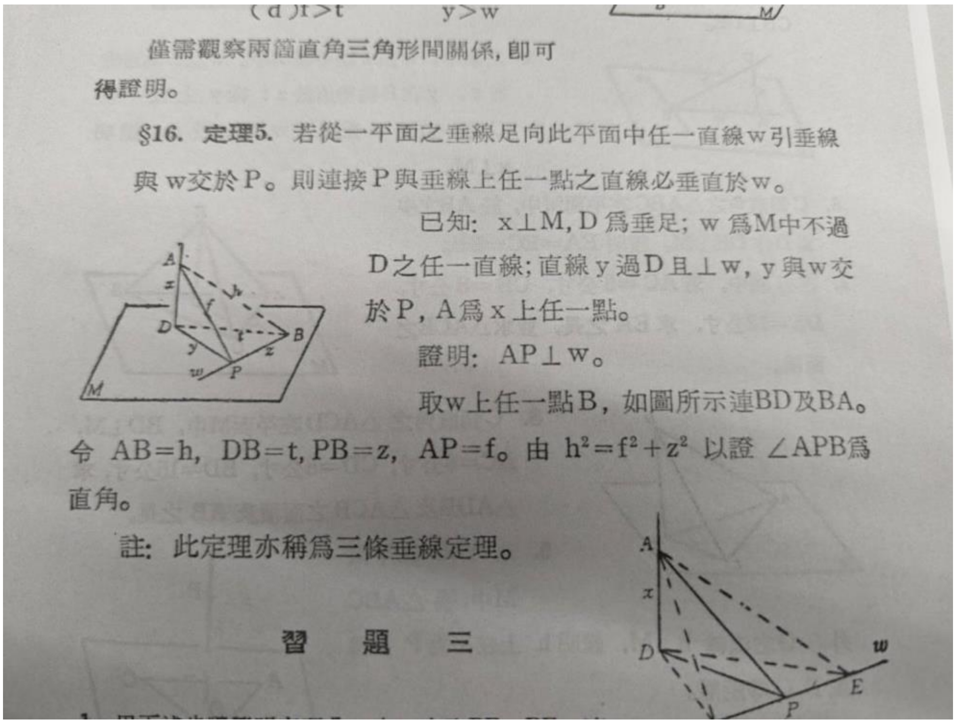
同等學校立體幾何學教本之用。

研究者實際檢視當年的教科書內容，是否與上述課程標準一致，也順便了解民國 51 年代的高中數學教科書在此部分如何做編排，與現代的高中數學教科書比起來又有何差異。此部分會先檢視目錄，再挑選其中小部分來做比較。

表 5 《新標準立體幾何》之目錄

第一章	平面
第二章	直線垂直於平面
第三章	直線平行於平面 平行線及平行平面
第四章	二面角 垂直平面
第五章	角柱 圓柱
第六章	角錐 圓錐
第七章	多面角 多面體
第八章	球
第九章	球面角 球面三角形
第十章	球之度量

挑選其中空間概念很重要的「三垂線定理」來做參考與比較。圖 1 是民國 51 年的新標準立體幾何中的三垂線定理，而圖 2、圖 3、圖 4 為泰宇出版的高中數學第四冊 A 的三垂線定理。在此比較兩課綱在論述三垂線定理之差異。



僅需觀察兩箇直角三角形間關係，即可得證明。

§16. **定理5.** 若從一平面之垂線足向此平面中任一直線w引垂線與w交於P。則連接P與垂線上任一點之直線必垂直於w。

已知：$x \perp M$，D爲垂足；w爲M中不過D之任一直線；直線y過D且$\perp w$，y與w交於P，A爲x上任一點。

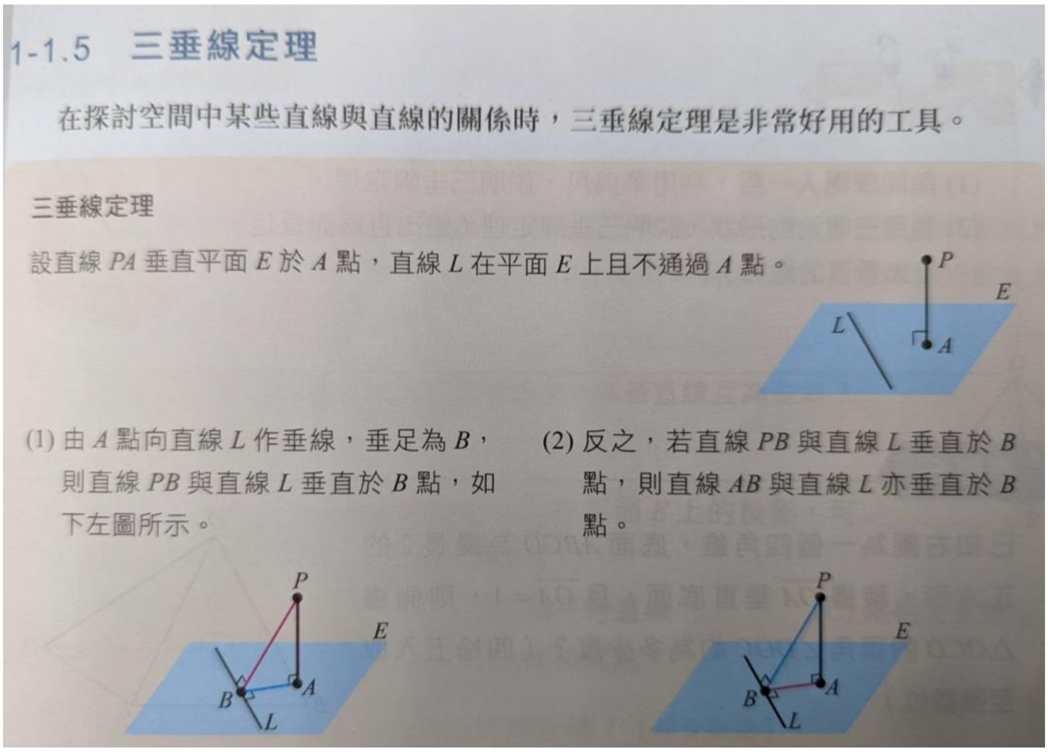
證明：$AP \perp w$。

取w上任一點B，如圖所示連BD及BA。令 $AB=h$，$DB=t$，$PB=z$，$AP=f$。由 $h^2=f^2+z^2$ 以證 $\angle APB$爲直角。

註：此定理亦稱爲三條垂線定理。

習　題　三

圖 1 新標準立體幾何中的三垂線定理



1-1.5 三垂線定理

在探討空間中某些直線與直線的關係時，三垂線定理是非常好用的工具。

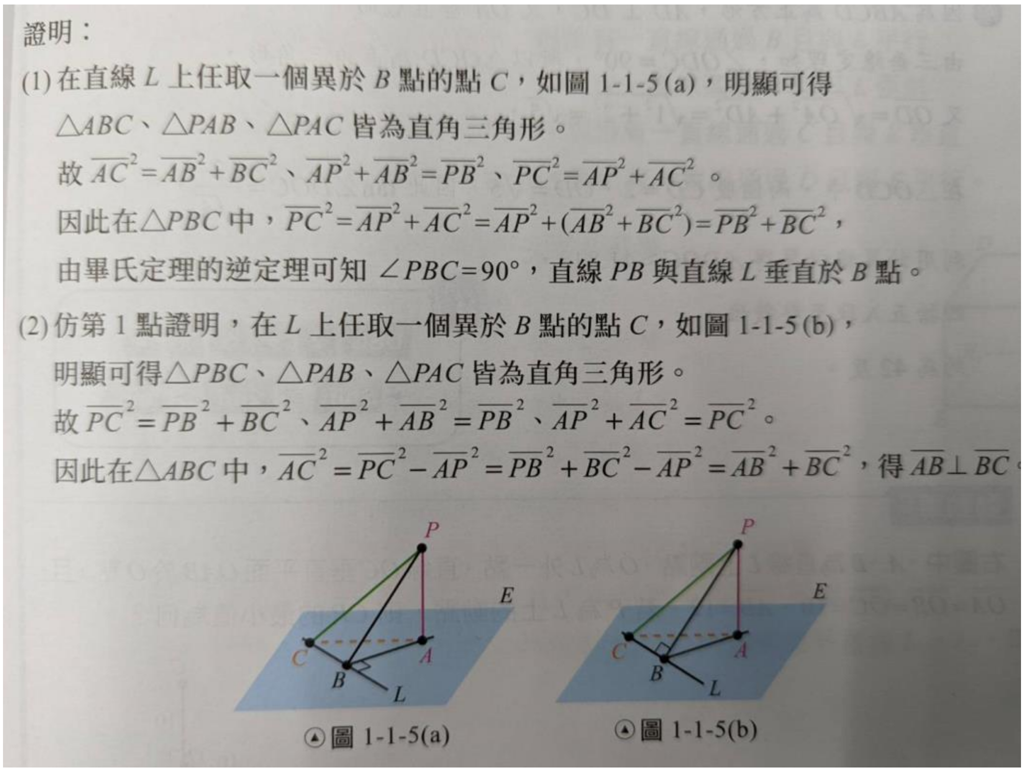
三垂線定理

設直線 PA 垂直平面 E 於 A 點，直線 L 在平面 E 上且不通過 A 點。

(1) 由 A 點向直線 L 作垂線，垂足為 B，則直線 PB 與直線 L 垂直於 B 點，如下左圖所示。

(2) 反之，若直線 PB 與直線 L 垂直於 B 點，則直線 AB 與直線 L 亦垂直於 B 點。

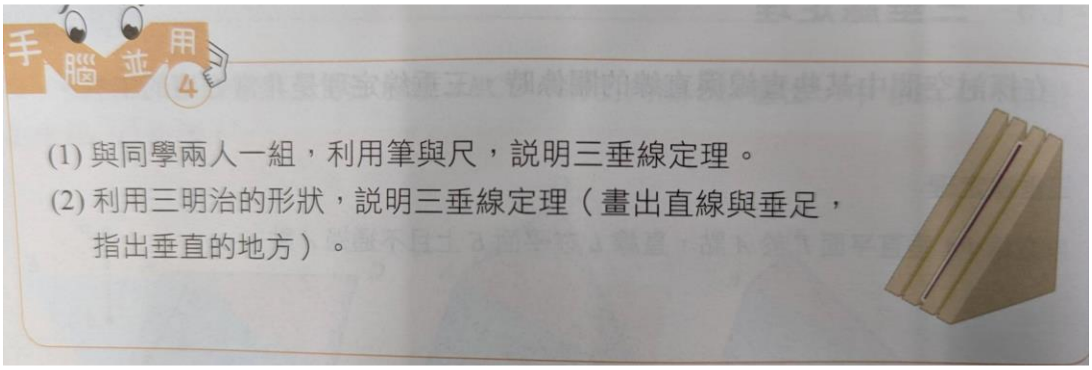
圖 2 泰宇出版高中數學第四冊的三垂線定理-1


證明：

(1) 在直線 L 上任取一個異於 B 點的點 C，如圖 1-1-5(a)，明顯可得
$\triangle ABC$、$\triangle PAB$、$\triangle PAC$ 皆為直角三角形。
故 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$、$\overline{AP}^2+\overline{AB}^2=\overline{PB}^2$、$\overline{PC}^2=\overline{AP}^2+\overline{AC}^2$。
因此在 $\triangle PBC$ 中，$\overline{PC}^2=\overline{AP}^2+\overline{AC}^2=\overline{AP}^2+(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)=\overline{PB}^2+\overline{BC}^2$，
由畢氏定理的逆定理可知 $\angle PBC=90°$，直線 PB 與直線 L 垂直於 B 點。

(2) 仿第 1 點證明，在 L 上任取一個異於 B 點的點 C，如圖 1-1-5(b)，
明顯可得 $\triangle PBC$、$\triangle PAB$、$\triangle PAC$ 皆為直角三角形。
故 $\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{BC}^2$、$\overline{AP}^2+\overline{AB}^2=\overline{PB}^2$、$\overline{AP}^2+\overline{AC}^2=\overline{PC}^2$。
因此在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}^2=\overline{PC}^2-\overline{AP}^2=\overline{PB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AP}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$，得 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$。

圖 3 泰宇出版高中數學第四冊的三垂線定理-2



(1) 與同學兩人一組，利用筆與尺，說明三垂線定理。
(2) 利用三明治的形狀，說明三垂線定理（畫出直線與垂足，指出垂直的地方）。

圖 4 泰宇出版高中數學第四冊的三垂線定理-3

基本上民國 51 年的教科書《新標準立體幾何》中每一章節的內容幾乎都是如圖 1 所示，當年代的教科書寫得非常的生硬，像是本百科全書，風格類似歐幾里得的《幾何原本》[8]一個個的定理敘述、以及其定理證明，與此書編輯大意：「本書之例證在可能範圍內，盡量採用代數方法，使與代數學連繫」呼應，不像 108 課綱的教科書有各種引起動機的前言，或是與生活的連結應用，如圖 4 所示，現代教科書常使用三明治作為例子來幫助學生建立三垂線定理的觀念。參考《課程手冊》：「三垂線的關係，在正規論證之外，希望能讓學生透過

生活經驗而理解。」並且提出三個例子其中之一便是三明治的例子。[5]

2-3-6 民國 51 年的課程標準-個人的分析與看法

根據上述的資料，可以發現，在民國 51 年的課程標準中，課程的編排與現代的高中數學課程的編排是完全不一樣的。首先是名詞上的差異;「立體幾何」是什麼？基本上可以從其教材大綱中看到，這分明就是現在高中數學中的「空間概念」，只不過內容更為豐富、更為艱深，將平面、直線、錐體、柱體等定義都講得非常深入，也講究定理的證明，強調邏輯的嚴謹。而現在的空間概念完全不講究其邏輯推理與證明，多半以直觀的方式去做理解，而且也沒有球的部分。

而且會發現在民國 51 年的課程標準中，是完全沒有出現「向量」一詞的。這個在現今高中數學課程中非常重要的單元，在當年的居然連出現都沒出現？但若以數學史的角度來說也合理。根據單維彰[17]提到：「一般認為，大約1800—30 年間，將複數賦予幾何意義的觀念，也就是高中課程中稱為複數平面或高斯平面的觀念，是現代向量觀念的前身。」 向量可以說是高中數學課程中最新的東西了，這可能是當年民國 51 年未收入於課程中的原因。

最大的不同是把「解析幾何」放在高三下學期，可以說是高中最後一個學期。然而看其中的教材大綱，會發現竟然都到高三下學期了才在這邊學習「笛卡兒坐標」、「直線方程式」等單元，但是在現在的數學課程中，笛卡兒坐標與直線方程式這分明在國中就先認識與了解了；早於在高中學習三角、空間概念以及眾多的代數觀念之前，學生就先了解直角坐標等知識了。至於為什麼當初要這樣安排？不得而知，但我想是為了符合數學史上的發展脈絡。在費馬

(Pierre de Fermat) 與笛卡兒 (René Descartes) 於十七世紀時開創了直角坐標的概念後，才真正有了所謂的解析幾何，幾何學才進入了新的階段，之後的微積分、線性代數等現代數學重要的分支更是建立在此基礎之上，而在這之前人們便是學習著推理幾何與代數。民國 51 年的數學教科書的編排，就大主題而言是與數學史的發展順序一致；先在高一高二花大量的時間學習平面與立體幾何概念、代數知識，才在最後一單元學習解析幾何，而現代的 108 課綱則是採用「螺旋式課程」的編排，將知識與技能拆解成小片段，且抽離出其中精華的重點部分，再重新設計。

至於這樣的安排是好是壞？而現代改成這樣是否是更好的做法？背後涉及到「數學教學是否要遵循數學史上的發展脈絡」之議題，我想這值得好好討論。但是本文在此不特別討論此議題，供讀著與他人發想。

2-4 相關文獻

由於本研究主旨在於探討臺灣高中數學的空間課程可能是特殊的，且由三個面向去探討，所以相關文獻部分也會分三個面向做介紹。

2-4-1 歷年學測數學中空間相關的題目之分析

我在「臺灣碩博士論文知識加值系統」搜尋過去論文，以「學測 數學」作為關鍵字，查詢模式設定為模糊進行搜尋，然而多數論文為針對某年度學測的試題分析之研究、或是相關性不高的論文，並無我所期望的：「藉由學測數學中的表現來探討教學成果」這類論文。

考慮到可能有，只是我沒找到，在這邊先以保留態度看待，故此相關研究論文先暫時從缺。然而學測這樣的大考有著測量考生的學習成果與鑑別學生程度之兩大目標，且根據郭伯嘉校長[18]提到：「我們仍然可以嘗試分析學生成績是否與教學有一定的相關性，例如從答對率、答對選項，做教學上的分析，進而反思是否是教學出了問題？或是教材選擇有問題？」

我相信藉由分析數年的學測數學中的數據資料，能多少反映出教學成效，故本研究聚焦在空間相關的題目上，試著反思在空間課程上的教學是否出了問題？尤其當這個數據是明顯的時候，更能看出來其問題是真的存在。

2-4-2 大學課程之相關性

高晟鈞在《大一上學期各系必修課程與高中數學教育微積分課程的探討》[2]論文中，探討的是微積分在臺灣高中數學與大學一年級上學期之關聯性。他採用文本分析法，針對台灣的 16 所公私立大學、478 個學系、217 種課程進行整理與分析，在最後的綜合論談指出：「不論學生在哪一個學系修了哪一個跟微積分有關的課程，而其課程不論需要會多少微積分，這些學系的微積分課程都不需要跟數學系學生修的微積分課程一樣地從極限開始教起，每個學系因為專門領域的不同，對微積分的需求也不太一樣，因此對於『高中生為什麼要學微積分』這個問題，本研究提供了與『第三個』答案幾乎相同的結論：『高中的微積分課程並非為了大學的微積分課程作準備，而是針對各其它專業課程作準備』」。[2]

而本研究主旨是空間課程，在範圍上勢必是縮小許多，很多時候只是一門學科中的一兩個單元或是小概念，而非像是微積分是個主要科目，本研究將會

根據上述論文相關研究方法，並且與教授討論後決定延續此研究，針對其挑選的原文書，以較新的版本縮小範圍進行研究。

2-4-3 與其他國家的高中數學課程做比較

將檢索到的有關數學教材比較方面的論文資料進行歸納整理，分為以下兩類：(一) 臺灣高中數學課程與其他國家數學課程比較，(二) 與向量、幾何相關單元的比較。以下將說明這些論文資料，並簡單評述，說明並沒有回答到我的問題。

(一) 臺灣高中數學課程與其他國家數學課程比較，將參考以下幾篇論文研究：

1.洪雅齡《台灣與日本之十二年數學課程比較》(2005)[19]

2.姜志遠《台灣與中國大陸之十二年數學課程比較》(2005)[20]

3.翁婉珣《台灣與新加坡之十二年數學課程比較》(2005)[21]

4.黃子倩《台灣與韓國之十二年數學課程比較》(2005)[22]

綜合上述，關於中學數學教材的國際比較研究，主要以幾個主要的亞洲國家為主，且內容多為兩國的教育制度比較以及兩個或多個教科書版本的比較研究，而研究方法主要為文獻分析法、比較研究法等。雖然資料詳盡，值得參考，然而綜觀全文，多是課綱與教育制度之間的比較與分析，並非是專注於某單元的比較，也並無回答本研究所關心的問題：「探討空間課程」。

但是參考這些成果仍然有利於本研究。因為本研究聚焦於與中國、日本、香港的空間概念課程之比較，與前述文獻中的一般性課綱比較關聯性較大。

(二) 與向量與幾何相關的單元比較

由於並沒有找到「比較空間課程」的相關論文，故將範圍擴大為與空間相關的向量與幾何相關的單元之比較。參考以下兩篇論文研究：

1.李佳瑩在《台灣與中國大陸高中數學教科書之內容分析比較-以向量課程為例》[23]論文中，透過內容分析法針對台灣的三個版本與中國大陸的兩個版本的高中數學教科書中的平面向量、空間向量之課程進行分析比較。研究結果大意如下。

(i) 臺灣教科書課程設計具連貫性，中國大陸教科書課程設計切割區塊較多，概念完整性佳，符合螺旋式設計。主要的例子為臺灣將平面向量與空間向量前後章連續編排，而中國大陸第二冊教空間概念與空間坐標系，第四冊才會有平面向量。

(ii) 中國教科書完整性與課程銜接性較高。中國教科書使用較多的單元性介紹向量概念，注重名詞與定義的說明，部分專有名詞可以銜接大學線性代數之課程。台灣教科書在空間向量單元則省略與平面向量通用概念之解釋與說明。

(iii) 圖示的部分，台灣教科書示意圖較為精緻，排版較為美觀，中國教科書使用情境圖片與圖比例較高，且有較多的生活情境圖與圖利的使用，有助學生與生活連結。

(iv) 台灣教科書以有單一、標準的答案之問題為主，而中國教科書內文較有眾多思考與探究等問題，注重表達能力的訓練。

2.宋嘉寧在《中國大陸與臺灣中學教材之平面幾何與坐標幾何分析比較》[24]論文中，以分析比較中國大陸某一版本初、高中數學教材與臺灣國中、高中各一版本數學教材之平面幾何與坐標幾何的內容，嘗試找出中學階段兩地教材的異同以及各自的特點；此研究主要應用文獻研究法、內容分析法及比較研究法，探討中版與臺版平面幾何與坐標幾何內容之編排順序、單元數、頁數、布題數和教學活動數、布題認知需求層次、概念引入方式，以及定理證明方法之差異。研究發現如下：

(i) 在編排順序方面，中國教科書的章節知識編排較為分散，臺灣教科書的章節間知識編排較為集中。

(ii) 在教材比重方面，在初中階段，中國教科書的相關單元數和頁數之分布比例、相關內容的教學活動數，以及總教學活動數，都比臺灣教科書還要高，而平均每頁題目數量則相差不多。在高中階段，兩版相關單元數和頁數之題目比例相差不多，臺灣教科書的平均每頁題目數量比中國教科書還要多，中國教科書的相關內容教學活動數、總教學活動數，以及相關分布比例均比臺版多。

(iii) 在題目的認知需求層次方面，兩版教材皆集中在特定題型：不論從整體還是大部分內容類目來看，都集中在無聯繫的程序性問題。

(iv)造成兩版教材之章節未完全對應的原因是：知識點之設立與否不影響課程結構，或者相關知識點被安排於教材敘述或例題中，並未設立獨立的章節。

(v) 在概念引入的方式上，兩版教材對同一概念的定義敘述大致相同，但其中中國教科書多以數學問題和溫故知新的方式引入，臺灣教科書則多直接引入概念。

(vi) 在定理證明方面，定義的敘述不同和章節編排順序不同，都會導致章節內的性質、判定和公式的證明方法不同。

(vii) 在函數與圖形知識結構的銜接方面，中版教材於「一次函數與直線知識結構的銜接性」相較於臺版略感不足，而兩版教材於「二次函數與拋物線知識結構上的銜接性」則各有千秋。

宋嘉寧對於臺版教科書提出了建議:「增加例習題情景化設置，提高學生解決實際問題的能力；增加教學活動數，提高學生的動手操作能力；增加有聯繫的程序性問題和做數學的問題的習題設置，提高認知需求層次。」[24]

綜合上述，過去已經對高中數學的教材做一定的研究了，研究方法多元，然而關於空間課程的比較與研究，相對於其他單元甚少。

鑒於以上原因，本研究將針對空間課程，與我國鄰近的幾個國家：中國大陸、香港、日本，這三個國家做高中數學中的空間課程之比較。由於時間與精力有限，將限制於以課綱中的比較，不特別以教科書、單元數、教學活動數等等細節方面做更深入的比較，還請多包涵。

