第一章 凌波理論的介紹

在這一章, 我們簡短介紹凌波方程的理論. 我們從富氏變換著手, 接著由區段富氏變換引入凌波函數, 以及它縮張 (dilation) 及平移 (translation) 的特性, 我們將凌波函數 (wavelet functions) 的型態作簡單的分類, 爲說明凌波函數的重建及分解, 我們給了一個例子 — Daubechies 的凌波函數. 爲建構 Daubechies 的凌波函數, 我們略述所謂自格函數 (scaling functions) 及多重解分析 (multiresolution analysis).

1.1 什麼是凌波函數 ?

凌波理論, 是近幾年在計算科學和工程上熱門的話題. 凌波變換 (wavelets transform) 也是一項分割不同頻率的有用工具. 雖然往後文章將侷限於 Daubechies 的凌波函數和 $L^2(\mathbb{R})$ 的空間, 但我們不妨先討論一般的凌波函數及其性質. 假設我們已知 $L^p(\mathbb{R})$ 對 $1 \le p < \infty$ 是 Banach 空間.

若 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 則定義其富氏變換 (Fourier transform) 如下:

$$\hat{f}(\omega) = \int f(x) e^{-i\omega x} dx$$

以上的積分是在整個實數軸上, 往後文章中, 除非特別說明積分範圍, 否則我們都在整個實數軸做積分. 若再加上 f 是連續及 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ 中, 則富氏變換的逆變換 (inverse Fourier transform) 爲

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

以上的函數空間是 $L^1(\mathbb{R})$, 若考慮 $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 由 Parseval 等式則它滿足 $||\hat{f}||_2^2 = 2\pi ||f||_2^2$, 因此我們將富氏變換看成在 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 到 $L^2(\mathbb{R})$ 的有界線性變換. 再因 $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密. 所以即可將此定義用於 $L^2(\mathbb{R})$ 上. 假設 $f(x)$ 看成在時間上的訊息, 則 $\hat{f}(\omega)$ 爲其對頻率的表達式, 但是我們不易從 $\hat{f}(\omega)$ 獲得局部的高頻. 而且 $e^{-i\omega x}$ 是全域性的, 故富氏變換的影響是全域性的, 換句話說, 若 f 在一個小區間稍稍改變, 則將影響所有

$\hat{f}(\omega)$ 的值. 改進方法有區段富氏變換 (windowed Fourier transform) 如下: 若 $g \in L^2(\mathbb{R})$

$$(T_g^{win} f)(\omega, t) = \int f(x) g(x-t) e^{-i\omega x} dx$$

式中 g 稱爲區段函數 (window function), 其滿足 $xg(x) \in L^2(\mathbb{R})$. 這是一種對固定時間區段, 做頻率展現的標準技巧.

相類似於區段富氏變換式, 在凌波理論中有:

$$(Wf)(a,b) = |a|^{-1/2} \int f(x) \Psi(\frac{x-b}{a}) dx$$

式中我們先假定 $a, b \in \mathbb{R}$ 且令 $\Psi^{a,b} = |a|^{-1/2} \Psi(\frac{x-b}{a})$ 其中 Ψ 要是一區段函數, 則 Ψ 必須在 $L^1(\mathbb{R})$ 中且滿足

(1.1.1). $$\int \Psi(x) dx = 0$$

由 (1.1.1) 我們可觀察出 Ψ 必須上下振動, 且 $\Psi \in L^1(\mathbb{R})$, 所以 $|\Psi(x)|$ 在 $|x|$ 大時必須很小. 因此 Ψ 的圖形相對於整個實數軸, 像是小波. 在此稱凌波乃因於我們討論的正規 Daubechies 緊緻涵蓋函數, 凌亂卻不失美感; 而且凌字又有逼近的意義, 例如凌晨, 故名凌波函數. 相對於 $\Psi^{a,b}$, Ψ 又稱爲母凌波函數 (mother wavelets).

1.2 凌波函數的分類

凌波函數的型態大致分成兩大類 : $\Psi^{a,b}$ 當 $a, b \in \mathbb{R}$ 爲連續型 ; $\Psi^{a,b}$ 當 $a = \frac{1}{2^j}, b = \frac{k}{2^j}, j, k \in \mathbb{Z}$ 爲離散型. 在離散型中又分多餘式 (redundant discrete systems) 及正規型 (orthonormal).

往後我們討論的空間是一個 Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R})$, 因此有更好的性質. 在連續型中, 一個函數能被它的凌波變換式重建, 亦即

$$f(x) = C_\Psi^{-1} \int\int < f, \Psi^{a,b} > \Psi^{a,b} \frac{dadb}{a^2},$$

式中 $<,>$ 表示 L^2 的內積. 而 $C_\Psi = 2\pi \int \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega$. (這裡說明 $\int \Psi(x) dx = 0$ 是必要的.)

在時間及頻率的分析時, 我們通常僅僅對 $a > 0$ 有興趣. 在此它的重建公式寫成:

$$f(x) = 2C_{\Psi}^{-1} \int_0^{\infty} [\int < f, \Psi^{a,b} > \Psi^{a,b}\, db] \frac{da}{a^2},$$

離散型則爲

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} < f, \Psi_{j,k} > \widetilde{\Psi}_{j,k}(x) \\ &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} < f, \widetilde{\Psi}_{j,k} > \Psi_{j,k}(x) \end{aligned}$$

其中 $\{\Psi_{j,k}\}$ 及 $\{\widetilde{\Psi}_{j,k}\}$ 都是 Riesz 基且

$$< \Psi_{j,k}, \widetilde{\Psi}_{l,m} >= \delta_{jl}\delta_{km} \qquad j,k,l,m \in \mathbb{Z}$$

稱 $\{\Psi_{j,k}\}$ 及 $\{\widetilde{\Psi}_{j,k}\}$ 互爲對偶基底 (dual base). 若 $\{\Psi_{j,k}\}$ 是正規基, 則 $\widetilde{\Psi}_{j,k} = \Psi_{j,k}$. 還有其它型態上的分類, 但我們不深入討論, 請參考 [3] 及 [7].

1.3 多重解分析

在正式介紹 Daubechies 的凌波函數之前, 讓我們先瞭解多重解分析. 設 V_j 是一族 $L^2(\mathbb{R})$ 的子空間且滿足以下條件 :

(1) $\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots$

(2) $\cup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中綢密.

(3) $\cap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{\emptyset\}$

(4) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$

由以上的四個條件, 我們可知這些空間可以定義一個從 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 到 V_j 的投影算子 (othogonal projection) P_j. 從 (2) 的式子可得知 :

$$\lim_{j\to\infty} P_j f = f, \quad \text{for } f \in L^2(R).$$

這裡要說明的是, (2) 這個式子 $\cup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ 僅僅綢密在 $L^2(R)$, 不是等於它, 且這收斂是對範數收斂, 不是點收斂. 從 (3) 我們知

$$\