第三章 研究方法

本章主旨在說明本研究所使用的研究方法與實施步驟：本研究整體而言採用文本分析法，以下分別以三大問題為小標題，說明各別問題所採取的文本分析方法。對每個研究問題，再分成研究對象、資料蒐集與資料分析三小節，分別陳述細節。

3-1 歷年學測數學中空間相關的題目難度分析

3-1-1 研究對象

研究對象為 99 課綱與 108 課綱的學測數學題目，考量到 99 課綱的第一屆與最後一屆考試，全部範圍為 101 年到 110 年的學測數學，而由於 108 課綱才於 111 年為首屆的考試，其資料僅有一份試卷，但也可納入參考與分析。本研究不考慮補考與模擬考以及學校和補習班等考試，全部都以正式大考為主，且以大考中心網站所提供的資料為準。

3-1-2 資料蒐集

在大學入學考試中心的網站，點選「學科能力測驗」中的「統計資料」，網址為[25]：

https://www.ceec.edu.tw/xmdoc?xsmsid=0J018604485538810196

可以看到歷年來的資料，皆寫 X 年學年度學科能力測驗統計圖表，(X 為該民國

年份)在此蒐集各年度的資料。

關注其中「答對率及鑑別度」中的「各科答對率及鑑別度表」，可在此下載 Excel 檔案，蒐集的範圍為 101 年到 111 年的學測數學。

3-1-3 資料分析

下載好檔案後，整理 101 至 111 年的學測數學統計資料，並且自製 Excel 檔案，以各年份做分類、以顏色作區分各題分別屬於哪單元，將本研究所關心的空間題目標記下來。由於題目有些是跨單元的情況，但因為主要是探討空間相關題目，所以只要是有關空間的題目就將其標記下來，且按照答對率高低做出排序。

所有題目皆以「A-B」之形式呈現，A 表示該題目屬於哪個年份，B 表示是該份試卷的第幾題。因為原先在試卷上選填題都是以英文符號作表示，這點先做說明。

有些細節需要解釋一下：在大考中心的檔案中，題號前有「*」符號者為多選題，多選題以得分率代替答對率，得分率的算法為：

$$\frac{\text{考生得分之總和}}{\text{考生人數} \times \text{該題題分}} \times 100\%$$

引用大考中心的說法[26]：得分率是將「所有考生該題實得分數的總和」除以「所有考生該題全對分數的總和」，這個方式同時考量了各種得分情況，符合多選題「部分答對給部份分數」的核心精神。因此，多選題在答對率的計算上會以考生的「得分率」替代。

由於本研究關心學生作答狀況，多選題以此得分率作為研究之基礎，能看出學生得到的部分分數，而非完全答對的比例，因此也不討論多選題以全對率來判斷的部分。

利用 Excel 軟體計算出平均數、標準差後，再套入 Excel 的標準化公式，算出各題之 z 分數，用意在於看出排序外，更可以看出各題在整體的分佈狀況。除了製作各年份的題目排名外，最後會再製作整體的 99 課綱中 101 至 110 年的學測數學總排名，用意在於判斷空間相關題目的相對分佈為何。而 111 年的學測數學將另外製作，用意在於作為觀察 108 課綱後的首次學測數學的空間題目是否也符合過去的走向。

而我們若關注全體，將 101 年至 110 年的全部學測數學題目共 200 題之答對率都一起做排序，可以更容易看出空間相關題目整體而言的分布為何，是否真的如預測那樣屬於較難的部分。至於 111 年學測數學屬於 108 課綱，因此就不一起做排序與比較了。

自製的表格將附在第四章研究結果，以各年度為分類，並且將空間相關的題目用紅底做標註，便於觀察情況。最後會再由我個人針對這些較簡單或較難的題目做考題的分析。

3-2 大學課程之相關性

3-2-1 研究對象

由於全台灣的學校與科系繁多，本人實在沒太多精力與時間一一比對與研究，故此與教授討論後，決定延續高晟鈞的研究，參考其論文：《大一上學期各系必修課程與高中數學教育微積分課程的探討》[2]，並延續此方法與結論來研究。

延續其研究所針對的四個主要科目：普通物理、普通化學、經濟學、統計學，作為本研究的分析對象。此四門課為許多科系必修的課，也都有數學的成分在，選用這四門科目作為分析具有一定參考性，且參考其中的教科書作為文本分析，實際考究這些主要科目的教科書的內容，是否與高中數學的空間課程有關。考慮到現實時間因素，許多教科書已經出了較新的版本，某些大學科系也改用較新的版本，這部份本研究將會選用較新版本的教科用書作為分析的對象。

由於本研究是針對空間相關之課程，會探討的將會是在大一上學期的課程中關聯性多大，針對的都是大一上學期的課程。各科授課範圍會先在網路瀏覽大概上到哪個單元，保險起見可能會多看後面一兩個單元以免漏掉有關聯的部分。關注的是大一上學期的主要科目中的內容才是真正有關聯，而大一下學期以後的課程將不討論，因為那並非是高中數學的教學目標，而若有需要多半在大學端也會開課，像是物理數學、化學數學、向量分析等額外為主科目而準備的數學課程。

3-2-2 資料蒐集

以下將分別說明四個科目選用的教科書，以及各別的情況：(1)普通物理、(2)普通化學、(3)經濟學、(4)統計學。

1.普通物理

選用：David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker《Fundamentals of Physics》10th Edition[27]

原先參考的高晟均的論文中使用的是《Fundamentals of Physics》第 7 版，然而時過多年，現今已於 2021 年出版最新的第 12 版，第 11 版也於 2018 年出版，雖然版本差異應該不大，但由於這兩版本過於新，本研究所關注的 99 課綱的那幾屆學生們也不可能使用這兩版，因此決定以 2015 年出版的第 10 版作為分析對象，也符合現實用書情況。

此外，就我調查，多數學校大一頂多上到熱力學第二定律的部分，也是此原文書的第 20 章，因此調查的範圍將會是此原文書的第 1 至第 20 章。

2.普通化學：

選用：Steven S. Zumdahl《Chemical Principles》8th Edition[28]

原先參考的高晟均的論文中使用的是《Chemical Principles》第 5 版，然而過了多年，最新已於 2016 年出版第 8 版，於 2012 年出版第 7 版，然而我比較第 7 版與第 8 版的差異，發現不論是標題還是內容幾乎相差無幾，故在此選用

第 8 版作分析是可以的。

此外，就我調查，發現不同學校以及不同科系的授課範圍似乎會稍微不太一樣，甚至有些會跳章節來上課，有些著重於前面的單元，有些卻是以後面的單元為重。為了保險起見，不要有遺漏的部份，此書調查的範圍將是整本原文書 1 至 21 章的內容。

3.經濟學

選用：張清溪、許嘉棟；劉鶯釧、吳聰敏《經濟學：理論與實際》(第六版)[29]

雖然現在最新出到第八版，然而在第八版的出版序中提到：「由於基本經濟學概念不會有太大、快速的變化，因此，這次改版與前幾次相同，除了更新統計資料，並加上一些國內外經濟在近幾年發生的重要變化，整本書的主要內容並沒作太多重大的調整。」內容與前幾版並無太大調整，而且參閱第六冊的目次與第八冊的目次基本上是一樣的，因此我想選用第六版作為分析並無不妥。

此書有分上下兩冊，而大一上學期進度多為上冊的部分，此書的調查範圍將會是上冊的全部內容。

4.統計學

選用： McClave, J. T., Benson, P. G., and Sincich, T. (2018), Statistics For Business and Economics (13th ed.), Pearson[30]

統計學的用書繁多，重複率並不高，此部分參考高晟鈞的論文所選用的

McClave , Benson ,Sincich《Statistics For Business & Economics》，但當時是選用第 10 版，現今已於 2021 年出版到第 14 版，但此版本過新，我選擇使用上一版，於 2018 年出版的第 13 版。

至於範圍，就我調查會發現各學校各科系的範圍都有所差異，著重的非常不一樣，這邊為求保險起見，就決定調查的範圍為整本原文書。

實際上各教科書版本差異應該都不大，也應該不會因為差了一兩個版本，而對本研究有太多影響，畢竟若與空間有關就應該有關，不太會因為更新了版本，就多或是少了關聯的部分。這個科目學了什麼、內容是什麼，就應該是這樣，不太會因為版本或是教科書的差異而影響實際學科的內容才對。

3-2-3 資料分析

決定好各科目用書後，透過不同的管道，去圖書館借書、買書、於網路上取得電子檔案等，並且各別作分析，主要是調查各科目的教科書範圍，關注其中出現的數學式子，以及圖示是否有空間相關的部分。由於時間有限，並無法一一檢視教科書中過多的文字敘述。

主要判斷有關聯的標準為以下幾點：

1.三維空間的圖示與應用、需要有空間概念才好理解的部分。

2.空間坐標系、空間向量與之應用。

3.平面方程式、空間中的直線方程式與之應用。

只要有符合其中一點，便符合標準，將判定為與空間課程有關。

而若有類似或重複出現的部分將會提及一次即可，這會在備註中做說明，各科目的情況可能不一樣，細節部分會在第四章研究結果中做更詳盡的說明。

3-3 與其他亞洲國家的高中數學課程做比較

3-3-1 研究對象

針對日本、香港以及中國這三個鄰近臺灣的亞洲國家做比較，主要是查閱該國家最新或近年的課綱，且與臺灣的課綱作比較分析。臺灣課綱以 99 課綱為主、108 課綱為輔，針對的是高中數學中空間的部分，比較這幾個國家的空間課程內容是否一樣，差異為何。若有課綱寫得不明確或是太簡略時，將會實際參考教科書去檢視其內容為何。而考量到太多細部的問題，此研究不進行各國教科書的比較研究。

3-3-2 資料蒐集

於網路上搜尋，去各國教育部或類似的行政部門之相關網站做查詢，找尋該國的課綱，會將其搜尋紀錄下來。以下為這三個國家分別做說明：

1.日本

日本的文部科學省網站[31] (日文：文部科学省／もんぶかがくしょう，以下簡稱文科省) 其機構負責統籌日本的教育、科學、學術、文化與體育事務。也負責制定「学習指導要領」，可以說是課程綱要的意思。網址為：

https://www.mext.go.jp/index.htm

在其網站依序點選：

教育 > 小学校、中学校、高等学校 > 学習指導要領「生きる力」

学習指導要領「生きる力」網址為：

https://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/index.htm

在此網站可以找到過去到現在的学習指導要領。而本研究所關注的為近年的課綱或是最新的課綱，以作為台灣 99 課綱與 108 課綱的比較，將在以下說明。

平成 29、30 年的課綱，依序點選：

平成 20・21 年改訂学習指導要領（本文、解説、答申、通知等）> 学習指導要領等（ポイント、本文、解説等）(平成 20 年 3 月・平成 21 年 3 月）> 高等学校学習指導要領（ポイント、本文、解説等）> 高等学校学習指導要領解説 > 数学 （PDF:1298KB） PDF（平成 24 年 6 月 6 日更新）

可以找到 「高等学校学習指導要領解説 数学編 平成 21 年」[32]其網址為：

https://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2012/06/06/1282000_5.pdf

此資料詳盡解說平成 21 年的數學課綱內容為何，而平成 21 年為西元 2009 年，為民國 98 年，過一年即是台灣 99 課綱上路那時候，將以這份資料為主。

而若想要找最新的課綱，為平成 29、30 年的新課綱，將按照以下順序點選：

平成 29•30 年改訂 学習指導要領、解説等 > 高等学校学習指導要領解説 > 【数学編 理数編】高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説 (PDF:3.3MB)

可以找到：「高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説 数学編 理数編 平成 30 年 7 月」[33]其網址為：

https://www.mext.go.jp/content/1407073_05_1_2.pdf

平成 30 年為西元 2018 年，也是民國 107 年，基本上日本近兩次的課綱改革跟台灣的課綱改革時間上幾乎是一樣的，皆只相差一年，故很有參考性。

此研究將對這兩版本的日本數學課綱進行比較研究，關注的將是其中空間課程，立體幾何、立體圖形、空間概念、空間向量等將都是要注意的點。詳細的說明將放置於第四章研究結果。

2.香港

香港教育局[34]，負責制訂、發展和檢討由學前至高等教育程度的教育政策、計畫和法例及監察教育計畫，使能有效推行。網址為：

https://www.edb.gov.hk/tc/

依序點選：

主頁 > 課程發展 > 學習領域 > 數學教育 > 課程文件，網址為：

https://www.edb.gov.hk/tc/curriculumdevelopment/kla/ma/curr/index2.html

在這邊可以看到許多資料，小學到高中的課程指引，以及現在和過去的各屆課程綱要。而本研究所關注的為高中數學之近年的課綱或是最新的課綱。

最新的資料為：「數學教育學習領域課程指引補充文件：高中數學科學習內

容 (2017)[35]」，其網址為：https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/curr/ssmc2017_tc.pdf

其中引言部分提到：本冊子屬於《數學教育學習領域課程指引（小一至中六）（2017）補充資料》系列之一(可參考[36])，旨在詳細闡述：

1. 高中數學課程的學習目標；
2. 高中數學課程的學習內容；及
3. 高中數學課程內各學習單位的學習流程圖。

毫無疑問的，這就是課綱。其中在《數學科修訂課程的推行時間表》[37]明確提及：

「第四學習階段（即中四至中六）的高中數學科必修部分修訂課程會於 2023/24 學年起在中四逐年推行。首屆高中數學科必修部分修訂課程的香港中學文憑考試將於 2026 年起舉行。

第四學習階段（即中四至中六）的高中數學科延伸部分修訂課程會於 2019/20 學年起在中四逐年推行。首屆高中數學科延伸部分修訂課程的香港中學文憑考試將於 2022 年起舉行。」

所以 2017 年的修訂課程將不是要參照的重點對象，只作為參考用。因此鎖定的將是之前的課程綱要。可於「昔日課程文件」中找到：《高中數學課程補充資料》(2013) [38]網址為：https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/res/Supplementary%20Notes%20(C).pdf

開頭已經註明：「2013/14 學年就讀中四學生適用」，其中 1.1 背景

提到：「新高中課程已實施了一個週期，教育局、課程發展議會和香港考試及評

核局攜手檢視所有學習領域的課程及評估。根據不同持份者的意見及建議，現對課程內容作出一些修訂，以提高課程及評估實施的成效。」

我想作為比較參考的對象已經足夠，時間上已經算是上 99 課綱差不多的時間點，而實際上也可以從課程單元變動摘要的部分得到空間課程的部分改動為以下幾點：(此部分可參考[39][40])

必修部分：

(1) 有關理解投影的概念、一線與一平面的相交角和兩平面的相交角的學習順序往前。

(2) 新增了三垂線定理。

選修部分：

(1) 刪去純量三重積

(2) 刪去運用純量三重積求平行六面體的體積

此研究將對 2013 年版本的香港數學課綱進行比較研究，關注的將是其中空間課程，立體幾何、立體圖形、空間概念、空間向量等將都是要注意的點。詳細的說明將放置於第四章研究結果。

3.中國

中華人民共和國教育部[41]，其網址為：http://www.moe.gov.cn/

依序點選：公開 > 教育部文件 > 教材局

由於此網站似乎沒做太多的分類與細節規畫，難以找到本研究所需要的特定資料，因此我選擇直接輸入關鍵字:「普通高中数学课程标准」進行搜尋，進而找

到以下資料。

「咨询义务教育数学课程标准相关问题」[42]，網址為：

http://www.moe.gov.cn/jyb_hygq/hygq_zczx/moe_1346/moe_2870/202101/t20210119_510362.html

有人對於近年課程標準的疑問，教育部的回答中提到：「关于普通高中数学课程标准。2003 年 4 月，教育部研制印发《普通高中数学课程标准（实验）》，2017 年 12 月，修订印发了《普通高中数学课程标准（2017 年版）》，2020 年 5 月修订印发了《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》。（教材局提供）」

2003 年版的過於老舊，而 2020 年修訂的版本又過新，因此決定以 2017 年版的作為主要分析對象，在教育部以「普通高中数学课程标准（2017 年版）」為關鍵字，可以找到：

教育部关于印发《普通高中课程方案和语文等学科课程标准（2017 年版）》的通知[43]，其網址為：

http://www.moe.gov.cn/srcsite/A26/s8001/201801/t20180115_324647.html

並且於其附件：《普通高中课程方案和语文等学科课程标准（2017 年版）》（以此为准 2018 年 8 月 15 日） 下載其 2017 年版的中國數學課綱。

此研究將對這 2017 年版本的中國數學課綱進行比較研究，2020 年修訂版本作為未來的參考用，關注的將是其中空間課程，立體幾何、立體圖形、空間

概念、空間向量等將都是要注意的點。詳細的說明將放置於第四章研究結果。

3-3-3 資料分析

將以上小節所蒐集到的資料，進行整理與分析。由於只關注空間的部分，並不用整份課綱都要翻閱，主要重點對象會是空間概念、空間向量、立體圖形、立體幾何等，若沒有相關關鍵字，也會說明與紀錄。

因為香港與中國這兩個國家使用的皆為中文，在語言上是沒什麼難度的，很容易與理解詞意也可以找出關鍵字。日本是要多注意的，然而可以由其中的漢字與使用翻譯來做出判斷，於資料中的目錄可以清楚了解各冊的各單元，可使用「空間」作為關鍵字做搜尋。若有不懂的專有名詞，將會上網以日文做搜尋，查出其原意為何，其餘詳細的分析將於第四章研究結果做說明。

第四章 研究結果

本章節欲為本研究所關心的問題，找尋可支持作為結論的證據。

1. 檢驗高中生在學測數學這樣的大考中，表現得如何？空間是否真的是一個較困難的單元？

2. 有多少科系會真正應用到高中數學空間課程的知識點與概念？

3. 檢視其他亞洲國家的高中數學，是否也有空間相關的單元？又是放了哪些內容？

本章節也根據上一章第三章研究方法所蒐集的資料，進行整理與分析，與歸納出自己的結論。

4-1 歷年學測數學中空間相關的題目難度之分析

在 101 至 110 年的學測數學當中，空間相關的題目共有 25 題，其中就有 15 題低於平均，更有 7 題低於一個標準差。再者，由於題目眾多，許多題目的答對率皆為相同的數字，因此決定將相同答對率的題目歸為同類，例如答對率皆為 13% 的 104-14、104-19、104-14、110-16 這三題，將被歸為同類，皆屬於倒數第二。

值得關注的是在最低的 10 類答對率之題目當中，就有 7 題是空間相關的題目。這個顯著的現象足以說明空間相關的題目，是大部分學生表現不好的地方。

在此特別提出空間相關的題目中，答對率特別高或是特別低的題目，檢視

一下為何會是這樣，分析這些題目為何答對率特別高或特別低。由我個人做題寫下解題思路，和參考網路上做法，以及考生可能會做出的選擇判斷來講。

以高於一個標準差為標準，當作答對率特別高的門檻，答對率高的以：103-2、109-13、107-11 這三題做為分析，其中 107-11 的 z 分數約為 0.9818，雖然沒超過一個標準差，但非常接近，還是納入分析中。

以低於一個標準差為標準，當作答對率特別低的門檻，答對率低的以：101-20、110-20、102-20、107-20、105-20、104-14、104-19 這七題作為分析。

最後再檢視這些題目是否有什麼共同的特質，是什麼因素造成低答對率，也會與 111 年的學測數學題目作為比較對象，並且歸納出自己的猜測與結論。

4-1-1 答對率高的題目之分析

1.學測試題 103-2

2. 令 $A(5,0,12)$、$B(-5,0,12)$ 為坐標空間中之兩點，且令 P 為 xy 平面上滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=13$ 的點。請問下列哪一個選項中的點可能為 P？

(1) $(5,0,0)$

(2) $(5,5,0)$

(3) $(0,12,0)$

(4) $(0,0,0)$

(5) $(0,0,24)$

圖 5 學測試題 103-2

首先注意到 103 年的單選第 2 題，此題答對率高達 74%，是空間相關中答對率最高的題目，是 103 年學測數學中答對率第二高的題目，位於整體排名的

第 12 位。不論是在該份試題，或是歷屆學測數學各年份來看，高達 74% 的答對率都是相當高的。

而此題真的是如此簡單，只要有簡單的空間概念與空間坐標系的概念便可以正確作答這題。由於數字簡單，計算是容易的，數感好的人可以由常見的三邊長為 5、12、13 的直角三角形來判斷，甚至連基本的計算都不用也可作答。

解題思路為：由於A, B兩點對稱於z軸，且$\overline{PA} = \overline{PB} = 13$，因此$P$點必在$\overline{AB}$之中垂面上的一個圓，且題目說$P$點在$xy$平面上，符合的選項僅有選項(4)

若不會也無妨，只需要知道空間中的兩點距離如何計算，代入選項便可判斷。選項的數字也出得很簡單，對於大部分學生而言是可以的；與A點距離為 13 的選項僅有選項 (2)、(4)、(5)，然而考慮與B點也是距離為 13，便只剩下選項 (4)。

由此分析，此題會有如此高的答對率並不意外。

2.學測試題 109-13

13.如示意圖，四面體 $OABC$ 中，ΔOAB 和 ΔOAC 均為正三角形，$\angle BOC=30°$。試選出正確的選項。

(1) $\overline{BC}>\overline{OC}$

(2) ΔOBC 是等腰三角形

(3) ΔOBC 的面積大於 ΔOAB 的面積

(4) $\angle CAB=30°$

(5) 平面 OAB 和平面 OAC 的夾角（以銳角計）小於 $30°$

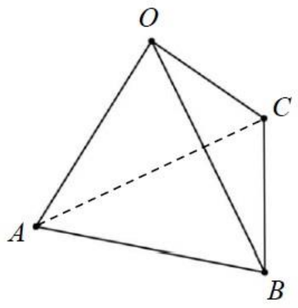


圖 6 學測試題 109-14

109 年的多選第 13 題，此題答對率約為 64%，在 109 年學測數學中位於第 8 位，整體排名的第 38 位。是多選題中空間相關題目答對率最高的一題，全對率約為 44%，在多選題的排名中位於第 14 位

此題考的是四面體的空間概念，計算需求不大，考的多半是平面幾何與立體幾何的基本觀念，掌握這些基本觀念可以快速的解決此題。

解題思路：(1)、(2)可以一起看，因為ΔOAB、ΔOAC均為正三角形，且有共用邊$\overline{OA}$，因此有$\overline{OC}=\overline{OB}$，得到$\Delta OBC$為等腰三角形，且依照提意：$\angle BOC=30°$，可以得到$\angle OBC=\angle OCB=75°$，再由三角形大角對大邊之性質，可以判斷$\overline{OC}=\overline{OB}>\overline{BC}$，故此得到(1)錯，(2)對

由三角形面積公式可以求得：

$$\Delta OBC\text{面積為}\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{OB}\times\sin 30°$$

$$\Delta OAB\text{面積為}\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin 60°$$

由於$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，因此可以得到$\Delta OAB$面積大於$\Delta OBC$面積，選項(3)錯

由於$\overline{OC}=\overline{AC},\ \overline{OB}=\overline{AB},\ \overline{BC}=\overline{BC}$，根據三角形的$SSS$全等性質，有$\Delta OCB\cong\Delta ACB$，因此$\angle CAB=\angle COB=30°$。故(4)也對。

要求平面OAB與平面OAC之夾角，若令$\overline{OA}$ 中點為D，作$\overline{DC},\overline{DB}$，$\angle CDB$即為平面$OAB$與平面$OAC$之夾角，有$\overline{DC}=\overline{DB}=\overline{OB}\times\cos 30°<\overline{OB}$，可以判斷$\angle CDB>\angle COB$。且由於所涉皆為特殊角，用餘弦定理也可解此選項，故(5)錯。

基本上 (1)、(2) 選項設計的簡單，也是作為後續選項(3)的引導，選項(4)也是三角形的全等性質即可解決，頂多選項(5)會有點困難，但依然可以使用上述說明的解法快速地解決，不一定需要設未知數來進行計算，整題皆都用平面幾何與立體幾何的觀念來解題。

3.學測試題 107-11

11. 坐標空間中，設直線 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z}{-1}$，平面 $E_1:2x-3y-z=0$，平面 $E_2:x+y-z=0$。試選出正確的選項。

(1)點 $(3,0,-1)$ 在直線 L 上

(2)點 $(1,2,3)$ 在平面 E_1 上

(3)直線 L 與平面 E_1 垂直

(4)直線 L 在平面 E_2 上

(5)平面 E_1 與 E_2 交於一直線

圖 7 學測試題 107-11

此題為 107 年的多選題 11，答對率約為 63%，是 107 學測數學中答對率第

二高的，整體排名於第 39 位，全對率約為 44%。

此題是空間中直線與平面的題目，給了一直線L與兩平面E_1 ,E_2的方程式，選項皆是問關於某點是否在直線與平面上、直線與平面的關係、平面與平面的關係，沒有任何關於未知數的代數操作，數字簡單無刁難，屬於非常基本且簡單的題目，也會是平常課本與小考就出現的題目。此題就不特別寫過程，就此我想這題有較高的答對率是很正常的。

4-1-2 答對率低的題目之分析

以下關注答對率特別低的幾題，依照答對率由高至低來作排序。

1.學測試題 101-20

G. 坐標空間中，在六個平面$x=\frac{14}{13}$, $x=\frac{1}{13}$, $y=1$, $y=-1$, $z=-1$及$z=-4$所圍成的長方體上隨機選取兩個相異頂點。若每個頂點被選取的機率相同，則選到兩個頂點的距離大於3之機率爲$\frac{㉜}{㉝}$。（化成最簡分數）

圖 8 學測試題 101-20

101 年的選填 G，此題答對率約為 23%，是 101 年的學測數學中答對率最低的一題，整體排名位於第 174 位，(倒數 27)。

此題雖然與機率有關，但由於此要跟空間相關的任何題目都被歸類於此，因此還是要討論此題，此題的測驗目標是空間坐標系與平面方程式的理解，並且結合了機率，是個跨單元的考題。

由題意可以知道，$x=\frac{14}{13}$、$x=\frac{1}{13}$ 兩平面平行且距離為1、$y=1$、$y=-1$ 兩平面平行且距離為2、$z=-1$、$z=-4$ 兩平面平行且距離為3，可將此長方體類比為一個長為 2、寬為 1、高為 3 的長方體，且長方體共八個頂點，要找的就是這些頂點間的距離，邊長最大為 3，因此不符合要件，可能的只有每個面的對角線或是長方體的對角線；可以由畢氏定理得出：兩邊長為3、1的長方形對角線、兩邊長為3、2的長方形對角線、長方體的對角線；分別各四條，共 12

個。而全體事件共有$\binom{8}{2} = 28$個，因此機率為$\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$。

個人猜測是學生不熟悉跨單元的題目，尤其空間與機率結合的題目相當少見，而六個平面看似嚇人，也少見這樣的敘述；搭配上機率，讓不少學生覺得困難，注意到六個平面的關係，若能類比為長方體，實際上是個不難的題目。考驗學生對於空間坐標系的理解與操作。

2.學測試題 110-20

G. 在四面體 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=4\sqrt{6}$、$\overline{BD}=\overline{CD}=8$，且 $\cos\angle BAC=\frac{1}{3}$，則點 D 到平面 ABC 的距離為 $\underline{㉛\sqrt{㉜}}$。（化成最簡根式）

圖 9 學測試題 110-20

此題為 110 學測的選填 G，答對率約為 21%，為 110 年學測數學中答對率倒數第三高的題目，整體排名位於第 186 位 (倒數 15)。

解題思路：先試著由題意畫圖，並用餘弦定理求出$\overline{BC} = 8\sqrt{2}$，這邊就是重點，可以由$\Delta BCD$三邊長為$8, 8, 8\sqrt{2}$，得出$\Delta BCD$為等腰直角三角形，$\angle D = 90°$，並且作$A$到$\Delta BCD$的投影點$G$，也有$\overline{GB} = \overline{GC} = \overline{GD}$，因此$G$為$\Delta BCD$的外心，也就是 $\overline{BC}$之中點，並且得到$\overline{AG}$垂直平面BCD，因此有：「**平面$\boldsymbol{BCD}$與平面$\boldsymbol{ABC}$垂直**」，由此可以很快得到點D到平面ABC距離即為$\overline{GD} = 4\sqrt{2}$

此解法相當漂亮與巧妙，看似困難的問題變得非常簡單，這也是現在多數詳解會寫的作法，當然我想在考試的當下，又有幾位學生能夠領悟出這些細節？

此題相當考驗學生的空間概念的觀念。若無法察覺此四面體的特殊性，恐怕學生會不知所措，也會覺得複雜而不想寫此題。考量到此題為當份試卷最後一題，而在 110 這份試卷中前面也不少難題，會呈現較低的答對率並不意外。

3.學測試題 102-20

H. 如下圖，在坐標空間中，A,B,C,D,E,F,G,H 為正立方體的八個頂點，已知其中四個點的坐標 $A(0,0,0)$、$B(6,0,0)$、$D(0,6,0)$及 $E(0,0,6)$，P 在線段 $\overline{CG}$ 上且 $\overline{CP}:\overline{PG}=1:5$，$R$ 在線段 $\overline{EH}$ 上且 $\overline{ER}:\overline{RH}=1:1$，$Q$ 在線段 $\overline{AD}$ 上。若空間中通過 P,Q,R 這三點的平面，與直線 AG 不相交，則 Q 點的 y 坐標為 $\dfrac{㉜㉝}{㉞㉟}$。(化成最簡分數)

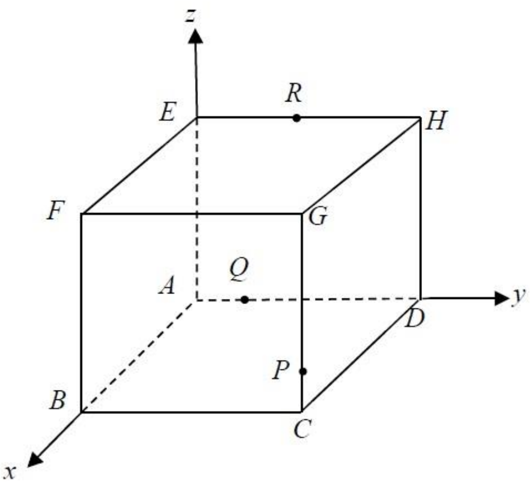


圖 10 學測試題 102-20

此題為 102 學測數學的選填 H，答對率約為 18%，為 102 學測數學中答對率倒數第二高的題目，整體排名位於第 189 位 (倒數 12)。

可以先求出點P與點R之坐標，並且利用此平面與$\overline{AG}$不相交之性質，可以用$\overrightarrow{RP}$、$\overrightarrow{AG}$ 兩向量作外積，求得平面PRQ之方向向量與其平面方程式。再代入Q點所在的y軸，即可求得Q點之坐標。

基本上個人認為不難，P與點R之坐標是很好求得的，可能是平面PRQ之平面方程式上的求法會有困難，此題考驗平面方程式的理解與應用。

4.學測試題 107-20

H. 將一塊邊長 $\overline{AB}=15$ 公分、 $\overline{BC}=20$ 公分的長方形鐵片 $ABCD$ 沿對角線 $\overline{BD}$ 對摺後豎立，使得平面 ABD 與平面 CBD 垂直，則 A、C 兩點（在空間）的距離 $\overline{AC}=\sqrt{\text{(31)(32)(33)}}$ 公分。（化成最簡根式）

圖 11 學測試題 107-20

此題為 107 學測數學的選填 H，答對率約為 17%，為 102 學測數學中答對率最低的一題，整體排名位於第 192 位 (倒數 9)。

要知道空間中的$\overline{AC}$不可能是對角線長，實際上這題就算是正方形也不是對角線長，因為是空間中的距離，而非平面上的距離，這是考生可能會做錯的部分。

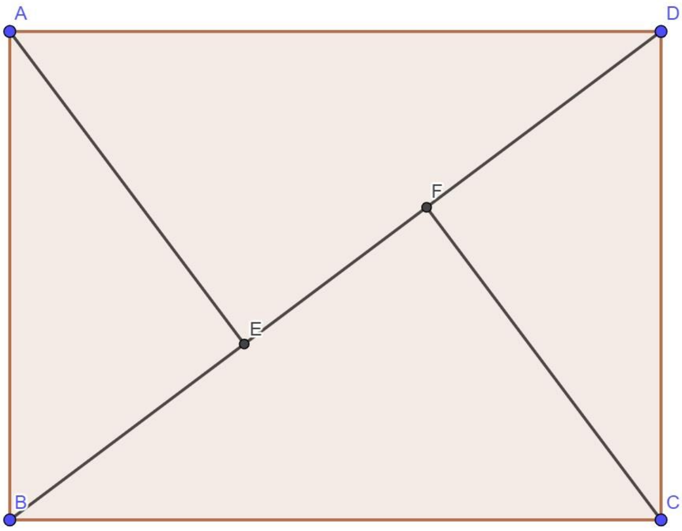


圖 12 學測試題 107-20 平面圖

在$\overline{BD}$上作E, F使得，$\overline{AE}\perp\overline{BD}$,$\overline{CF}\perp\overline{BD}$，可用畢氏定理與相似形求得：

$\overline{BD} = 25$、$\overline{AE} = \overline{CF} = 12$、$\overline{BE} = \overline{DF} = 9$，因此$\overline{EF} = 25 - 18 = 7$。依照題意，將$\overline{BD}$對摺，使平面$ABD$與平面$BCD$垂直

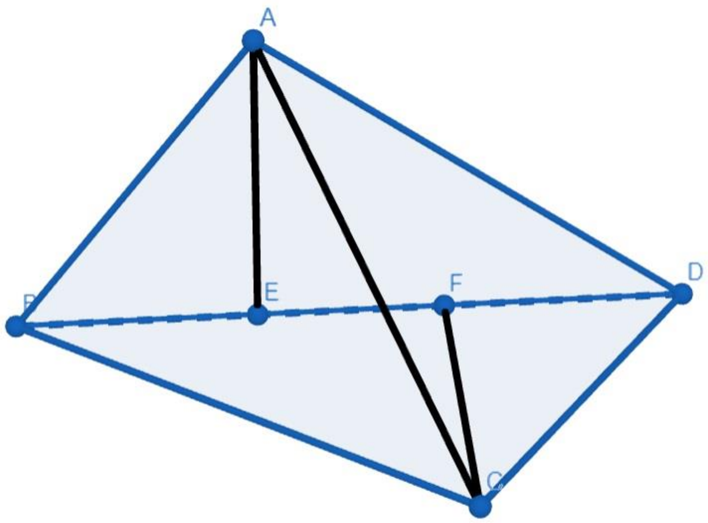


圖 13 學測試題 107-20 立體圖

此時$\overline{AC}$長即為A, C兩點的x, y, z坐標之差的平方和再開根號(空間中兩點距離公式)，注意：因為$\overline{AE}, \overline{EF}, \overline{FC}$兩兩垂直，因此可視作再空間坐標中的三軸。

因此$\overline{AC} = \sqrt{(\overline{AE})^2 + (\overline{EF})^2 + (\overline{FC})^2} = \sqrt{12^2 + 7^2 + 12^2} = \sqrt{337}$。

此題相當考驗空間概念能力、抽象思考能力。若無法建構出平面圖行到立體圖形的變化，將無法順利作答，相信會有此低答對率也是因為這樣。

5.學測試題 105-20

G. 如右圖所示，$ABCD-EFGH$ 為一長方體。若平面 BDG 上一點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+a\overrightarrow{AE}$，則實數 $a=\dfrac{㉚}{㉛}$。（化成最簡分數）

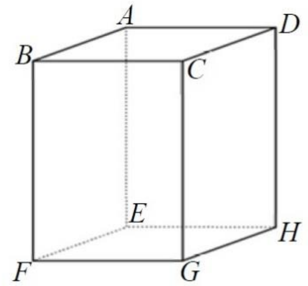


圖 14 學測試題 105-20

此題為 105 學測數學的選填 G，答對率約為 15%，為 105 學測數學中答對率最低的一題，整體排名位於第 195 位 (倒數 6)。

此題有兩種常見的做法，在此各別說明兩者。方法一：

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+a\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+a\left(\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=(\frac{1}{3}-a)\overrightarrow{AB}+(2-a)\overrightarrow{AD}+a\overrightarrow{AG}$$

因為B,D,G 在同一平面，所以根據共面定理：

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}$ ，若$x+y+z=1$，則B,C,D,P 四點共面

因此 $\frac{1}{3}-a+2-a+a=\frac{7}{3}-a=1$ ，得到$a=\frac{4}{3}$。

這是不少網路上找到的做法，值得注意的是：這個解法應用到了共面定理，然而共面定理並非課綱內所說的重點。且不論是 99 課綱還是現在的 108 課綱的教科書上未有提及，因此只能算是課外補充的作法。若沒學過，基本上是不可能會用的，在考試當下的學生我想也不太可能想出此做法。

在這邊提供另外一個課綱內的作法。方法二：

先找出BDG平面方程式，再由題目的關係式求出a。

令$A(0,0,0)$、$B(\alpha,0,0)$、$D(0,\beta,0)$、$E(0,0,-\gamma)$　(其中$\alpha,\beta,\gamma > 0$)，因此有：

$\overrightarrow{BD} = (-\alpha,\beta,0)$、$\overrightarrow{BG} = (0,\beta,-\gamma)$、$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BG} = (-\beta\gamma,-\alpha\gamma,-\alpha\beta)$

代入可求得平面BDG的方程式：$(\beta\gamma)x + (\alpha\gamma)y + (\alpha\beta)z = \alpha\beta\gamma$

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + a\overrightarrow{AE} = (\frac{\alpha}{3}\ ,2\beta\ ,-a\gamma)$　，此也是P點坐標，代入平面BDG的方程式即可求得a：

$$\frac{(\alpha\beta\gamma)}{3} + 2(\alpha\beta\gamma) - a(\alpha\beta\gamma) = (\frac{7}{3} - a)(\alpha\beta\gamma) = (\alpha\beta\gamma)$$

有$\frac{7}{3} - a = 1$，因此$a = \frac{4}{3}$。

當然在考試現場，為了求速度與好算，A,B,D,E四點的坐標皆可自己設為自己好算的數字，相信不少考生也會這樣做，在此不特別講，此部分只是用最廣義的方式去做解題。

此題相當考驗空間坐標系與空間向量的應用以及平面方程式。若無法靈活應用，此題將無法順利解出，而且會感到非常困難。

6.學測試題 104-14

D. 平面 $x-y+z=0$ 與三平面 $x=2$，$x-y=-2$，$x+y=2$ 分別相交所得的三直線可圍成一個三角形。此三角形之周長化成最簡根式，可表為 $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ ，其中 a, b, c, d 為正整數且 $b<d$，則 $a=$ ⑰ ，$b=$ ⑱ ，$c=$ ⑲ ，$d=$ ⑳ 。

圖 15 學測試題 104-14

此題為 104 學測數學的選填 G，答對率約為 13%，為 104 學測數學中答對率最低的一題，整體排名位於第 198 位 (倒數 3)，與下一題答對率相同，皆為 13%，也是空間題目中答對率最低的一題。

直接去算即可，設$x-y+z=0$ 與三平面$x=2$、$x-y=-2$、$x+y=2$分別交於三直線：L_1：$(2,a,a-2)$、L_2：$(b,b+2,2)$、L_3：$(c,2-c,2-2c)$。此為空間中的直線參數式，其中$a,b,c\in R$。並設L_1交L_2於$A(2,4,2)$，L_2交L_3於$B(0,2,2)$，L_3交L_1於$C(2,0,-2)$。有$\overline{AB}=2\sqrt{2}$、$\overline{BC}=2\sqrt{6}$、$\overline{CA}=4\sqrt{2}$。所以此三角形周長可以化簡為：$6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$。

觀念比較好的人也可直接去求空間中三角形之三點，再去算三角形的周長也可，做法上大同小異。

在此提供另外一個做法：仔細觀察，會發現此題的三個平面皆無z項，也就是說三平面都會與xy平面垂直，三平面的交線也必然垂直於xy平面，將此視為三直線在xy平面上，三個交點分別為A$(2,4,0)$, $B(2,0,0)$, $C(0,2,0)$，計算所圍三角形周長為$4+4\sqrt{2}$。

而設題目所給的平面：$x-y+z=0$與三平面所交集的三角形為ΔDEF，會有ΔDEF投影在xy平面上即是ΔABC。因此，題目所欲求之三角形周長：$(4+4\sqrt{2})\times\frac{1}{\sin\theta}$ （θ為平面：$x-y+z=0$之法向量與xy平面之夾角）亦可以求得。

實際上不管是哪個做法，都會耗費時間與精力，觀念沒那麼好的人恐怕會覺得很困難，考量到考試時間因素與壓力感，確實會讓人容易出錯與選擇跳過此題。此題非常考驗空間概念與抽象思考的能力，需要將代數式子與三維空間作結合，是個數形合一的題目，若無法將代數式子與圖形做結合，或是有三維空間的想像能力，將很難做出此題。在平面圖形上畫三維空間的圖已經夠難

了，更別說此題會有四個平面，恐怕許多考生光看題目敘述會搞不懂此提的四個平面與三個直線會呈現怎樣的關係。有低答對率並不意外。

7.學測試題 104-19

I. 在空間中，一個斜面的「坡度」定義為斜面與水平面夾角 θ 的正切值 $\tan\theta$。若一金字塔（底部為一正方形，四個斜面為等腰三角形）的每一個斜面的坡度皆為 $\frac{2}{5}$，如圖。則相鄰斜面的夾角的餘弦函數的絕對值為 $\frac{㉜㉝}{㉞㉟}$。（化為最簡分數）

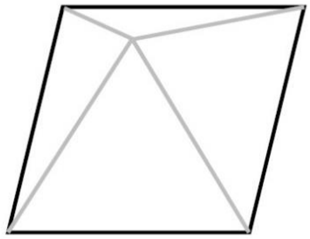


圖 16 學測試題 104-19

此題為 104 學測數學的選填 I，答對率約為 13%，為 104 學測數學中答對率最低的一題，整體排名位於第 198 位 (倒數 3)。然而綜觀整體排名，可以算是實質上的倒數第 2，也是空間題目中答對率最低的一題。

由於此題不容易用文字說明，附上使用 GGB 軟體所繪製的立體圖，將使用上面的符號進行解題說明。

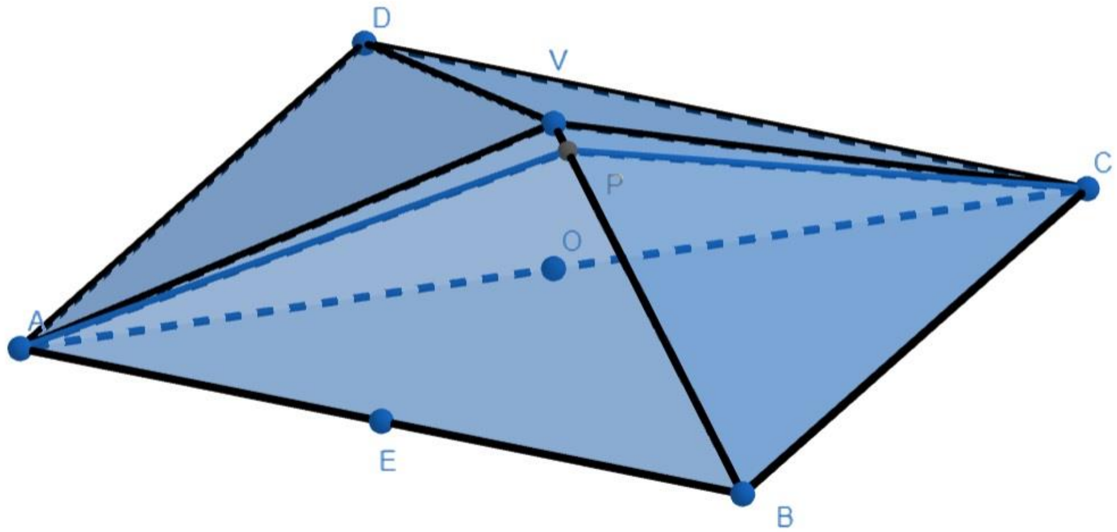


圖 17 學測試題 104-19 立體圖

將此金字塔各頂點以上圖作標示，其中點V為金字塔的上端頂點，自V作底面之垂線，垂足為點O，點E為$\overline{AB}$之中點，自A,C向$\overline{BC}$作垂線，垂足為同一點P，有$\overline{AP}\perp\overline{VB}$,$\overline{CP}\perp\overline{VB}$，$\angle APC$為題目所求之相鄰斜面的夾角，也就是兩面角。

由題意之坡度為$\frac{2}{5}$，不妨設$\overline{VO}=2$,$\overline{OE}=5$，可求得：$\overline{VE}=\sqrt{29}$

根據三垂線定理，可知$\overline{VE}\perp\overline{AB}$，$\overline{VB}=3\sqrt{6}$

ΔABV之面積$=5\sqrt{29}=\overline{VB}\times\overline{AP}\div 2=\overline{AP}\times 3\sqrt{6}\div 2$

因此$\overline{AP}=\overline{CP}=\frac{10\sqrt{29}}{3\sqrt{6}}$

最後使用餘弦定理求兩面角之夾角餘弦值

$$\cos\angle APC=\frac{\overline{AP}^2+\overline{CP}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{AP}\times\overline{CP}}=\frac{-25}{29}$$

題目所求之兩面角之夾角餘弦值的絕對值為$\frac{25}{29}$

再此提供另外一個使用空間向量的解法：

架設坐標系：$A(5,-5,0)$、$B(5,5,0)$、$C(-5,5,0)$、$D(-5,-5,0)$、$V(0,0,2)$

$$\overrightarrow{VA}=(5,-5,-2)\text{、}\overrightarrow{VB}=(5,5,-2)\text{、}\overrightarrow{VC}=(-5,5,-2)$$

令$\vec{u}=\overrightarrow{VA}\times\overrightarrow{VB}=(20,0,50)$,$\vec{v}=\overrightarrow{VB}\times\overrightarrow{VC}=(0,20,50)$

$$\cos\angle APC=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{25}{29}$$

求得兩平面的法向量，便可以利用公式求出其兩向量之夾角餘弦值。因為此題目是要求絕對值，所以不須管正負，值得注意的是實際上$\angle APC$為鈍角。

此題考驗空間概念、兩面角的定義與計算，猜測許多學生對於兩面角的定義與如何計算是非常不熟悉的，第一個做法為應用空間概念，較為困難，而第二個做法只需假設坐標後，使用空間向量便可求得，此為「成法」，遵循固定做法即可解題，但此題依然有低答對率，可能代表這部分的教學成效不佳。

以上針對答對率較低的幾題作分析，可以發現多數皆與「空間概念」的知識點有關，可能是學生在這邊出了許多問題，同樣是空間相關的題目，只要是給了完整的坐標、直線方程式或是平面方程式，問關於點、直線、平面之間的關係，其答對率可以較高，如同 103-2、107-11 這幾題；因此可以判斷學生並非不會這些單元的基本概念，甚至還做得不差，只要夠基礎依然可以是答對率高的題目。而會有較低的答對率的題目是空間概念的不足所致，或是說這方面較弱，也可以說是立體幾何的觀念不好。個人猜測這可能與課綱中把空間概念弱化有關。

有人可能會猜測是題目長度影響了答對率的高低，然而實際檢驗，發現每一年的試題中，答對率最低的並非是敘述長的，更甚至不少題目敘述簡短，依然有低答對率，敘述最長往往會是數據統計的題目，可是這部分的題目答對率

往往都較高，因此認為題目長度並非影響答對率高低之關鍵。

4-1-3 111 學測數學的情況

再來將檢驗 111 年的學測數學，是否也有這樣的現象，111 年的學測數學有三題，分別是：111-11 答對率 38%、111-16 答對率 18%、111-17 答對率 5%，三題皆都低於 101-110 年的歷屆的平均答對率 45.355%，值得注意的是 111-16、111-17 這兩題的低答對率更是直接能夠位於 101-110 年的歷屆排行中最難的幾題當中。以下將關注這三題，檢視是否應用到「空間概念」的知識點，以及分析其難處為何。

1.學測試題 111-11

11. 下圖為一個積木的示意圖，其中 ABC 為一直角三角形，$\angle ACB = 90^\circ$，$\overline{AC} = 5$、$\overline{BC} = 6$，且 $ADEB$ 與 $ADFC$ 皆為矩形。試選出正確的選項。

(1) 將此積木沿平面 ACE 切下，可切得兩個四面體

(2) 平面 $ADEB$ 與 $ADFC$ 所夾銳角大於 45°

(3) $\angle CEB < \angle AEB$

(4) $\tan\angle AEC < \sin\angle CEB$

(5) $\angle CEB < \angle AEC$

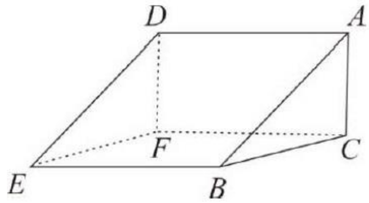


圖 18 學測試題 111-11

選項(1)要有空間概念與抽象思考能力，其餘選項除了空間概念以外，更加考驗三角比的應用，能否理解適當立體圖形的幾何關係，以及適當的列式與比大小，基本上觀念不難，困難點在選項(3)(4)(5)的驗證上。

關於(2)(3)(4)(5)詳細的解題過程為以下：

(2)看三角形 ABC，其$\tan\angle BAC > 1 = \tan 45°$

(3)(4)(5) 算同一個題型，令$\overline{BE} = x$ 即可驗證，這些角度大小都用 tan 值來比較

(3) $\tan\angle CEB = \frac{6}{x}$,$\tan\angle AEB = \frac{\sqrt{5^2+6^2}}{x}$,

$\tan\angle CEB < \tan\angle AEB,\ \angle CEB < \angle AEB$

(4) $\tan\angle AEC = \frac{5}{\sqrt{x^2+6^2}}$,$\sin\angle CEB = \frac{6}{\sqrt{x^2+6^2}}$

(5) $\tan\angle CEB = \frac{6}{x} = \frac{30}{5x}$,$\tan\angle AEC = \frac{5}{\sqrt{x^2+6^2}} = \frac{30}{6\sqrt{x^2+6^2}}$,

$\tan\angle CEB > \tan\angle AEC$

最終選(2)(3)(4)

猜測學生多半是卡在(3)(4)(5)這幾個選項上，要完整列式驗證其正確性，並沒有那麼簡單。

2.學測試題 111-16

16. 坐標空間中，平面 $x-y+2z=3$ 上有兩相異直線 $L:\frac{x}{2}-1=y+1=-2z$ 與 L'。

已知 L 也在另一平面 E 上，且 L' 在 E 的投影與 L 重合。

則 E 的方程式為 $x+$ 16-1 16-2 $y+$ 16-3 16-4 $z=$ 16-5 。

圖 19 學測試題 111-16

此題為 104 學測數學的選填 16，答對率約為 18%，在 111 學測數學中位於第 15 名，也是倒數第 4 名的題目，而若放在 101-111 歷屆的排名中將會位於倒數第 5 類的低答對率。

注意關鍵「**L'在E的投影與L重合**」。代表「**平面E與平面$x-y+2z=3$ 垂直**」

將平面$x-y+2z=3$ 之法向量與直線L之方向向量，作外積，即可求出E的法向量。

$(1,-1,2)\times\left(2\ ,1\ ,\frac{-1}{2}\right)=\left(\frac{-3}{2}\ ,\frac{9}{2}\ ,3\right)$ ，$(\frac{-3}{2}\ ,\frac{9}{2}\ ,3)//(1\ ,-3\ ,-2)$

得平面$E: x-3y-2z=k$ ，將直線L上一點$(2,-1,0)$ 代入求$k=5$

平面$E: x-3y-2z=5$

此題雖然給了直線與平面方程式，然而另外一個直線方程式並沒有給出，必須藉由直線在平面的投影，衍生出兩平面垂直的想法，才可以解此題，表面上是考平面方程式，背後是考空間概念，若沒有理解此題平面與直線的關係，將無法解出，包裝的很不錯。

3.學測試題 111-17

17. 坐標空間中一平行六面體，某一底面的其中三頂點為 $(-1,2,1),(-4,1,3),(2,0,-3)$，另一面之一頂點在 xy 平面上且與原點距離為 1。滿足前述條件之平行六面體中，最大體積為 <u>17-1 17-2</u> 。

圖 20 學測試題 111-17

111-17 答對率僅只有 5%，不但是 111 年學測數學中答對率最低的一題，此誇張的數據更是 101-111 歷年學測數學來答對率最低的一題了，甚至是前 20%的高分群學生也僅只有 18%的答對率，而其餘的考生僅有個位數的答對率。就數據來看是個非常詭異的情況，非常值得關注此題到底是怎麼了

以下為解題思路：

設A$(-1,2,1)$, $B(-4,1,3)$, $C(2,0,-3)$, $D(x,y,0)$, D點在xy平面上且符合$x^2+y^2=1$

此平行六面體為三向量$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$所決定，此平行六面體體積為：

$\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| = |[(-3,-1,2)\times(3,-2,-4)]\cdot(\mathrm{x}+1,\mathrm{y}-2,-1)|$

$=|(8,-6,9)\cdot(\mathrm{x}+1,\mathrm{y}-2,-1)| = |8(x+1)-6(y-2)-9| = |8x-6y+11|$

為求$|8x-6y+11|$之最大值，考慮$x^2+y^2=1$之條件，可用柯西不等式：

$(x^2+y^2)(8^2+(-6)^2)\geq(8x-6y)^2$

$100\geq(8x-6y)^2$ ，$10\geq 8x-6y\geq-10$

$|8x-6y+11|$之最大值為$10+11=21$

因此，平行六面體體積之最大值為21

此題將空間坐標系、平行六面體體積公式、距離公式、柯西不等式做結合，非常有想法，此作法需要用到柯西不等式，實際上還有不同的求極值作法，像是可用三角疊合等作法，就不一一放上。

理解題意所說「三頂點與另一面之一頂點在 xy 平面上且與原點距離為 1。滿足前述條件之平行六面體中三個點向量中」需要用到空間概念，若是概念不佳的考生恐怕在理解題意上就有困難，又加上考了罕見的平行六面體之體積 至少十年未曾出現在學測數學中，還要求極值，眾多因素讓絕大多數的考生都無法面對，進而產生了超低答對率。

由上面三題關於 111 年學測數學的分析，可以發現不但這三題空間相關的題目都是低答對率，而且共通點是都與空間概念有密切的關係。

4-2 大學課程之相關性

先說明判斷有關聯的標準為以下幾點：

1.三維空間的圖示與應用、需要有空間概念才好理解的部分。

2.空間坐標系、空間向量與之應用。

3.平面方程式、空間中的直線方程式與之應用。

只要有符合其中一點，便符合標準，將判定為與空間課程有關。有些若只是文字提及，而沒有出現相應式子與圖示，並無深入講解的部分將不列入。

以下針對「普通物理」、「普通化學」、「經濟學」、「統計學」四個科目作分析，以不同科目依序分成四小節，各別說明各科的情況。

4-2-1 普通物理

文本資料：David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker《Fundamentals of Physics》10th Edition[27]

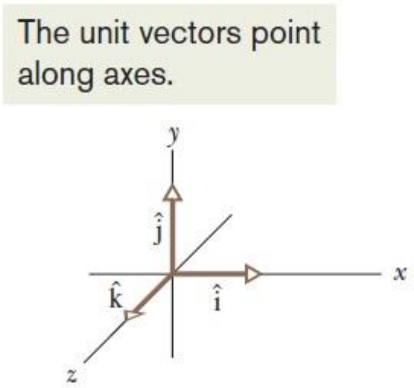
在整本書中，盡可能將空間相關的部分記錄下來，由於個人時間與精力有限，其中不包含過多的文字敘述，還有每章節的例題或背後的習題斟酌參考，若有重複或類似的部分也不特別列出，像是此書的第三章，有許多類似的內容。將只舉例第一次出處，後面有重複或類似的部分將不再重複列出，多次提及的會做備註。此外，雖然許多物理概念必定與空間有所關聯，但若處理問題

的方法是以二維為主，將不在此記錄，因為不需要空間的任何知識與工具也可理解與解決問題。

以下是文本中的資料整理：依照頁碼順序做編排，出現的數學式子如果不需要前後文，將自己打成數學式子記錄下來。

表 6 普通物理內容之整理

原文書內容	說明與備註	頁碼
● Unit vectors $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$, and $\hat{\mathrm{k}}$ have magnitudes of unity and are directed in the positive directions of the x, y, and z axes, respectively, in a right-handed coordinate system. We can write a vector $\vec{a}$ in terms of unit vectors as $\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}},$ 圖 21 普通物理 Fundamentals of Physics p.46-1 in which $a_x\hat{\mathrm{i}}$, $a_y\hat{\mathrm{j}}$, and $a_z\hat{\mathrm{k}}$ are the vector components of $\vec{a}$ and a_x, a_y, and a_z are its scalar components. ● To add vectors in component form, we use the rules $r_x = a_x + b_x \quad r_y = a_y + b_y \quad r_z = a_z + b_z.$ Here $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are the vectors to be added, and $\vec{r}$ is the vector sum. Note that we add components axis by axis. 圖 22 普通物理 Fundamentals of Physics p.46-2	Chapter 3 Vectors 3.2 Unit vectors, Adding vectors by components 說明任何向量，都可以寫成三個方向的單位向量之線性組合 在此章節後面還會出現大量類似的向量式子。 本書首次出現空間坐標系的圖。	p.46

 **Figure 3.13** Unit vectors $\hat{i}$, $\hat{j}$, and $\hat{k}$ define the directions of a right-handed coordinate system. 圖 23 普通物理 Fundamentals of Physics p.46-3		

<table>
<tr>
<td>
● The product of a scalar s and a vector $\vec{v}$ is a new vector whose magnitude is sv and whose direction is the same as that of $\vec{v}$ if s is positive, and opposite that of $\vec{v}$ if s is negative. To divide $\vec{v}$ by s, multiply $\vec{v}$ by $1/s$.

● The scalar (or dot) product of two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is written $\vec{a} \cdot \vec{b}$ and is the scalar quantity given by

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi,$$
in which ϕ is the angle between the directions of $\vec{a}$ and $\vec{b}$. A scalar product is the product of the magnitude of one vector and the scalar component of the second vector along the direction of the first vector. In unit-vector notation,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}) \cdot (b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}),$$
which may be expanded according to the distributive law. Note that $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

圖 24 普通物理 Fundamentals of Physics p.50-1

● The vector (or cross) product of two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is written $\vec{a} \times \vec{b}$ and is a vector $\vec{c}$ whose magnitude c is given by

$$c = ab \sin \phi,$$
in which ϕ is the smaller of the angles between the directions of $\vec{a}$ and $\vec{b}$. The direction of $\vec{c}$ is perpendicular to the plane defined by $\vec{a}$ and $\vec{b}$ and is given by a right-hand rule, as shown in Fig. 3-19. Note that $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$. In unit-vector notation,

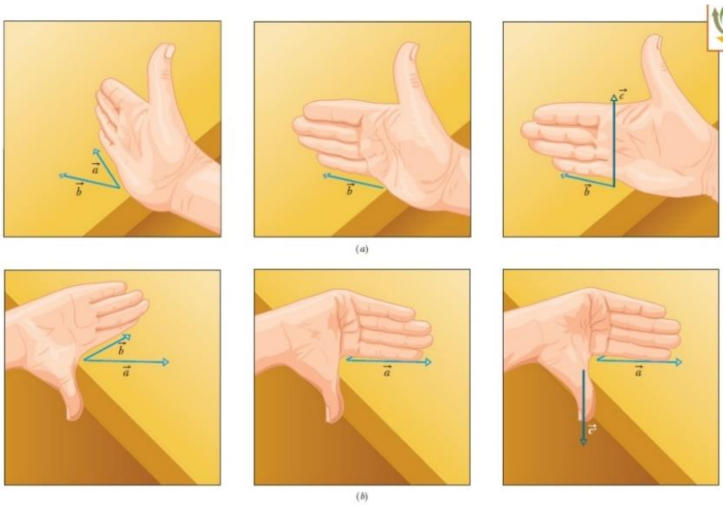
$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}) \times (b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}),$$
which we may expand with the distributive law.

● In nested products, where one product is buried inside another, follow the normal algebraic procedure by starting with the innermost product and working outward.

圖 25 普通物理 Fundamentals of Physics p.50-2
</td>
<td>
Chapter 3 Vectors

3.3 Multiplying Vectors

此部分為向量的內積與外積，並且是用空間向量來做示範，此章節還有許多例子，不一一貼上。
</td>
<td>
p.50
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
Figure 3-19 Illustration of the right-hand rule for vector products. (a) Sweep vector $\vec{a}$ into vector $\vec{b}$ with the fingers of your right hand. Your outstretched thumb shows the direction of vector $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. (b) Showing that $\vec{b} \times \vec{a}$ is the reverse of $\vec{a} \times \vec{b}$.
圖 26 普通物理 Fundamentals of Physics p.53</td>
<td>Chapter 3 Vectors
3.3 Multiplying
Vectors

右手法則的圖示</td>
<td>p.53</td>
</tr>
<tr>
<td>● The location of a particle relative to the origin of a coordinate system is given by a position vector $\vec{r}$, which in unit-vector notation is
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$$
Here $x\hat{i}$, $y\hat{j}$, and $z\hat{k}$ are the vector components of position vector $\vec{r}$, and x, y, and z are its scalar components (as well as the coordinates of the particle).
● A position vector is described either by a magnitude and
圖 27 普通物理 Fundamentals of Physics p.62-1

one or two angles for orientation, or by its vector or scalar components.
● If a particle moves so that its position vector changes from $\vec{r}_1$ to $\vec{r}_2$, the particle's displacement $\Delta\vec{r}$ is
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$
The displacement can also be written as
$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}.$$
圖 28 普通物理 Fundamentals of Physics p.62-2</td>
<td>Chapter 4 Motion in
Two and Three
Dimensions
4-1 POSITION AND
DISPLACEMENT
Position And
Displacement
第四章的主題為二為
與三維空間的運動，
在位置和位移便出現
空間向量之應用。</td>
<td>p.62</td>
</tr>
<tr>
<td>$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \quad (Neton's\ \ second\ \ law)$$
$$F_{net,x} = ma_x\ \ ,F_{net,y} = ma_y\ \ ,F_{net,z} = ma_z$$</td>
<td>Chapter 5 Force and
Motion—I
5-1 Newton’s Fitst
And Second Laws</td>
<td>p.98</td>
</tr>
</table>

	此提到牛頓第二運動定律，明確的提到三個分量的表示法，代表此問題是需要考慮三維空間的情況的。	
● The net force $\vec{F}_{net}$ on a body with mass m is related to the body acceleration $\vec{a}$ by $$\vec{F}_{net} = m\vec{a},$$ which may be written in the component versions $$F_{net,x} = ma_x \quad F_{net,y} = ma_y \quad \text{and} \quad F_{net,z} = ma_z.$$ 圖 29 普通物理 Fundamentals of Physics p.106	Chapter 5 5-3 Applying Newton's Laws	p.106
$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx + \int_{x_i}^{x_f} F_y\,dy + \int_{x_i}^{x_f} F_z\,dz$$ **Three-Dimensional Analysis** Consider now a particle that is acted on by a three-dimensional force $$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}, \quad (7\text{-}33)$$ in which the components F_x, F_y, and F_z can depend on the position of the particle; that is, they can be functions of that position. However, we make three simplifications: F_x may depend on x but not on y or z, F_y may depend on y but not on x or z, and F_z may depend on z but not on x or y. Now let the particle move through an incremental displacement $$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}. \quad (7\text{-}34)$$ The increment of work dW done on the particle by $\vec{F}$ during the displacement $d\vec{r}$ is, by Eq. 7-8, $$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz. \quad (7\text{-}35)$$ 圖 30 普通物理 Fundamentals of Physics p.162	Chapter 7Kinetic Energy and Work 7-5 Work Done By A General Variable Force 此明確提到三維空間下的做功與分析，並在此章節有不少相關例題。	p.162
$$x_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \;, \qquad y_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \;,$$ $$z_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \;,$$	Chapter 9Center of Mass and Linear Momentum 9-1 Center Of Mass 此章節在討論質心，	p.214

We can also define the center of mass with the language of vectors. First recall that the position of a particle at coordinates x_i, y_i, and z_i is given by a position vector (it points from the origin to the particle):

$$\vec{r}_i = x_i\hat{\mathrm{i}} + y_i\hat{\mathrm{j}} + z_i\hat{\mathrm{k}}. \tag{9-6}$$

Here the index identifies the particle, and $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$, and $\hat{\mathrm{k}}$ are unit vectors pointing, respectively, in the positive direction of the x, y, and z axes. Similarly, the position of the center of mass of a system of particles is given by a position vector:

$$\vec{r}_{com} = x_{com}\hat{\mathrm{i}} + y_{com}\hat{\mathrm{j}} + z_{com}\hat{\mathrm{k}}. \tag{9-7}$$

If you are a fan of concise notation, the three scalar equations of Eq. 9-5 can now be replaced by a single vector equation,

$$\vec{r}_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i, \tag{9-8}$$

where again M is the total mass of the system. You can check that this equation is correct by substituting Eqs. 9-6 and 9-7 into it, and then separating out the x, y, and z components. The scalar relations of Eq. 9-5 result.

圖 31 普通物理 Fundamentals of Physics p.214

$$x_{com} = \frac{1}{M}\int x \;\; dm \;, \qquad y_{com} = \frac{1}{M}\int y \;\; dm,$$

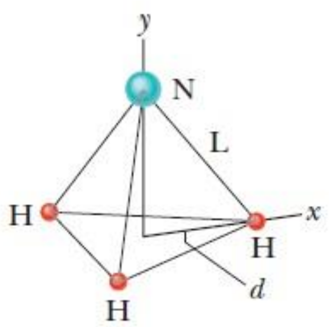
$$z_{com} = \frac{1}{M}\int z \;\; dm,$$

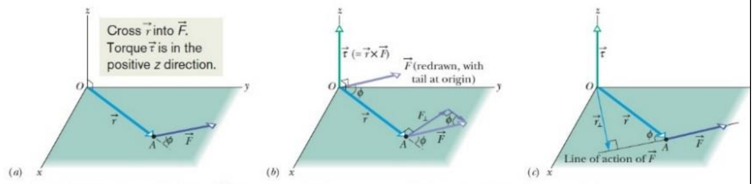
$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}$$

$$x_{com} = \frac{1}{V}\int x \;\; dV \;, \qquad y_{com} = \frac{1}{V}\int y \;\; dV,$$

$$z_{com} = \frac{1}{V}\int z \;\; dV,$$

這部分直接寫上了關於x, y, z三個分量的質心公式，以及不同情況下的求法。

••7 ILW In the ammonia (NH_3) molecule of Fig. 9-40, three hydrogen (H) atoms form an equilateral triangle, with the center of the triangle at distance $d = 9.40 \times 10^{-11}$ m from each hydrogen atom. The nitrogen (N) atom is at the apex of a pyramid, with the three hydrogen atoms forming the base. The nitrogen-to-hydrogen atomic mass ratio is 13.9, and the nitrogen-to-hydrogen distance is $L = 10.14 \times 10^{-11}$ m. What are the (a) x and (b) y coordinates of the molecule's center of mass? 圖 32 普通物理 Fundamentals of Physics p.247-1  **Figure 9-40** Problem 7. 圖 33 普通物理 Fundamentals of Physics p.247-2	第九章後面的習題，此題為NH_3氨氣分子的模型，必須由題目所給數據算其質心。 需要用到空間概念以及空間坐標系才好理解並解此題。 是為數不多的三維質心的題目，但是個很好的例子，可以說是物理、化學、數學的綜合例題。	p.247

 **Figure 11-10** Defining torque. (*a*) A force $\vec{F}$, lying in an *xy* plane, acts on a particle at point *A*. (*b*) This force produces a torque $\vec{\tau}$ (= $\vec{r} \times \vec{F}$) on the particle with respect to the origin *O*. By the right-hand rule for vector (cross) products, the torque vector points in the positive direction of *z*. Its magnitude is given by $rF_{\perp}$ in (*b*) and by $r_{\perp}F$ in (*c*). 圖 34 普通物理 Fundamentals of Physics p.303-1 $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ To determine the magnitude of $\vec{\tau}$, we apply the general result of Eq. 3-27 ($c = ab \sin \phi$), finding $\tau = rF \sin \phi$, (11-15) where ϕ is the smaller angle between the directions of $\vec{r}$ and $\vec{F}$ when the vectors are tail to tail. From Fig. 11-10*b*, we see that Eq. 11-15 can be rewritten as $\tau = rF_{\perp}$, (11-16) where $F_{\perp}$ (= $F \sin \phi$) is the component of $\vec{F}$ perpendicular to $\vec{r}$. From Fig. 11-10*c*, we see that Eq. 11-15 can also be rewritten as $\tau = r_{\perp}F$, (11-17) where $r_{\perp}$ (= $r \sin \phi$) is the moment arm of $\vec{F}$ (the perpendicular distance between *O* and the line of action of $\vec{F}$). 圖 35 普通物理 Fundamentals of Physics p.303-2	Chapter 11 Rolling, Torque, and Angular Momentum 11-4 Torque Revisited 此圖示說明力矩與位移向量和作用力之關係，而下面的式子明確提及要用向量的外積進行運算	p.303

<table>
<tr>
<td>

● The angular momentum $\vec{\ell}$ of a particle with linear momentum $\vec{p}$, mass m, and linear velocity $\vec{v}$ is a vector quantity defined relative to a fixed point (usually an origin) as

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}).$$

● The magnitude of $\vec{\ell}$ is given by

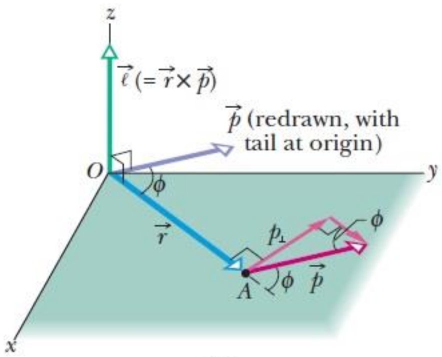
$$\begin{aligned} \ell &= rmv \sin \phi \\ &= rp_{\perp} = rmv_{\perp} \\ &= r_{\perp} p = r_{\perp} mv, \end{aligned}$$

圖 36 普通物理 Fundamentals of Physics p.305-1

where ϕ is the angle between $\vec{r}$ and $\vec{p}$, $p_{\perp}$ and $v_{\perp}$ are the components of $\vec{p}$ and $\vec{v}$ perpendicular to $\vec{r}$, and $r_{\perp}$ is the perpendicular distance between the fixed point and the extension of $\vec{p}$.

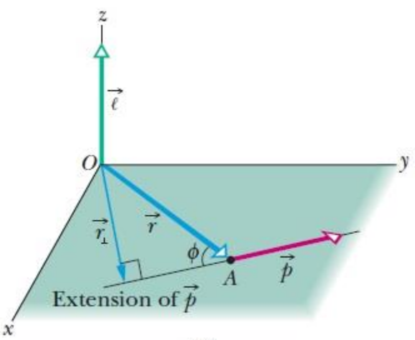
● The direction of $\vec{\ell}$ is given by the right-hand rule: Position your right hand so that the fingers are in the direction of $\vec{r}$. Then rotate them around the palm to be in the direction of $\vec{p}$. Your outstretched thumb gives the direction of $\vec{\ell}$.

圖 37 普通物理 Fundamentals of Physics p.305-2



(a)

圖 38 普通物理 Fundamentals of Physics p.305-3



(b)

Figure 11-12 Defining angular momentum. A particle passing through point A has linear

圖 39 普通物理 Fundamentals of Physics p.305-4

</td>
<td>

Chapter 11 Rolling, Torque, and Angular Momentum

11-5 Angular Momentum

此章節主要在談角動量，與上一章節力矩是類似的，但依然用著圖示與數學式子去解釋角動量與質量、位移向量、作用力等關係。

</td>
<td>p.305</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

$$\vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

(single particle)

Proof of Equation 11-23

We start with Eq. 11-18, the definition of the angular momentum of a particle:

$$\vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v}),$$

where $\vec{r}$ is the position vector of the particle and $\vec{v}$ is the velocity of the particle. Differentiating* each side with respect to time t yields

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right). \tag{11-24}$$

However, $d\vec{v}/dt$ is the acceleration $\vec{a}$ of the particle, and $d\vec{r}/dt$ is its velocity $\vec{v}$. Thus, we can rewrite Eq. 11-24 as

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v}).$$

圖 40 普通物理 Fundamentals of Physics p.307-1

Now $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ (the vector product of any vector with itself is zero because the angle between the two vectors is necessarily zero). Thus, the last term of this expression is eliminated and we then have

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times m\vec{a}.$$

We now use Newton's second law ($\vec{F}_{net} = m\vec{a}$) to replace $m\vec{a}$ with its equal, the vector sum of the forces that act on the particle, obtaining

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{net} = \sum(\vec{r} \times \vec{F}). \tag{11-25}$$

Here the symbol Σ indicates that we must sum the vector products $\vec{r} \times \vec{F}$ for all the forces. However, from Eq. 11-14, we know that each one of those vector products is the torque associated with one of the forces. Therefore, Eq. 11-25 tells us that

$$\vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}.$$

This is Eq. 11-23, the relation that we set out to prove.

圖 41 普通物理 Fundamentals of Physics p.307-2

</td>
<td>

Chapter 11 Rolling, Torque, and Angular Momentum

11-6 Newton's Second Law In Angular Form

After

此為原文書在證明 Newton's Second Law in Angular Form (也就是左邊上角式子)的過程，可以發現用到了外積的微分。

</td>
<td>p.307</td>
</tr>
</table>

本書共 44 章，而我調查的結果是多數大一普通物理大多數上到熱力學第二定律，也就是此書第 20 章左右。在這部分將較少有應用到空間向量與坐標系等。

實際上在第 3 章之後，第 4 至第 11 章節，全都有提及向量，甚至是向量的

內積與外積等向量的操作，然而大多數時候關注的都是二維的情況，不一定會出現空間向量，示範的例題與習題大多都以二維平面來討論，相比之下空間的部分較少出現，有些單元甚至是直接說了這只討論二維平面的情況，像是 9-8 章節的標題明確地寫道：「COLLISIONS IN TWO DIMENSIONS」表明此就是要討論二維的情況。

要注意的是，很多題目並沒有仔細檢查，少部分關聯性不高的部分也不放入，絕對不代表此原文書只有這些部分與空間有所關聯。

可以發現，普通物理是跟空間課程有大量關聯的，然而不是所有高中所學的空間數學都會用到，會用到的主要是空間概念、空間向量、外積，有些甚至會和微積分一起應用，而空間中的平面方程式、直線方程式完全沒有出現。

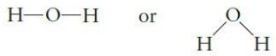
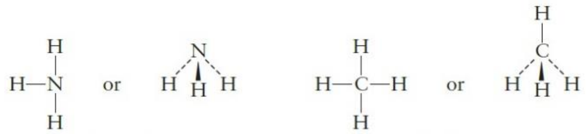
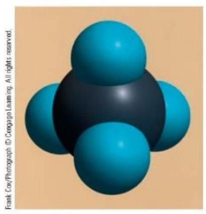
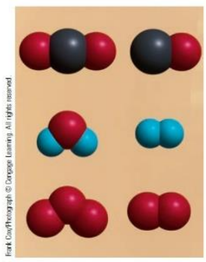
4-2-2 普通化學

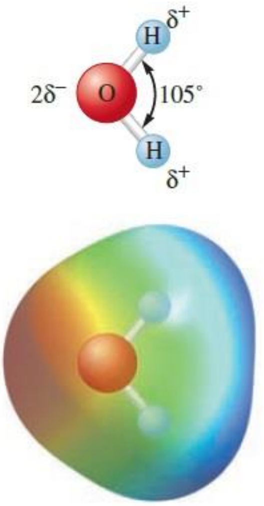
文本資料：Steven S.Zumdahl，《Chemical Principles》，8th Edition[28]

在整本書中，盡可能將空間相關的部分記錄下來，然而我發現與空間有關的數學式子是非常少的，然而要說普通化學就與空間關聯性很低嗎？我想並不是的，雖然很多部分或許並沒有太多直接的關係，但許多化學分子的結構圖都需要空間概念作理解與認識，除了一一翻閱外，也決定以空間相關的關鍵字做搜尋，像是空間「space」、平面「plane」、向量「vector」、三維度「three dimensions」等，期望在整本原文書中找到有關聯的地方，在此附上其中的例子

作為說明，例子繁多，不一一舉例說明。

表 7 普通化學內容之整理

原文書內容	說明與備註	頁碼
 The structure on the right shows the actual shape of the water molecule, based on experimental evidence. Other examples of structural formulas are  In the actual structures on the right, the central atom and the solid lines are understood to be in the plane of the page. Atoms connected to the central atom by dashed lines are behind the plane of the page, and atoms connected to the central atom by wedges are in front of the plane of the page. 圖 42 普通化學 Chemical Principles p.31-1	chapter 2 Atoms, Molecules, and Ions 2.7 Molecules and Ions 此部分在舉例說明分子的結構式有不同的寫法。	p.31
 Figure 2.15 Space-filling model of the methane molecule. This type of model shows both the relative sizes of the atoms in the molecule and their spatial relationships.  Figure 2.16 Space-filling models of various molecules.  Figure 2.17 Ball-and-stick model of methane. 圖 43 普通化學 Chemical Principles p.31-2	用模型來展示實際上在三維空間中分子的結構、相對大小與空間關係。 往後的各章節還有各種分子的模型。	p.31

 **Figure 4.1** (top) The water molecule is polar. (bottom) The electrons in the water molecule are not shared equally between hydrogen and oxygen. This can be represented with a colored ma of electrostatic potential. Red areas indicate high electron density, and blu areas represent low electron density. The colors in between indicate varyin degrees of electron density. 圖 44 普通化學 Chemical Principles p.86	chapter 4 Types of Chemical Reactions and Solution Stoichiometry 4.1 Water, the Common Solvent 上圖是說水分子的H－O－H之夾角約為105°。 下圖是說明水分子是極性的，這個可以用彩色地圖表示的靜電勢。紅色表示高電子密度，藍色代表低電子密度。中間的顏色表示不同電子密度度數。 要注意這個彩色地圖是三維空間的，也並非為球形。	p.86

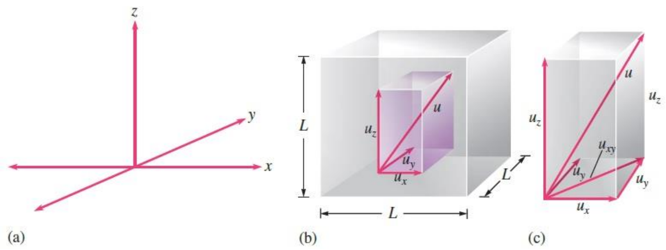
<table>
<tr>
<td>


圖 45 普通化學 Chemical Principles p.145-1

Figure 5.12
(a) The Cartesian coordinate axes.
(b) The velocity u of any gas particle can be broken down into three mutually perpendicular components, u_x, u_y, and u_z. This can be represented as a rectangular solid with sides u_x, u_y, and u_z and body diagonal u.
(c) In the xy plane,
$$u_x^2 + u_y^2 = u_{xy}^2$$
by the Pythagorean theorem. Since u_{xy} and u_z are also perpendicular,
$$u^2 = u_{xy}^2 + u_z^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$$
圖 46 普通化學 Chemical Principles p.145-2

$$Force_x = \frac{\Delta(mu_x)}{\Delta t} = (2mu_x)\frac{u_x}{L} = \frac{2mu_x^{\ 2}}{L}$$
$$Force_y = \frac{2mu_y^{\ 2}}{L}$$
$$Force_z = \frac{2mu_z^{\ 2}}{L}$$
$$Pressure = \frac{\frac{2mu_x^{\ 2}}{L} + \frac{2mu_y^{\ 2}}{L} + \frac{2mu_z^{\ 2}}{L}}{6L^2} = \frac{\frac{2mu^2}{L}}{6L^2}$$
$$= \frac{mu^2}{3L^3}$$
</td>
<td>
5.6 The Kinetic Molecular Theory of Gases

此部分在說明空間坐標系中，速度有三個分量，並利用畢氏定理，寫下其關係式。並用於後續的式子推導中。

在做碰撞的力量之式子推導，最後以壓力定義做壓力的式子推導。此結論用在後續的計算當中。
</td>
<td>p. 145, 146, 147</td>
</tr>
</table>

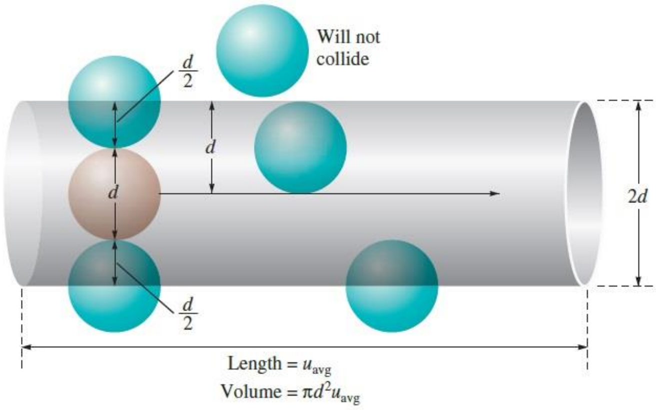
<table>
<tr>
<td>


圖 47 普通化學 Chemical Principles p.157-1

Figure 5.21
The cylinder swept out by a gas particle of diameter *d*.

圖 48 普通化學 Chemical Principles p.157-2

Any particle with its center outside this cylinder will not be hit by our particle. Thus our particle “sweeps out” a cylinder of radius d and length $u_{avg} \times 1$ second during every second of its flight. Therefore, the volume of the cylinder swept out per second is

$$V = \text{volume} = \underbrace{(\pi d^2)}_{\text{Area of cylinder slice}} \underbrace{(u_{avg})}_{\text{Length of cylinder}} (1\ \text{s})$$

圖 49 普通化學 Chemical Principles p.157-3

As the particle travels through this cylinder, the number of collisions depends on the number of gas particles in that volume. To specify the number of gas particles, we use the number density of the gas N/V, which indicates the number of gas particles per unit volume. Thus we can write

$$\text{Number of collisions per second} = \begin{pmatrix}\text{volume}\\ \text{swept out}\end{pmatrix} \times \frac{N}{V} = \pi d^2 (u_{avg}) \left(\frac{N}{V}\right)$$

$$= \pi d^2 \left(\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\right)\left(\frac{N}{V}\right) = \frac{N}{V} d^2 \sqrt{\frac{8\pi RT}{M}}$$

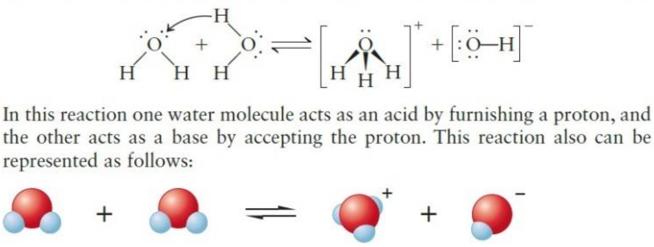
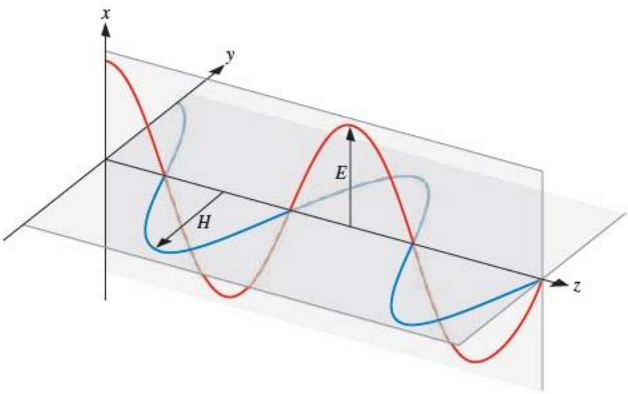
圖 50 普通化學 Chemical Principles p.157-4
</td>
<td>
5.9Intermolecular Collisions

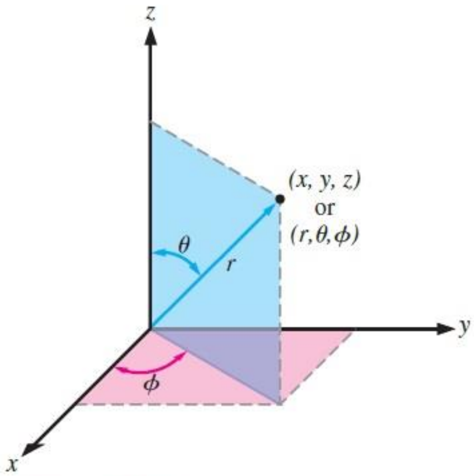
討論分子的碰撞，考慮粒子直徑為d，速度為u_{avg}以直線運動，可掃出圓柱體的體積。

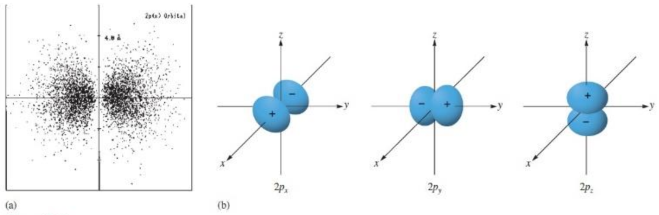
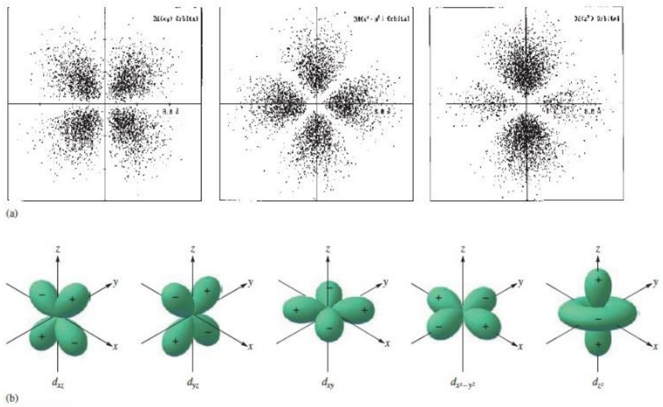
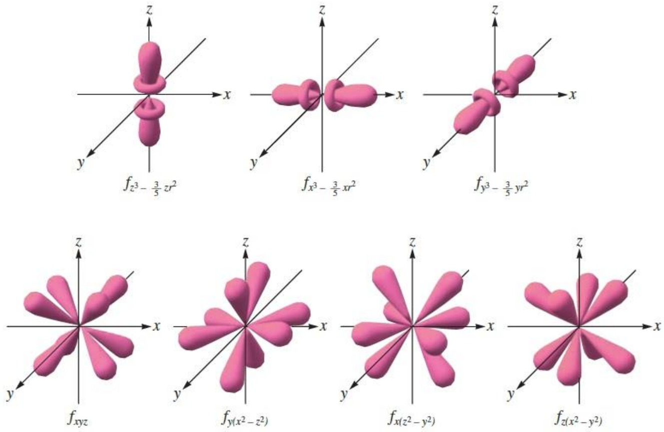
當粒子穿過這個圓柱體時，碰撞的次數取決於該體積中氣體粒子的數量。

用氣體密度$\frac{N}{V}$表示每單位體積的氣體粒子數，因此推導出每秒的碰撞次數公式。後續還有對此公式做修正，就不特別放上。

此部分確實在三維空間的情況下做討論。
</td>
<td>p. 157</td>
</tr>
</table>

 **Water as an Acid and a Base** A substance is said to be *amphoteric* if it can behave either as an acid or as a base. Water is the most common **amphoteric substance.** We see this behavior in the **autoionization** of water, which involves the transfer of a proton from one water molecule to another to produce a hydroxide ion and a hydronium ion: In this reaction one water molecule acts as an acid by furnishing a proton, and the other acts as a base by accepting the proton. This reaction also can be represented as follows: 圖 51 普通化學 Chemical Principles p.202	chapter 7 Acids and Bases 7.2 Acid Strength 水的自電離，涉及質子從一個水分子與另一個分子產生氫氧根離子和水合氫離子，配合圖示更能夠讓人明白其變化為何。此章節還有許多類似的例子。	p. 202
 圖 52 普通化學 Chemical Principles p.438-1 **Figure 12.1** Electromagnetic radiation has oscillating electric (E) and magnetic (H) fields in planes perpendicular to each other and to the direction of propagation. 圖 53 普通化學 Chemical Principles p.438-2	chapter 12 Quantum Mechanics and Atomic Theory 12.1Electromagnetic Radiation 電磁輻射有振盪電 (E) 和磁 (H) 相互垂直並垂直於傳播方向的平面中的場。	p. 438

 **Figure 12.15** The spherical polar coordinate system. 圖 54 普通化學 Chemical Principles p.461-1 In the spherical polar coordinate system, the wave function $\psi(r, \theta, \phi)$ can be written as a product of one function depending on r, one depending on θ, and one depending on ϕ: $$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$ This separation of variables allows an exact solution to the Schrödinger equation $$\hat{H}\psi = E\psi$$ for the hydrogen atom. 圖 55 普通化學 Chemical Principles p.461-2	chapter 12 Quantum Mechanics and Atomic Theory 12.7 The Wave Equation for the Hydrogen Atom 不同於笛卡兒坐標的另外一種球坐標系，用意在於對於波方程，能夠寫成三個函數的乘積，對於 Schrödinger equation 可精確地給出解。 不過此部分並非高中所學。	p. 461

 **Figure 12.19** Representation of the $2p$ orbitals. (a) The electron probability distribution for a $2p$ orbital. Generated from a program by Robert Allendoerfer on Project SERAPHIM disk PC 2402; reprinted with permission. (b) The boundary surface representations of all three $2p$ orbitals. Note that the signs inside the surface indicate the phases (signs) of the orbital in that region of space. 圖 56 普通化學 Chemical Principles p.468  **Figure 12.21** Representation of the $3d$ orbitals. (a) Electron density plots of selected $3d$ orbitals. Generated from a program by Robert Allendoerfer on Project SERAPHIM disk PC 2402; reprinted with permission. (b) The boundary surfaces of all five $3d$ orbitals, with the signs (phases) indicated. 圖 57 普通化學 Chemical Principles p.469-1  **Figure 12.22** Representation of the $4f$ orbitals in terms of their boundary surfaces. 圖 58 普通化學 Chemical Principles p.469-2	chapter 12 Quantum Mechanics and Atomic Theory 12.9 The Characteristics of Hydrogen Orbitals 由空間坐標系表示電子軌域的圖示，出現的順序為：$2p$軌域、$3d$軌域、$4f$軌域。 p軌道沿笛卡爾坐標系的軸標記裂片所在的位置。例如，沿x軸有波瓣的$2p$軌道稱為$2p_x$軌道 以正負區別波函數的不同相位，原文書有提到由於它們的複雜性，f軌道函數的相位不標示	p. 468 469

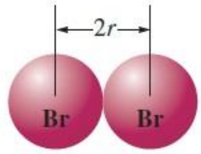


Figure 12.37
The radius of an atom (r) is defined as half the distance between the nuclei in a molecule consisting of identical atoms.

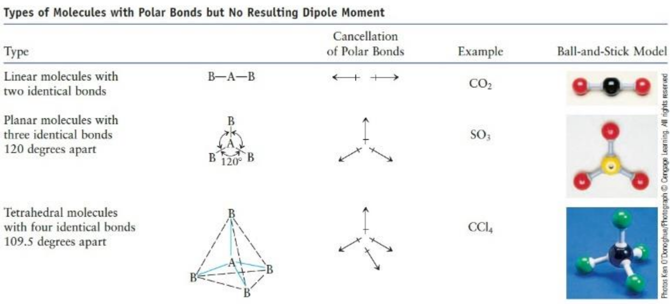
圖 59 普通化學 Chemical Principles p.490

chapter 12 Quantum Mechanics and Atomic Theory

12.15 Periodic Trends in Atomic Properties

原子的半徑 (r) 定義為由相同原子組成的分子中原子核之間距離的一半。

p. 490



Types of Molecules with Polar Bonds but No Resulting Dipole Moment

Type		Cancellation of Polar Bonds	Example	Ball-and-Stick Model
Linear molecules with two identical bonds	B—A—B		CO_2	
Planar molecules with three identical bonds 120 degrees apart			SO_3	
Tetrahedral molecules with four identical bonds 109.5 degrees apart			CCl_4	

圖 60 普通化學 Chemical Principles p.508-1

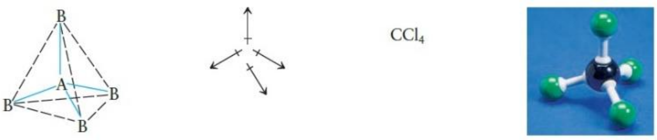


圖 61 普通化學 Chemical Principles p.508-2

Chapter 13 Bonding: General Concepts

13.3 Bond Polarity and Dipole Moments

此舉例具有極性鍵但沒有產生偶極矩的分子類型，這些分子結構都有對稱性，而CCl_4就是正四面體的結構，才會有此性質。

實際上這會與空間向量有關，但原文

p. 508

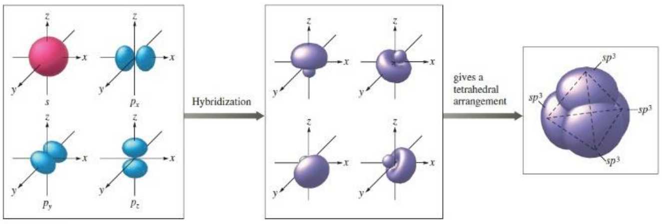
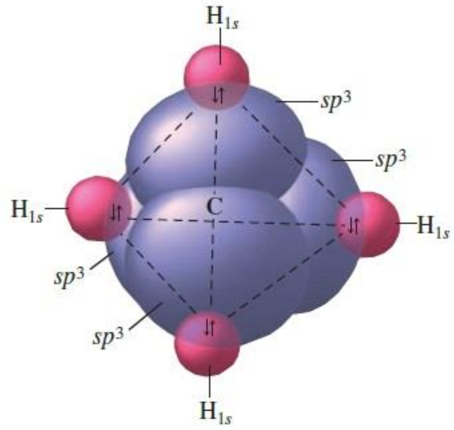
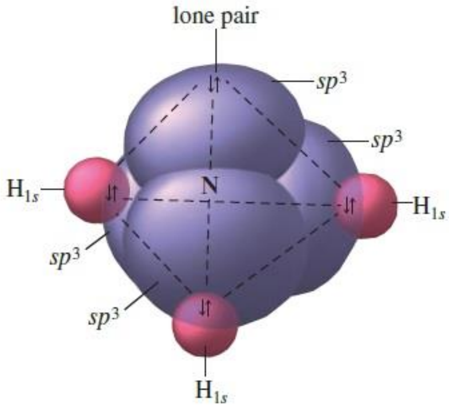
<table>
<tr>
<td></td>
<td>書並未提及，實際上分子的極性和分子的幾何形狀有密切關係。</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>


Figure 14.3
The “native” 2s and three 2p atomic orbitals characteristic of a free carbon atom are combined to form a new set of four sp^3 orbitals. The small lobes of the orbitals are usually omitted from diagrams for clarity.
圖 62 普通化學 Chemical Principles p.557-1

The linear combinations of the 2s and 2p orbitals that give the four sp^3 hybrid orbitals are listed below:
$$\phi_1 = \tfrac{1}{2}[(s) + (p_x) + (p_y) + (p_z)]$$
$$\phi_2 = \tfrac{1}{2}[(s) + (p_x) - (p_y) - (p_z)]$$
$$\phi_3 = \tfrac{1}{2}[(s) - (p_x) + (p_y) - (p_z)]$$
$$\phi_4 = \tfrac{1}{2}[(s) - (p_x) - (p_y) + (p_z)]$$
where (s) and (p) represent 2s and 2p atomic orbital functions, and where the factor of $\frac{1}{2}$ is present to satisfy the boundary condition that the total probability is 1 for each orbital. Each of the functions ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, and ϕ_4 represents a separate sp^3 hybrid orbital.
圖 63 普通化學 Chemical Principles p.557-2
</td>
<td>chapter 14 Covalent Bonding: Orbitals
14.1Hybridization and the Localized Electron Model
本節探討分子使用不同類型的原子軌域來共享電子並形成鍵，成為不同的分子結構。

圖 63 給出的是其中的線性組合之關係。</td>
<td>p. 557
558</td>
</tr>
</table>

 **Figure 14.6** The tetrahedral set of four sp^3 orbitals on the carbon atom is used to share electron pairs with the four 1*s* orbitals of the hydrogen atoms to form the four equivalent C—H bonds. This accounts for the known tetrahedral structure of the CH_4 molecule. 圖 64 普通化學 Chemical Principles p.558-1  **Figure 14.7** The nitrogen atom in ammonia is sp^3 hybridized. 圖 65 普通化學 Chemical Principles p.558-2	圖 64 是關於CH_4的例子，一個 2s 和三個 2p 原子軌道特徵結合形成一組新的四個 sp3 軌道。 本章後面還有眾多複雜的例子，以其電子軌域的圖示，不一一舉例。	

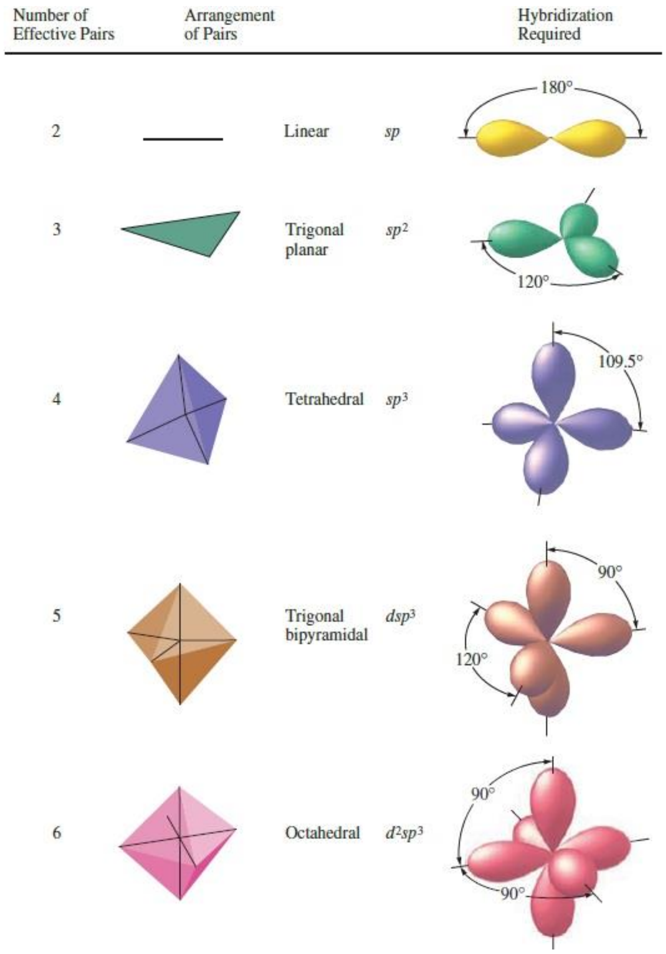
<table>
<tr>
<td>

圖 66 普通化學 Chemical Principles p.566</td>
<td>chapter 14 Covalent Bonding: Orbitals
14.1Hybridization and the Localized Electron Model

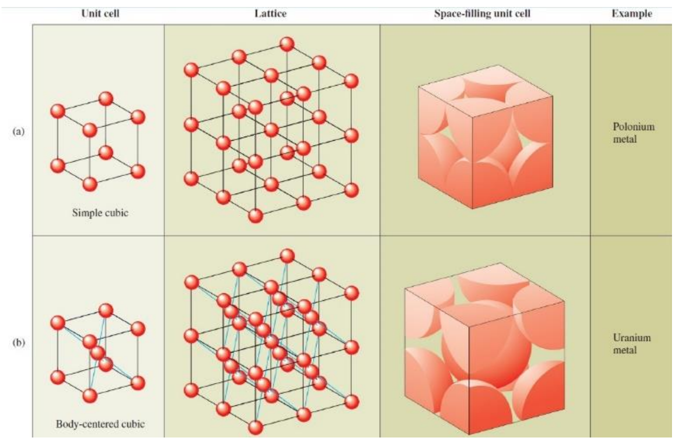
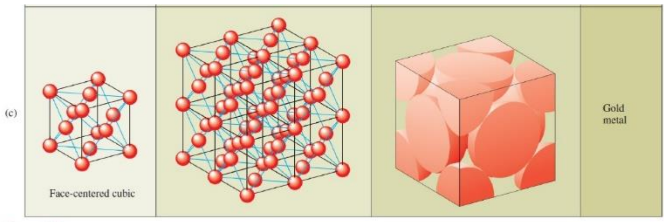
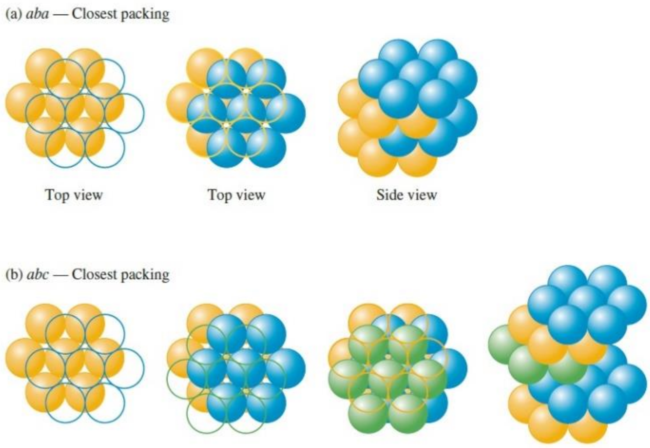
此圖總結了常見的混成軌域的類型，以及其空間結構的模型。下面三個分別是：Tetrahedral 四面體、Trigonal bipyramidal 三角雙錐、Octahedral 八面體。</td>
<td>p. 566</td>
</tr>
<tr>
<td>

圖 67 普通化學 Chemical Principles p.657-1</td>
<td>chapter 16 Liquids and Solids
16.3 An Introduction to Structures and Types of Solids

此舉例三種常見的晶體結構：簡單立方體、體心立方、面心立方體。</td>
<td>p. 657</td>
</tr>
</table>

 Figure 16.9 Three cubic unit cells and the corresponding lattices. Note that only parts of spheres on the corners and faces of the unit cells reside inside the unit cell, as shown by the cutoff versions. 圖 68 普通化學 Chemical Principles p.657-2		
 圖 69 普通化學 Chemical Principles p.662-1 **Figure 16.13** The closest packing arrangement of uniform spheres. In each layer, a given sphere is surrounded by six others. (a) *aba* packing: The second layer is like the first, but it is displaced so that each sphere in the second layer occupies a dimple in the first layer. The spheres in the third layer occupy dimples in the second layer so that the spheres in the third layer lie directly over those in the first layer (*aba*). (b) *abc* packing: The spheres in the third layer occupy dimples in the second layer so that no spheres in the third layer lie above any in the first layer (*abc*). The fourth layer is like the first. 圖 70 普通化學 Chemical Principles p.662-2	chapter 16 Liquids and Solids 16.4 Structure and Bonding in Metals 此部分提及： **closest packing** 最密堆積，分為兩種：(1)aba 排列所得結構稱為六方最密堆積 (hcp) (2) abc 排列所得結構稱為立方最密堆積 (ccp) 並都以文字與圖敘述其空間關係。 為了求單元格中球體的淨數量，詳細地展示其空間關	p. 662,663,664

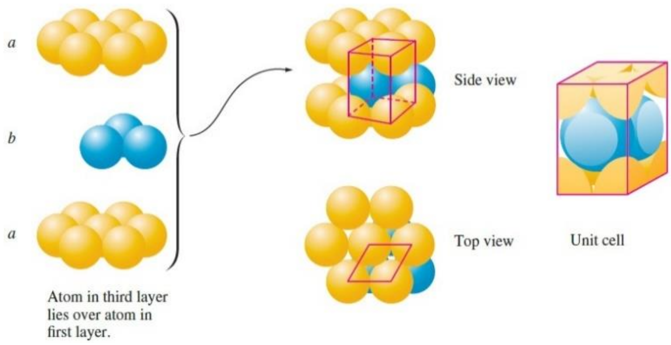
<table>
<tr>
<td>


圖 71 普通化學 Chemical Principles p.663-1

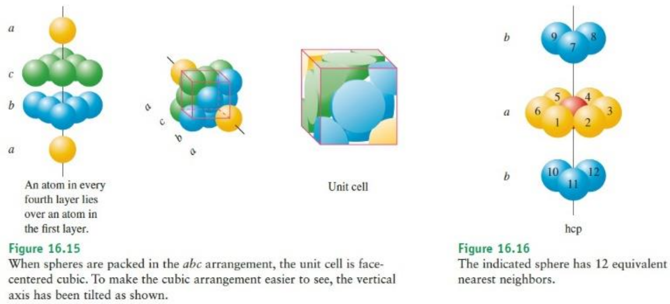


圖 72 普通化學 Chemical Principles p.663-2

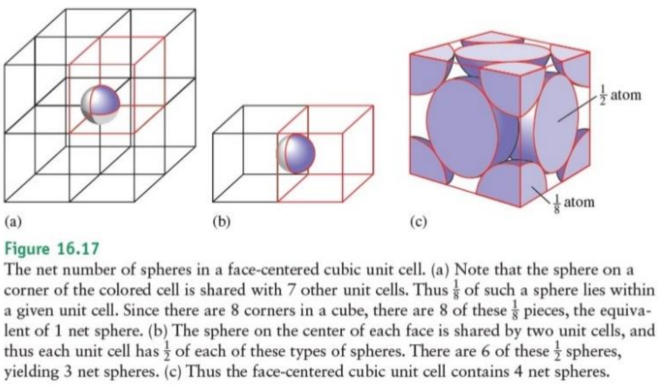
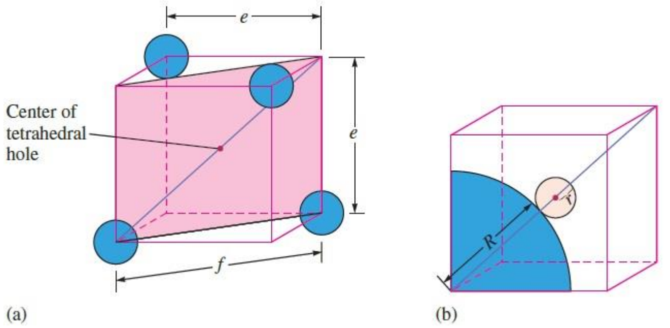


圖 73 普通化學 Chemical Principles p.664
</td>
<td>
係，以及計算出有多少淨球體。

並且用於後續例題中計算最密堆積固體的密度。

此部分需要空間概念的知識才好理解。
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

 圖 74 普通化學 Chemical Principles p.683 $$f^2 = e^2 + e^2 = (2R)^2$$ Thus $e = \sqrt{2}\,R$ Now we express the body diagonal b in terms of f and e: $$b^2 = f^2 + e^2 = (2R)^2 + (\sqrt{2}\,R)^2$$ which leads to $b = \sqrt{6}\,R$ Now the distance from the center of the body diagonal to the corner of the cube ($b/2$) is $$\underbrace{r}_{\text{Radius of tetrahedral hole}} + \underbrace{R}_{\text{Radius of packed spheres}} = \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{6}\,R}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,R$$ So $r = \sqrt{\frac{3}{2}}\,R - R = 1.225R - R = 0.225R$ Thus we have shown that in a closest packed structure a tetrahedral hole has a radius that is 0.225 times the radius of the packed spheres. 圖 75 普通化學 Chemical Principles p.683-2	chapter 16 Liquids and Solids 16.7 Ionic Solids 討論最密堆積結構的孔洞大小，此以 Tetrahedral Hole 為例，確實使用空間概念去做分析與解決此問題。	p. 683

可以發現數學式子並不多，數學式子多半也都是關於化學分子的計算，除了少數的公式推導外，鮮少與空間有關聯，但確實有用上，討論的範圍確實是在三維空間中，有許多圖示也都闡述分子模型的構造，也就是說很多部分是在概念上與空間有關，因此不能只是看數學式子，眾多的關聯都是空間概念的部分，其中又以第 12、13、14、16 章節與空間最有關係，在原文書中有大量的圖示與例子，除了上述表格提到的以外，還有眾多的例子在原文書中，將不一一列出，或許並沒有太多直接的應用，可是若學好空間概念絕對對於學習化學會有更深的理解與認識。

因此判斷化學與空間是有所關聯的，最多的關聯為空間概念的部分，空間概念的理解，決定了對於化學的更多認識，主要涉及化學分子的幾何結構、偶極矩與極性、晶體結構、最密推積問題、鍵長的影響等各種相互作用。

4-2-3 經濟學

文本資料：經濟學理論與實際 (第六版)[29]

此書雖然在 2022 年 8 月已經出到最新的第 8 版，但看了簡介提到「其章節安排與第七版相同。本次改版主要在修改文字，並將一些經濟學概念講的更清楚些。」，版本上差異不大，也不會因此影響了本研究的判斷，故此選用第七版來查閱即可。

我翻閱上冊的整本書，在查閱的過程中，發現此書的數學式子非常有限，而且圖示的部分多半是直線方程式、直角坐標的圖形，頂多加上一些微積分的知識而已，並無任何的空間與三維度的圖示，就算有明確提及多變數的情況，也頂多是用一個數學式子粗略帶過，並不會深入探討，故此在此判斷，與空間課程的相關性低，甚至可以說是沒有什麼關聯。因為就算不了解高中空間的數學知識，對這邊的學習也無任何障礙。

4-2-4 統計學

文本資料：：McClave , Benson , Sincich《Statistics For Business &

Economics》(Global Ed./13 Ed.)[30]

我翻閱整本原文書，並未發現有什麼特別的地方與空間有關，完全沒有任何數學式子與空間有關，而關注每一章節後面的重點整理：「Chapter notes」的部分，記錄每章節會有的關鍵字與重點公式，以及書末的附錄部分，整本書可能就第 3 章 Probability 之章節有出現 samlpe space 樣本空間，然而此 samlpe space 樣本空間並非我們要談的空間 space。因此我判斷統計學與空間是無關聯的。因為沒有學過空間相關的知識，也不影響學習統計學。

4-3 與其他亞洲國家的高中數學課程做比較

本節依序針對日本、香港與中國這三個國家的高中數學課程中的空間課程做比較分析。以表格方式作呈現，將日本、香港、中國的數學課綱中的空間課程做整理，且與臺灣的課綱做比較。

4-3-1 日本

表 8 日本高中數學課綱之空間課程

年級與單元名稱	內容與備註	與臺灣課綱比較
數學 1	(1)使用三角比來考慮平面與空間的圖	這部分較類似於 99 課

図形と計量	形。用於測量平面圖形和空間圖形。並且使用正弦定理、餘弦定理來處理平面和簡單的空間圖形。 (2)提及空間圖形在數學 A 的「図形の性質」中也有涉及，關係重要。	綱的「三角測量」之單元。 現在 108 課綱中三角測量融入正弦與餘弦定理在長方體上的應用，不設獨立單元。這部分與日本的情況類似。
數學 A 図形の性質-空間図形	(1)加深對直線和平面在空間中形成的位置關係和角度的理解。 (2)了解空間中的直線和平面的基本知識以及多面體等的基本性質。 (3)對於直線與平面的位置關係，可用三垂線定理來處理。 (4)使用歐拉多面體定理來認識正多面體只有五種類型的事實。	提及日本國中一年級就有講述直線和平面在空間中的位置關係，空間圖形的構造和投影，圓柱、圓錐、球體的表面積和體積。 臺灣過去並沒有，108 課綱才會於國三學習簡單的空間中直線與直線的關係，圓錐的體積、球的表面積與體積也是臺灣的國中數學不會提及的。 歐拉多面體定理是臺灣所沒有的。
數學 B	(1)空間向量的含義、運算、分量和內	全都是臺灣課綱擁有的

ベクトル -空間座標と ベクトル 向量-空間坐 標與向量	積等基本概念。 (2)理解空間向量並將其應用於考慮空間圖形。 例如：在正四面體 OABC 中顯示 OA⊥BC。 (3)強調理解空間中的向量可以用與平面中相同的方式來處理，理解空間坐標與空間向量可以從平面推廣到空間。	部分。

在日本的高中數學課綱中，總共有三處與空間課程有關，基本上大多數的內容都是台灣所有的，唯一的例外是「歐拉多面體定理」，這是在日本的高中數學課綱中明確提及，而在臺灣課綱從未提及的部分。

而「外積、體積與行列式」、「平面方程式」、「空間中的直線方程式」這些內容完全沒有在日本的數學課綱提到過。然而日本的課綱寫得相當簡略，為了做確認，將實際檢驗日本的高中數學教科書。

參考以下日本教科書：

未来へひろがる数学１ 啓林館出版[44]

新編 新しい数学１　東書出版[45]

中学校数学１　　学図出版[46]

高等学校　数学 A　 数研出版[47]

高等学校　数学 B　 数研出版[48]

會發現確實在國中一年級，就已經學習空間概念了，關於空間中直線與直

線、直線與平面、平面與平面的位置關係，也會認識多面體；圓柱、圓錐、球體的表面積和體積；此部分都是用實際的物體例子讓學生理解公式，並不會去做證明。

到了高一的「図形と計量-空間図形」還會再次講述一次空間概念，並利用所學的三角知識去解決一些空間相關的問題。數學 A 的歐拉多面體定理也僅是介紹有這樣一個定理存在，並用五種正多面體來做驗證，並不會做任何的證明。而數學 B 的空間座標とベクトル，值得一提的是有提到共面定理，但不要求證明，關於平面方程式僅有$x=a,\ y=b,\ z=c$ 這樣的平行於xy, yz, xz平面的平面方程式，其他類型的作為補充，也會提及球面方程式。

外積放在後面的附錄當中，更不會深入探討，僅止於空間向量的基本操作，強調是平面向量的延伸與理解。還有數學 A、B 皆為選修，所以不是每位學生都會上到。

4-3-2 香港

表 9 香港高中數學課綱之空間課程

年級與單元名稱	內容與備註	與台灣課綱比較
必修部分-度量、圖形與空間範疇-續三角	1.使用三角形面積公式$\frac{1}{2}ab\sin C$、正弦、餘弦公式、希羅公式(海龍公式)來解決二維與三維空間的應用題。	這部分較類似於 99 課綱的「三角測量」之單元。 現在 108 課綱中三角測

	2.三維空間的應用題包括求兩直線的交角、直線與平面的交角、兩平面的交角、點與線的距離、點與面的距離。 備註：探討簡單立體圖形的性質。	量融入正弦與餘弦定理在長方體上的應用，不設獨立單元。 而三維空間的應用題雖然有「兩平面的交角」等，可是皆為簡單立體圖形的例子。就內容而言並不會比臺灣還更深入。
單元二 代數與微積分-向量的簡介	1.理解向量及純量的概念 2.理解向量的運算及其性質 3.理解向量在直角坐標系統的表示法 4.須引入以下公式： 在R^3中，$\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$	全都是臺灣課綱擁有的部分。
單元二 代數與微積分-純量積與向量積	1.理解向量的純量積（點積） 的定義及其性質。 2.理解在R^3中向量的向量積（叉積）的定義及其性質。 3.須引入以下性質： (1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ (2) $\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b})$ (3) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$	全都是臺灣課綱擁有的部分。

	$(4)\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ $(5)(s\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(s\vec{b})=s(\vec{a}\times\vec{b})$ $(6)\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|^2=\|\vec{a}\|^2\left\|\vec{b}\right\|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})$ 須介紹以下純量三重積的性質 (1) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ (2) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$ $=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$	
單元二 代數與微積分-向量的應用	須引入求兩向量間的夾角、向量投射至另一向量的投影、平行六面體的體積和三角形的面積。	全都是臺灣課綱擁有的部分。

在香港的高中數學課綱中，只有必修部分的續三角單元才屬於必修，而單元一與單元二皆為選修的部分。全部的內容都是台灣所有的。並沒有任何知識點是臺灣課綱所沒有的。

而「平面方程式」、「空間中的直線方程式」這些內容完全沒有在香港的數學的課綱提到過。整體而言，臺灣所學的比香港還要豐富許多。

4-3-3 中國

表 10 中國高中數學課綱之空間課程

年級與單元名稱	內容與備註	與台灣課綱比較

必修课程 幾何與代數-立體幾何初步-基本立體圖形	1.利用實物、計算機軟件等觀察空間圖形，認識柱、錐、台、球以及簡單組合體的結構特徵。 2.球、稜柱、稜錐、稜台的表面積和體積的計算公式。 3.能用斜二測法畫出簡單空間圖形（長方體、球、圓柱、圓锥、棱柱及其簡單組合）的直觀圖。	對應臺灣的空間概念的部分，然而會發現中國在這邊有提到球， 還要求學生畫出簡單的空間圖形，這是臺灣所沒有的學習目標。
必修课程 幾何與代數-立體幾何初步-基本圖形位置關係	1.借助長方體，在直觀認識空間點、直線、平面的位置關係的基礎上,抽象出空間線、面位置關係的定義，並瞭解如下公理。 公理 1：過不在一條直線上的三點，有且只有一個平面。 公理 2：如果一條直線上兩個點在一個平面內那麼這條直線在這個平面內。 公理 3：如果兩個不重合的平面有一個公共點，那麼它們有且只有一條過該點的公共直線。 公理 4：平行於同一條直線的兩條直線平行。 定理：如果空間中兩個角的兩條邊分別對應平行，那麼這兩個角相等或互補。	雖然在空間概念中，臺灣也有提及這些公理與定理，然而完全從簡，不需要也不會強調證明，只需要理解即可。 中國課綱對於這些空間中的性質與定理都認真地寫出來，並且加以證明。這是臺灣課綱所沒有的。

	2.從上述定義和基本事實出發，借助長方體，通過通過直觀感知，了解空間中直線與直線、直線與平面、平面與平面的垂直與平行關係。歸納以下性質定理，並加以證明： (1)一條直線與一個平面平行，如果過該直線的平面與此平面相交，那麼該直線與教線平行。 (2)兩個平面平行，如果另一個平面與這兩個平面相交，那麼兩條交線平行。 (3)垂直於同一個平面的兩條直線平行。 (4)兩個平面垂直，如果一個平面內有一條直線垂直於這兩個平面的交線，那麼這條直線與另一個平面垂直。 3.從上述定義和公理出發，歸納以下判定定理，並加以證明： (1)如果平面外一條直線與此平面內的一條直線平行，那麼該直線與此平面平行。 (2)如果一個平面內的兩條相交直線與另一個平面平行，那麼這兩個平面平行。 (3)如果一條直線與一個平面內的兩條相交直線垂直，那麼該直線與此平面垂直。 (4)如果一個平面過另一個平面的垂線。那麼這兩個平面垂直。	

	4.能用已獲得的結論證明空間基本圖形位置關係的簡單命題。	
必修课程 幾何與代數-立體幾何初步-幾何學的發展	收集、閱讀幾何學發展的歷史資料，撰寫校論文，論述幾何學發展的過程、重要結果、主要人物、關鍵事件及其對人類文明的貢獻。	臺灣課綱中並無這個部分。
選擇性必修課程-幾何與代數-空間向量與立體幾何	1 空間直角坐標系 2.空間向量以及運算 3.向量基本定理以及坐標表示 (1)了解空間向量基本定理及其意義，掌握空間向量的正交分解及其坐標表示。 4.空間向量的應用 (1)能用向量语言描述直線和平面，理解直線的方向向量與平面的法向量。 (2)能用向量语言表述直線與直線、直線與平面、平面與平面的夾角以及垂直與平行關係。 (3)能用向量方法證明必修内容中有關直線、平面位置關係的判定定理。 (4)能用向量方法解决點到直線、點到平面、相互平行的直線、相互平行的平面的距離問題和簡單夾角問題，並能描述解决	對應臺灣課綱的空間坐標系與空間向量。與臺灣課綱內容差不多。 中國課綱明確提及要用向量去證明先前的於「基本圖形位置關係」單元中的判定定理。臺灣課綱中就算學到了空間向量，對於證明空間概念相關的定理也是鮮少涉略。 而此部分雖然還未

	這一類問題的程序，體會向量方法在研究幾何問題中的作用。 。	上到平面方程式，但已經明確提及平面的法向量。
選修課程 A 空間向量與代數-空間向量與代數	1.通過幾何直觀，理解向量運算的幾何意義。 2.探索並解释空間向量的內積與外積及其幾何意義。 3.理解向量的投影與分解及其幾何意義，並會應用。 4.掌握向量組的線性相關性，並能加以判斷。 5.掌握向量的線性運算，理解向量空間與子空間的概念。	線性相關性、向量空間與子空間的概念是臺灣課綱所沒有的部分。
選修課程 A 空間向量與代數-三階矩陣與行列式	1.通過幾何直觀引入矩陣概念，掌握矩阵的三種基本運算及其性質。 2.了解正交矩陣及其基本性質，能用代数方法解决幾何問題。 3.掌握行列式定義與性質，會計算行列式。	臺灣課綱強調矩陣作為簡化問題工具的角色，作為資料表使用。[]參閱課程手冊，並非透過幾何直觀引入矩陣概念。 臺灣課綱並未提及正交矩陣。
選修課程 A 空間向量與	1.通過實例，探索三元一次方程组的求解過程，理解三元一次方程组的常用解法(高	與臺灣課綱內容差不多。

代數-三元一次方程组	斯消元法），會用矩陣表示三元一次方程组。 2.掌握三元齊次線性方程组的解法，會表示一般解。 3.掌握非齊次線性方程组有解的判定，建立線性方程组的理論基礎。 4.探索三元一次方程组解的結構，會表示一般解。 5.理解克拉瑪（Cramer）法則，會用克拉瑪法則求解三元一次方程组。	
選修課程 A 空間向量與代數-空間中的平面與直線	1.通過向量的坐標表示，建立空間平面的方程。 2.掌握空間直線方程的含義，會用方程表示空間直線。 3.理解空間點、直線、平面的位置關係，會用代數方法判斷空間點、直線、平面的位置關係，會求點到直線（平面）的距離。	與臺灣課綱內容差不多。
選修課程 A 空間向量與代數-等距變換	1.了解平面變換的含義，理解平面的等距變換，特別是三種基本等距變換：直線反射、平移、旋轉。 2.了解平面對稱圖形及變換群概念。 3.掌握常見平面等距變換及其矩陣表示。 4.了解空間變換的含義，理解空間的等距變換，特別是三種常見等距變換：平面反射、平移、旋轉。	對應臺灣課綱中的矩陣的應用-平面上的線性變換、二階轉移方陣。 臺灣課綱並無空間變換，以及變換群。

	5.了解空間對稱圖形及變換群。 6.掌握常見空間等距變換及其矩陣表示	

中國的課綱寫得非常詳盡，把各單元所學的內容都清楚寫上，尤其是空間概念的部分，把所用到的概念與定理都清楚寫上，還要加以證明，這部分是臺灣、日本、香港都所沒有的，其餘三國都只要求概念上的理解即可。

其中選修課程 A 是給有志願學習數理類(例如數學、物理、計算機、精密儀器等)學生選擇的課程。這邊空間課程知識量相當多，中國將三階矩陣與行列式與三元一次方程组也納入，與臺灣的空間課程相較之下多了一些以下：線性相關性、向量空間與子空間的概念、空間變換、空間對稱圖形及變換群，這些都是臺灣課綱所沒有的部分。

第五章 結論與建議

在此篇論文 1-2 研究目的寫到「我希望論述的是臺灣高中數學中空間課程可能是特殊的」，並於 1-3 研究問題分成了三個層面做探討，而本章將會藉由第四章的研究結果，針對三個層面的不同問題做出回應，於 5-1 一節針對三個層面作綜合的整理與回答，5-2 一節提出個人的建議與看法。

5-1 結論

5-1-1 歷年學測數學中空間相關的題目之答對率

主要問題：檢驗高中生在學測數學這樣的大考中，表現得如何？空間是否真的是一個簡單的單元？

由先前所整理的資料，使用 excel 軟體自行製作散佈圖，以視覺化呈現。

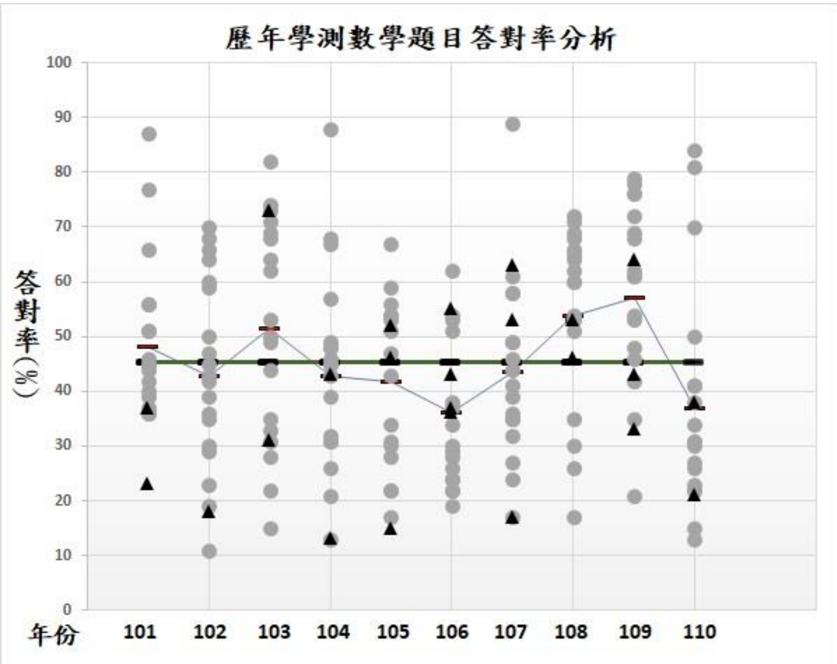


圖 76 歷年學測數學題目答對率分析

橫坐標為年份、縱坐標為答對率，每個點皆代表各該年份的各題之答對率，將本研究所關心的空間相關的題目以黑色三角形標記，各年份的答對率平均值標記為線段，以折線圖做連結，而黑色直線為歷年答對率平均值，可以發現多數空間相關題目都低於歷年答對率平均值，也很常會是每一年學測數學答對率最低的題目，就算非最低也是次低或是位於末段了；101、102、104、105、107、109、110 年皆是如此。

較為例外的僅有 103、106、108 這三年的情況，103-2 這題是空間相關的題目答對率最高的一題，已於 4-1 中進行分析，而 106 年雖然空間相關的題目並非位於末段，可是 106 年的平均答對率相較於歷年來是偏低，106 年還是有兩題低於歷年的平均答對率，只有 108 年的情況非如此，可是 108-13 並非什麼變化題，屬於「空間中的平面與直線」，只要求出此題的平面方程式，再依序檢驗各個選項即可，算是課本常見之例題，卻僅有 53%的答對率，並不算太好的表現，108-19 則比較中規中矩一些。

若關注所有的題目與空間相關題目的比較，可以比較出空間相關的題目其答對率相對於所有題目是否真的較低，一樣使用 excel 軟體自行製作散合狀圖，以視覺化呈現。

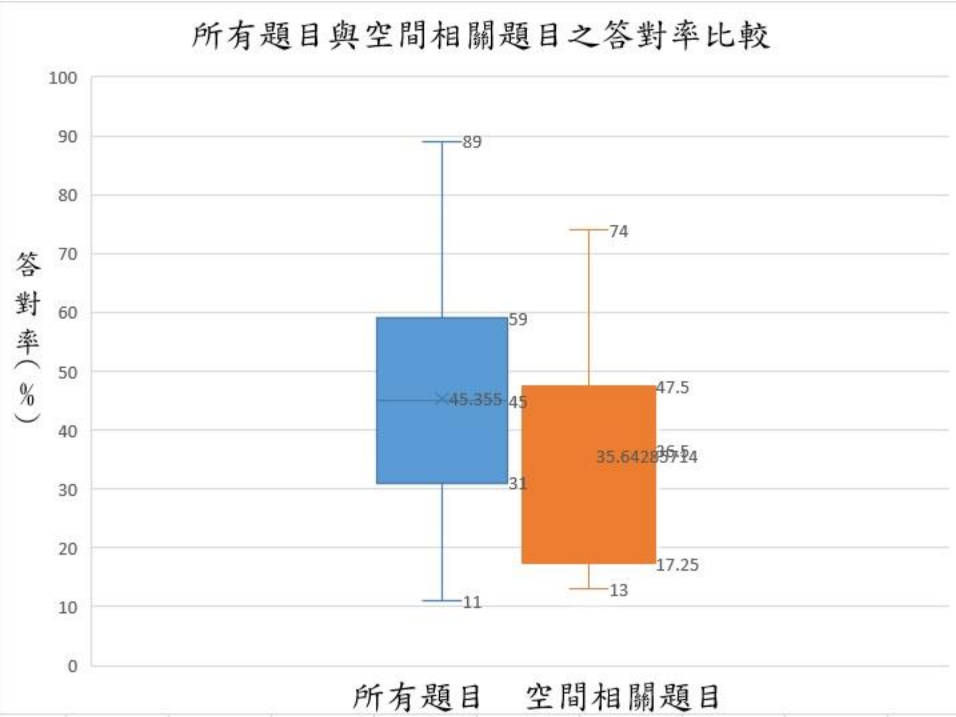


圖 77 所有題目與空間相關題目之答對率比較

縱坐標為答對率，橫坐標分別為所有題目與空間相關題目，將合狀圖呈現如此，可以發現除了最小值外，空間相關的題目所有數據都低於所有題目的數據，這是個顯著的情況。況且，兩者的最小值還僅差 2%，可以說是非常接近。

而若關注整體情況，將這十年的題目之答對率做排序，整理於附錄。更會發現空間相關題目在最末端的比例遠比其他單元還高的。

值得一題的是大考中心關於 110 學測數學的分析中有提到選填 B，110 學年度學科能力測驗【數學】考科試題特色[49]：「選填第 B 題，試題內容屬「空間中的平面與直線」，此題屬課本常見之例題，評量平面 E 的法向量與兩直線之方向向量垂直即可求解，但此題的得分率卻不高，僅為 38%實在可惜，猜測可能評量空間概念，讓一些人感到害怕而放棄。」

會發現實際上大考中心對此題(110-B)做出了「常見的例題」的評價，認為不該是如此的低答對率，對於此題的低答對率也做出「空間概念的題目會令人感到害怕而放棄」的猜測。

由上述數據、大考中心的評語以及 4-1 的分析，我想可以對問題做出回答:「整體而言，空間相關的題目答對率就是偏低，學生在這邊的表現很不理想，空間對學生來說就是困難的單元，而其中的關鍵是空間概念，與之有關的題目往往都是學生的大難關，更是擔任高難度的題目。」

5-1-2 大學課程之相關性

有多少科系會真正應用到其高中數學中空間課程的知識點與概念?

本研究針對大多科系會學到的四門常見科目：普通物理、普通化學、經濟學、統計學；挑出教科書作為分析，詳盡的分析內容放在 4-2 章節。

普通物理是跟空間課程有大量關聯的，會用到的主要是空間概念、空間向量、外積，主要多是使用向量這一數學工具來做操作，而討論到三維空間必然要使用空間向量。實際上原文書中許多是限定二維的情況，使用平面向量來操作而已。而空間的平面方程式、直線方程式則完全沒有用上。

普通化學雖然沒有太多相關的數學式子，與空間有關的甚至是少數，然而用到最多的其實是空間概念的部分，關於分子的結構許多都必須仰賴空間概念的理解。可以說是雖然沒有直接關係，可是有相當強烈的間接關係。熟悉空間

概念的人，相信對於分子結構也有更深入地理解。至於空間向量、外積、平面方程式、直線方程式等完全沒有用上；雖然在某些部分若要深入探討可能需要空間向量，可是原文書中沒有提及，那僅是個人查到的延伸課題。

至於經濟學與統計學，則沒有什麼關聯性。不需要空間的任何知識也可讀好這兩科。

整理可以發現，實際上會用到的空間相關知識，多半為空間概念與空間向量。也僅只有理工科系常見的普通物理與普通化學會使用上而已，商科的經濟學和統計學基本上可以說是無關聯，至於空間中的平面方程式與直線方程式則沒有看到應用；至少就這四門科目是如此。

雖然這四門科目無法代表全部大學科系，然而可以發現許多人會碰上的這四門科目卻沒有那麼大的關聯，相比高中所學的全部內容，僅是用到一部分的知識而已，而「平面方程式」、「空間中的直線方程式」這兩單元的內容幾乎是完全無出現。

要知道在 99 課綱那時，數學是不分組的，無論學生的志向，大家都要考同一份學測數學，除了在高中階段是學習同樣的數學，學測時也是要考同一份學測數學。好比經濟系與統計系在當年會採取數學作為入取門檻，而學生卻被迫學習與練習在大學用不到的知識，只為求進去希望的學系。然而實際上是：對於經濟系與統計系的學生來說空間數學若表現不好，也不會怎樣，可是卻會因為學測考試而影響學生能否進入所希望的大學科系。至少就大一而言是如此。

對於問題，可以回答：「真正應用到高中數學中空間課程的知識點多為空間

向量與空間概念，還只是限定理工科的情況，對於商科和其他文組的學生來說幾乎是無關聯的。」

5-1-3 與其他亞洲國家的高中數學課程做比較

檢視其他亞洲國家的高中數學中是否也有空間相關的單元，又是放了哪些內容？

由 4-3 對於日本、香港、中國三國的高中數學課綱中的空間課程之分析，可以發現，這些國家皆有分組與選修的制度在，不像臺灣的 99 課綱，都只有同一套的數學要求學生們一起學習。

只論必修的情況，四國都有空間概念的部分，都有對於空間中直線、平面相互關係的基本認識外，也都要求利用三角所學去解決簡單立體圖形的問題。

差異的部分：只有中國在課綱中明確提及空間幾何的定理，並要求作證明。日本、香港、臺灣則都只要求理解概念即可。而只有日本有提及歐拉多面體定理去認識五種正多面體。然而也只是提及，並不會作任何證明，日本在空間概念的單元都強調利用實例作理解。就這四國在高一的空間課程來說，只有中國是真正在談空間幾何(或是說立體幾何)，而臺灣、日本、香港皆是空間概念。

論及選修，共通點為都有空間坐標系、空間向量這兩個單元，而學習脈絡與過程都是先學習平面向量與強調空間向量是平面向量的推廣，日本與香港的

知識含量是較少的；日本與香港的空間課程相較於臺灣與中國都少了空間中的平面方程式、直線方程式，日本甚至還沒有外積的部分，只放在補充之中。只有中國的課綱所學的空間內容是比臺灣多的，但那也是為了數理類的學生所準備的數學課程。

要知道臺灣的 99 課綱在高二數學是沒有分選修的，學生們都一律要學習同樣的數學課程，相比日本、香港、中國在當時已經做了分組，讓學生們學到空間概念的部分，後續將視學生的志向而決定。臺灣在這邊才於 108 課綱做出了分軌，可以說過去大多數的學生被迫學了許多空間知識。配合 5-1-2 的結論，對於非理工科系志向的學生而言，他們未來很可能是用不上的。

值得注意的是，若關注「三垂線定理」，可以在臺灣與日本的課綱中看到，皆出現在高一的空間概念的部分，而香港的課綱並無出現，但是在最新的課綱 2017 年所頒布的版本[35](2023 才會實施)可以看到將三垂線定理加入其中，雖然在過去的文憑試中已經出現過需要三垂線定理才好作答的題目，參見：梁子傑，對課程引入「三垂線定理」的見解[50]

而中國的課綱中雖然沒有直接提及三垂線定理，可是可以由課綱提及的判定定理推得與證明三垂線定理。

可以說這四國不約而同地皆在高一的空間課程學了，或是說用不同的方式面對三垂線定理。

5-1-4 綜合論談

本研究得知 99 課綱的高中生們在學測中對於空間的題目表現就是比較不理想，再來看看空間課程在大學端的相關性，發現在大一會用到的空間相關知識並不多，而比較日本、香港、中國的高中數學課綱更會發現，相較於這些國家，臺灣的高中數學要求全部的學生學了許多知識。

某種程度上來說，在 99 課綱之下，臺灣在空間課程的教學並不理想，可以說是花時間學了多餘的東西，並非為了求新知；也不是為了大學的課程做準備，只為了面對學測數學中的難題。除了在學測考驗學生之外，對於許多非理工科系的學生而言真的不是那麼重要，或許該承認對於某些人而言，空間就是一個用來淘汰失敗者的單元。那這無非就只是對學生的折磨而已，以及比較誰比較會考試用的競技取向。

試問，一個志向是經濟系的學生，可是他學不好空間向量以及空間中的平面、直線等，那麼對於他在大一學習經濟學有何關係呢？實際上是經濟學與空間的關聯度低，不怎麼影響，然而以考試制度來看，在學測就是會用碰到空間的題目，學生為了進入想要的經濟科，必須花時間學習那些往後都用不到的數學知識與解題技巧，而許多人更可能因為這樣無緣進入理想的大學科系，這是過去課綱下的弊病。可參考：大學甄選入學委員會之歷年資料查詢[51]

5-2 建議

隨著科技日新月異，時代不斷的演變，從過去到現在，數學課綱一次又一次的改變，在資訊爆炸的現代社會，臺灣的數學也在近幾年走到了新的課綱-108 課綱。首先對於 108 課綱高中數學在高二就做出分軌，表示贊同；不用強迫高中生們在高二還是要學習同一套的數學課程，然而還是有許多部份值得改進與檢討。從本研究的發現，提供以下幾點個人建議。

1.空間概念中數學推理的部分，已經被弱化許多，但我認為可以做為選修與補充，甚至是學習中國或是過去早期課綱的做法，認真地去探討空間幾何。這些知識或許過時也不那麼實用，但實際上對於邏輯推理是非常有幫助的；別因為「覺得簡單」而省略，多的是空間的奧妙，也不該因為「用不到」而捨棄，可能一起捨棄的是學生們的思考習慣。參考本研究所得出的結論，學測的空間相關難題中考得正是這些空間概念的題目，很有可能正是因為忽略空間概念的推理思考所導致的。

2.空間概念的學習或許可以仿造日本的做法，用許多實際的例子去作認識，而不強調公式與定理的證明，在學生還未有相應的數學能力進行證明之前，用大量的例子與圖例讓學生有感。

實際上，參考「立體數學遊戲與空間想像力之訓練」[52]一文，空間概念可以藉由許多遊戲來做學習，文章中蒐集並介紹了數十種立體數學遊戲：索瑪立方(Soma Cube)、立體俄羅斯方塊遊戲(Blockout)、立體井棋、立體圍棋等遊戲，在文中末段提到：「在現時中學數學課程裏，空間能力的訓練與其重要性每每不成比例，學生往往在未熟習立體結構的基礎下被迫瞬即進入立體三角、幾

何等艱澀的運算裏。」

雖然此文為民國79年的文章，可是這段文的說法到現在依然沒錯。就課綱的內容而言，學生對於空間的認知真的足夠嗎？何嘗不是匆促學了空間概念，接著馬上就要學生面對空間向量、空間中的平面、直線等代數運算，並且做大量的習題與演練，然而做了這麼多的題目，真的讓學生對於空間有更多一點的認識？這無非也是「失焦的代數化命題」(可參考：[53])

3.建議在高二的數學A課程中，空間的課程可以做一定程度的刪減，應當加強空間向量的基本部分，適時補充線性相關與獨立的概念是好的，而對於空間中的平面與直線可以考慮做刪減或是移到選修課程也無妨。參考本研究的結論，這部分在大學端真的鮮少出現，不該浪費大把時間在這邊。相對的，我認為微積分更為重要，可以提前教授。對於志向在理工科系的學生，我想比起空間中的平面與直線，微積分還是有用的多。更別說對於志向在商科的學生而言，微積分依然是必修的科目；對於大多數科系而言，微積分的重要性都遠大於空間的。

4.另外，雖然與此主題無關，但其實在蒐集資料的時候，發現多項式相關題目也是有答對率偏低情況，在99課綱的歷年學測數學的題目當中，全部有14題，有10題就低於平均，整體分布是偏向後段的。可能是多項式的題目多數是多選題。容易出成困難的題目。像是110-13全對率31% 而全對率僅有9%，代表許多人無法完全答對，雖然這並非本研究的重點，但這部分值得關注，期望未來可以進行這方面的研究。引用單維彰：「高中數學在多項式的『代數性質』上著力太多，對大部分學生將來的學習沒有幫助。高中數學卻在多項式的『向量性質』上著墨太少，使得大部分學生缺乏銜接大學〈線性代數〉的

預備知識。」[54]

個人在閒暇時會閱讀課外的科普書籍與數學書，也常去書店的科普書籍區域尋覓有趣的書，在此也會發現一個現象；在這些科普書籍當中，大多會提及的數學相關內容，多半是代數、機率、統計、簡單的幾何、圖論、微積分等，而對於空間這一主題，基本上是只有簡單的空間概念、正多面體之類的，然而關於空間中的平面與直線等解析幾何的內容，不管是我國出版的或是國外的翻譯書籍都是鮮少看到。

當然這並無詳細的統計資料作為佐證，也沒特別花時間做這樣的統計，只是我個人的主觀看法，至於為何會這樣？我猜測是大眾覺得這主題太過困難了，在國外許多國家在課綱之中根本不會觸及太多空間的知識，在這樣的脈絡下，當然多數人也對空間是難有共鳴感，有也是簡單的立體圖形認識，解析幾何的內容幾乎看不到是合理的。

與空間有關的，無非是以摺紙數學為主題的書，較為著名的有：

1.摺紙幾何學：60 種特殊摺紙[55]

2.數學摺紙計畫：30 個課程活動探索[56]

3.摺紙玩數學：日本摺紙大師的幾何學教育[57]

實際上這幾本書均有探討立體圖形的摺紙，並用數學方法作探討，與補充不少立體圖形相關的知識，我認為對於學習空間的學生來說是絕佳的讀本。用摺紙作為立體幾何的認識與空間的探索活動是很不錯的做法。

而若關注一般的數學書籍，可發現歷史上還是有不少立體幾何著名的問題，為以下：

1.尺規作圖的倍立方體

2.克卜勒猜想

3.魯珀特方塊問題

這些問題在歷史上均獲得解決，這些問題敘述上簡單，可是要解決並非容易，倍立方體需要代數學來解決，克卜勒猜想則是近年十年內才有完整的形式證明，魯珀特方塊則沒那麼困難，可以作為立體幾何的補充教材再適合不過。可參考「有容乃大一一談談魯珀特方塊」[58]

參考文獻

[1] 張海潮，數學放大鏡—暢談高中數學，45-50，臺北市，三民書局，2013 年 6 月。

[2] 高晟鈞，「大一上學期各系必修課程與高中數學教育微積分課程的探討」。碩士論文，國立中央大學數學研究所，民國 98 年 6 月，取自：https://hdl.handle.net/11296/9k4g4b。

[3] 教育部，「高中數學 99 課程綱要」，民國 97 年，取自：https://www.k12ea.gov.tw/files/common_unit/a7285432-45bf-4371-b514-3eb12aff9871/doc/99%E6%99%AE%E9%80%9A%E9%AB%98%E4%B8%AD%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E7%B6%B1%E8%A6%81.pdf

[4] 教育部，「十二年國民基本教育課程綱要 國民中小學暨普通型高級中等學校　數學領域」，民國 107 年，取自：https://www.k12ea.gov.tw/files/class_schema/%E8%AA%B2%E7%B6%B1/12-%E6%95%B8%E5%AD%B8/12-1/%E5%8D%81%E4%BA%8C%E5%B9%B4%E5%9C%8B%E6%B0%91%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E6%95%99%E8%82%B2%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E7%B6%B1%E8%A6%81%E5%9C%8B%E6%B0%91%E4%B8%AD%E5%B0%8F%E5%AD%B8%E6%9A%A8%E6%99%AE%E9%80%9A%E5%9E%8B%E9%AB%98%E7%B4%9A%E4%B8%AD%E7%AD%89%E5%AD%B8%E6%A0%A1%E2%94%80%E6%95%B8%E5%AD%B8%E9%A0%98%E5%9F%9F.pdf

[5] 教育部，數學領域課程手冊(定稿版).pdf - 國家教育研究院，民國 109 年，取自：https://www.naer.edu.tw/upload/1/16/doc/2069/%E6%95%B8%E5%AD%B8%

E9%A0%98%E5%9F%9F%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E6%89%8B%E5%86%8A(%E5%AE%9A%E7%A8%BF%E7%89%88).pdf

[6] 謝豐瑞，普通高級中等學校 數學第四冊 A ，新北市，泰宇出版，民國 109 年 6 月。

[7] 項武義，基礎幾何學，「引言 —空間的基本概念與基本結構」。取自：http://www.wunan.com.tw/www2/download/preview/5Q20.PDF

[8] 歐幾里得，幾何原本，台北市，九章出版社，2018 年 4 月

[9] 張海潮、鍾伊婷，〈從立體幾何到坐標幾何——兼談三垂線定理〉，數學傳播，45 卷 4 期, p. 18-23，2021 年 12 月，取自：https://web.math.sinica.edu.tw/mathmedia/HTMLarticle18.jsp?mID=45404

[10] 教育部中等教育司，中學課程標準全 1 冊，臺北市，正中出版，民國 51 年 7 月，取自：https://catalog.naer.edu.tw/webpac/detail.cfm?mid=37171&m=ss&k0=%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E6%A8%99%E6%BA%96&t0=k&c0=and&list_num=25&current_page=1&mt=&at=&sj=&py=&it=&lr=&lg=&co=&pr=&st=%E4%B8%AD%E7%AD%89%E6%95%99%E8%82%B2%E5%BE%8C%E6%9C%9F&cg=&si=

[11] 教育部中等教育司，國民中學課程標準全 1 冊，臺北市，正中出版，民國 61 年，取自：https://catalog.naer.edu.tw/webpac/detail.cfm?mid=37212&m=as&k0=%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E6%A8%99%E6%BA%96&t0=t&c0=and&y10=&y20=&dt0=%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E6%A8%99%E6%BA%96&cu0=&ls0=%E4%B8%AD%E7%AD%89%E6%95%99%E8%82%B2%E5%89%8D%E6%9C%9F%2C%E4%B8%AD%E7%AD%89%E6%95%99%E8%82%B2%E5%BE%8C%E6%9C%9F&el0=&list_num=25&current_page=1&mt=&at=&sj=&py=&it=&lr=&lg=&co=&pr=&st=&cg=&si=12

[12] 教育部中等教育司，高級中學課程標準全 1 冊，臺北市，正中出版，民國 62 年 10 月，取自：

https://catalog.naer.edu.tw/webpac/detail.cfm?mid=37585&m=as&k0=%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E6%A8%99%E6%BA%96&t0=t&c0=and&y10=&y20=&dt0=%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E6%A8%99%E6%BA%96&cu0=&ls0=%E4%B8%AD%E7%AD%89%E6%95%99%E8%82%B2%E5%89%8D%E6%9C%9F%2C%E4%B8%AD%E7%AD%89%E6%95%99%E8%82%B2%E5%BE%8C%E6%9C%9F&el0=&list_num=25&current_page=1&mt=&at=&sj=&py=&it=&lr=&lg=&co=&pr=&st=&cg=&si=12

[13] 教育部中等教育司，國民中學課程標準全 1 冊，臺北市，正中出版，民國 72 年 7 月，取自：

https://catalog.naer.edu.tw/webpac/detail.cfm?mid=37240&m=as&k0=%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E6%A8%99%E6%BA%96&t0=t&c0=and&y10=&y20=&dt0=%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E6%A8%99%E6%BA%96&cu0=&ls0=%E4%B8%AD%E7%AD%89%E6%95%99%E8%82%B2%E5%89%8D%E6%9C%9F%2C%E4%B8%AD%E7%AD%89%E6%95%99%E8%82%B2%E5%BE%8C%E6%9C%9F&el0=&list_num=25&current_page=2&mt=&at=&sj=&py=&it=&lr=&lg=&co=&pr=&st=&cg=&si=12

[14] 教育部中等教育司，高級中學課程標準全 1 冊，臺北市，正中出版，民國 72 年 8 月，取自：

https://catalog.naer.edu.tw/webpac/detail.cfm?mid=37593&m=as&k0=%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E6%A8%99%E6%BA%96&t0=t&c0=and&y10=&y20=&dt0=%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E6%A8%99%E6%BA%96&cu0=&ls0=%E4%B8%AD%E7%AD%89%E6%95%99%E8%82%B2%E5%89%8D%E6%9C%9F%2C%E4%B8%AD%E7%AD%89%E6%95%99%E8%82%B2%E5%BE%8C%E6%9C%9F&el0=&list_num=25&current_page=2&mt=&at=

&sj=&py=&it=&lr=&lg=&co=&pr=&st=&cg=&si=12

[15] 單維彰，半世紀的高中數學課程回顧，民國 106 年 2 月，取自：https://drive.google.com/file/d/0B-tvlyRacB63QjE0c0FPQlJfdVE/view?resourcekey=0-xbvGR_3VPS2n1B6p6a_wbw

[16] 郭燮昌等，新標準高中立體幾何，臺北市，復興出版，民國 54 年 5 月，取自：https://catalog.naer.edu.tw/webpac/detail.cfm?mid=11597&m=as&k0=%E7%AB%8B%E9%AB%94%E5%B9%BE%E4%BD%95&t0=t&c0=and&y10=1900&y20=1970&dt0=%E6%95%99%E7%A7%91%E6%9B%B8&cu0=&ls0=%E4%B8%AD%E7%AD%89%E6%95%99%E8%82%B2%E5%BE%8C%E6%9C%9F&el0=&list_num=25&current_page=1&mt=&at=&sj=&py=&it=&lr=&lg=&co=&pr=&st=&cg=&si=

[17] 單維彰，「『向量』從何而來？」，科學月刊【數·生活與學習】專欄 9905，民國 99 年 4 月，取自：http://shann.idv.tw/Lite/essay/9905.pdf

[18] 大學入學考試中心，選才電子報 291 期，考試資料的運用與研究，民國 107 年 11 月，取自：https://www.ceec.edu.tw/xcepaper/cont?xsmsid=0J066588036013658199&qperoid=0J151636112592348448&sid=0J154537200585033554

[19] 洪雅齡。「台灣與日本之十二年數學課程比較」，碩士論文，國立中央大學數學研究所，2005。https://hdl.handle.net/11296/q3833y。

[20] 姜志遠。「台灣與中國大陸之十二年數學課程比較」，碩士論文，國立中央大學數學研究所，2006。https://hdl.handle.net/11296/hsjwyt。

[21] 翁婉珣。「台灣與新加坡之十二年數學課程比較」。碩士論文，國立中央大學數學研究所，2005。https://hdl.handle.net/11296/8426ev。

[22] 黃子倩。「台灣與韓國之十二年數學課程比較」。碩士論文，國立中央大學數學研究所，2006。https://hdl.handle.net/11296/tk8294。

[23] 李佳螢。「台灣與中國大陸高中數學教科書之內容分析比較-以向量課程為例」。碩士論文，國立彰化師範大學科學教育研究所，2017。https://hdl.handle.net/11296/s9v3mb。

[24] 宋嘉寧。「中國大陸與臺灣中學教材之平面幾何與坐標幾何分析比較」。碩士論文，國立中央大學數學系，2021。https://hdl.handle.net/11296/y96738。

[25] 大學入學考試中心，學科能力測驗，統計資料，取自：https://www.ceec.edu.tw/xmdoc?xsmsid=0J018604485538810196

[26] 大學入學考試中心，選才電子報 307 期，一起來認識學測與指考的試題答對率，民國 109 年 3 月，取自：https://www.ceec.edu.tw/xcepaper/cont?xsmsid=0J066588036013658199&qperoid=0K069576016564352335&sid=0K042343829406896328

[27] David Halliday , Robert Resnick , Jearl Walker , Fundamentals of Physics , 10th Edition,Wiley, 2013

[28] Steven S.Zumdahl , Chemical Principles , 8th Edition , Cengage Learning , 2016

[29] 張清溪、許嘉棟；劉鶯釧、吳聰敏，經濟學：理論與實際，第六版，翰蘆圖書出版，2010

[30] McClave, J. T., Benson, P. G., and Sincich, T., Statistics for Business and Economics ,13th edition, Boston, Pearson,2018

[31] 文部科学省／もんぶかがくしょう，https://www.mext.go.jp/index.htm

[32] 文部科学省，高等学校学習指導要領解説 数学編，平成 21 年 11 月，https://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2012/06/06/1282000_5.pdf

[33] 文部科学省，高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説 数学編 理数編，平成 30 年 7 月，https://www.mext.go.jp/content/1407073_05_1_2.pdf

[34] 香港教育局，https://www.edb.gov.hk/tc/

[35] 香港教育局，數學教育學習領域課程指引補充文件：高中數學科學習內容(2017)，https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/curr/ssmc2017_tc.pdf

[36] 香港教育局，數學教育學習領域課程指引（小一至中六）(2017)，https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/curr/ME_KLACG_chi_2017_12_08.pdf

[37] 香港教育局，數學科修訂課程的推行時間表，https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/timeline_tc.pdf

[38] 香港教育局，高中數學課程補充資料 (2013) https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/res/Supplementary%20Notes%20(C).pdf

[39] 香港教育局，高中數學（必修部分）修訂課程內容與高中數學（必修部分）現行課程內容的比較，取自：https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/curr/CT_CP_tc.pdf

[40] 香港教育局，高中數學（單元二）修訂課程內容與高中數學（單元二）現行課程內容的比較，https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/curr/CT_M2_tc.pdf

[41] 中華人民共和國教育部，http://www.moe.gov.cn/

[42] 中華人民共和國教育部，咨询义务教育数学课程标准相关问题，2021 年 1

月，取自：
http://www.moe.gov.cn/jyb_hygq/hygq_zczx/moe_1346/moe_2870/202101/t20210119_510362.html

[43] 中華人民共和國教育部，教育部关于印发《普通高中课程方案和语文等学科课程标准（2017 年版）》的通知，取自：
http://www.moe.gov.cn/srcsite/A26/s8001/201801/t20180115_324647.html

[44] 岡本和夫，森杉馨，佐々木武，根本博ほか 44 名，未来へひろがる数学１，教科書番号 732，株式会社 新興出版社啓林館，2016

[45] 藤井斉亮 俣野博ほか 38 名，新編 新しい数学１，教科書番号 728，東京書籍株式会社，2016

[46] 岡田禕雄 ほか 32 名，中学校数学１，教科書番号 730，学校図書株式会社，2016

[47] 岡部恒治 ほか 17 名，高等学校 数学 A，教科書番号 311，数研出版株式会社，2017

[48] 岡部恒治 ほか 17 名，高等学校 数学 B，教科書番号 310，数研出版株式会社，2017

[49] 大學入學考試中心，選才電子報 320 期，110 學年度學科能力測驗【數學】考科試題特色，民國 110 年 4 月

[50] 梁子傑，對課程引入「三垂線定理」的見解，2018，取自：
http://www.hkame.org.hk/uploaded_files/magazine/43/601.pdf

[51] 大學甄選入學委員會，歷年資料查詢，取自：
https://www.cac.edu.tw/apply112/history_statistics.php

[52] 黃毅英，立體數學遊戲與空間想像力之訓練，數學傳播，1990 年，取自：https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d144/14416.pdf

[53] 單維彰（2021）。數學素養課程的轉銜。課程研究期刊，16(1)，1-16 ，取

自：http://shann.idv.tw/edu/210419.html

[54] 單維彰，高中數學的反省與回顧，2011 年 10 月 29 日，取自：http://ocw.ncu.edu.tw/ocwdata/1001-07015/08HiSchoolMath.pdf

[55] 前川淳，摺紙幾何學：60 種特殊摺紙，新北市，世貿出版，2018 年 4 月

[56] 湯瑪斯·赫爾(Thomas Hull)，數學摺紙計畫：30 個課程活動探索，新北市，世貿出版，2018 年 6 月

[57] 芳賀和夫，摺紙玩數學：日本摺紙大師的幾何學教育，新北市，世貿出版，2016 年 4 月

[58] 常文武，有容乃大——談談魯珀特方塊，數學傳播 45 卷 1 期，58-63，2021 年 3 月，取自：https://web.math.sinica.edu.tw/mathmedia/HTMLarticle18.jsp?mID=45106

附錄：

附錄一：101 至 111 年各年學測數學題目之答對率排序

101 年度：

排序	題號	答對率(%)	z 分數
1	2	87	2.683316
2	1	77	2.003135
3	6	66	1.254935
4	*8	56	0.574753
5	16	56	0.574753
6	5	51	0.234663
7	*9	51	0.234663
8	**18**	**46**	**-0.1054**
9	**4**	**45**	**-0.1734**
10	***13**	**45**	**-0.1734**
11	**14**	**44**	**-0.2415**
12	***12**	**42**	**-0.3775**
13	**19**	**40**	**-0.5135**
14	**15**	**39**	**-0.5816**
15	**7**	**37**	**-0.7176**
16	***11**	**37**	**-0.7176**
17	**17**	**37**	**-0.7176**
18	**3**	**36**	**-0.7856**
19	***10**	**36**	**-0.7856**
20	**20**	**23**	**-1.6698**

102 年度：

排序	題號	答對率(%)	z 分數
1	1	70	1.568836
2	13	68	1.453903
3	2	66	1.33897
4	15	64	1.224037
5	*7	60	0.994171
6	14	59	0.936704
7	5	50	0.419506
8	*8	47	0.247106
9	*12	45	0.132173
10	*9	43	0.01724
11	*11	42	-0.04023
12	**6**	**39**	**-0.2126**
13	***10**	**36**	**-0.385**
14	**3**	**35**	**-0.4425**
15	**4**	**30**	**-0.7298**
16	**17**	**29**	**-0.7873**
17	**16**	**23**	**-1.1321**
18	**19**	**19**	**-1.362**
19	**20**	**18**	**-1.4194**
20	**18**	**11**	**-1.8217**

103 年度：

排序	題號	答對率(%)	z 分數
1	1	82	1.545837
2	2	74	1.142356
3	3	73	1.091921
4	*8	73	1.091921
5	*9	71	0.991051
6	5	69	0.89018
7	4	68	0.839745
8	13	64	0.638005
9	*7	62	0.537134
10	*10	53	0.083218
11	*11	50	-0.0681
12	15	49	-0.1185
13	*12	44	-0.3707
14	19	35	-0.8246
15	6	33	-0.9255
16	16	31	-1.0264
17	17	31	-1.0264
18	20	28	-1.1777
19	18	22	-1.4803
20	14	15	-1.8333

104 年度：

排序	題號	答對率(%)	z 分數
1	1	88	2.511598
2	2	68	1.403947
3	*7	67	1.348565
4	3	57	0.794739
5	*9	49	0.351679
6	*5	48	0.296297
7	*8	48	0.296297
8	17	46	0.185532
9	*6	45	0.130149
10	*10	45	0.130149
11	11	43	0.019384
12	18	43	0.019384
13	12	39	-0.2021
14	20	32	-0.5898
15	4	31	-0.6452
16	15	31	-0.6452
17	16	26	-0.9221
18	13	21	-1.199
19	14	13	-1.6421
20	19	13	-1.6421

105 年度：

排序	題號	答對率(%)	z 分數
1	1	67	1.671535
2	*8	59	1.14194
3	*13	56	0.943341
4	3	54	0.810943
5	4	54	0.810943
6	*7	54	0.810943
7	2	53	0.744743
8	5	52	0.678544
9	17	51	0.612344
10	*11	47	0.347547
11	*9	46	0.281347
12	16	43	0.082749
13	***10**	**34**	**-0.513**
14	**18**	**31**	**-0.7116**
15	***12**	**30**	**-0.7778**
16	**6**	**28**	**-0.9102**
17	**14**	**22**	**-1.3074**
18	**15**	**22**	**-1.3074**
19	**19**	**17**	**-1.6384**
20	**20**	**15**	**-1.7708**

106 年度：

排序	題號	答對率(%)	z 分數
1	*11	62	2.055402
2	4	55	1.497735
3	14"	54	1.418068
4	1	53	1.338401
5	2	51	1.179068
6	*10	43	0.541734
7	3	38	0.1434
8	5	37	0.063733
9	17	37	0.063733
10	***13**	**36**	**-0.0159**
11	***9**	**34**	**-0.1753**
12	**16**	**30**	**-0.4939**
13	**7**	**29**	**-0.5736**
14	***12**	**28**	**-0.6533**
15	**15**	**26**	**-0.8126**
16	***8**	**24**	**-0.9719**
17	**18**	**24**	**-0.9719**
18	**6**	**22**	**-1.1313**
19	**20**	**22**	**-1.1313**
20	**19**	**19**	**-1.3703**

107 年度：

排序	題號	答對率(%)	z 分數
1	*8	89	2.674469
2	*11	63	1.141146
3	18	61	1.023198
4	2	58	0.846276
5	4	58	0.846276
6	1	53	0.551407
7	6	49	0.315511
8	17	49	0.315511
9	13	46	0.138589
10	*9	44	0.020641
11	***10**	**41**	**-0.1563**
12	**14**	**39**	**-0.2742**
13	**5**	**36**	**-0.4512**
14	***12**	**35**	**-0.5101**
15	**16**	**35**	**-0.5101**
16	**3**	**32**	**-0.687**
17	**7**	**27**	**-0.9819**
18	**15**	**24**	**-1.1588**
19	**19**	**17**	**-1.5717**
20	**20**	**17**	**-1.5717**

108 年度：

排序	題號	答對率(%)	z 分數
1	2	72	1.19053
2	6	71	1.125296
3	*10	69	0.994827
4	14	68	0.929592
5	3	66	0.799123
6	*9	65	0.733889
7	*8	64	0.668654
8	18	62	0.538185
9	4	60	0.407716
10	15	60	0.407716
11	5	54	0.016309
12	**1**	**53**	**-0.0489**
13	***11**	**53**	**-0.0489**
14	***13**	**53**	**-0.0489**
15	***7**	**51**	**-0.1794**
16	**19**	**46**	**-0.5056**
17	***12**	**35**	**-1.2231**
18	**17**	**30**	**-1.5493**
19	**16**	**26**	**-1.8103**
20	**20**	**17**	**-2.3974**

109 年度：

排序	題號	答對率(%)	z 分數
1	1	79	1.355177
2	14	78	1.293438
3	3	76	1.169959
4	*12	76	1.169959
5	*8	72	0.923002
6	15	69	0.737784
7	5	68	0.676045
8	*13	64	0.429088
9	*11	62	0.305609
10	4	61	0.24387
11	6	61	0.24387
12	***10**	**54**	**-0.1883**
13	**16**	**53**	**-0.25**
14	**20**	**48**	**-0.5587**
15	**7**	**46**	**-0.6822**
16	**2**	**43**	**-0.8674**
17	***9**	**42**	**-0.9292**
18	**17**	**35**	**-1.3614**
19	**18**	**33**	**-1.4848**
20	**19**	**21**	**-2.2257**

110 年度：

排序	題號	答對率(%)	z 分數
1	1	84	2.392713
2	*7	81	2.240311
3	14	70	1.681503
4	3	50	0.665489
5	5	41	0.208283
6	*8	41	0.208283
7	15	38	0.055881
8	19	38	0.055881
9	***9**	**34**	**-0.1473**
10	**4**	**31**	**-0.2997**
11	***13**	**31**	**-0.2997**
12	**2**	**30**	**-0.3505**
13	***11**	**27**	**-0.5029**
14	**18**	**26**	**-0.5537**
15	***12**	**23**	**-0.7061**
16	***10**	**22**	**-0.7569**
17	**17**	**22**	**-0.7569**
18	**20**	**21**	**-0.8077**
19	**6**	**15**	**-1.1125**
20	**16**	**13**	**-1.2141**

111 年度：

排序	題號	答對率(%)	z 分數
1	*8	60	1.462459
2	4	57	1.292625
3	7	57	1.292625
4	18	55	1.179403
5	5	53	1.06618
6	6	48	0.783123
7	13	46	0.669901
8	2	40	0.330233
9	*11	38	0.21701
10	**1**	**29**	**-0.2925**
11	***12**	**21**	**-0.7454**
12	**14**	**21**	**-0.7454**
13	***10**	**20**	**-0.802**
14	***9**	**19**	**-0.8586**
15	**16**	**18**	**-0.9152**
16	**15**	**16**	**-1.0284**
17	**3**	**12**	**-1.2549**
18	**17**	**5**	**-1.6512**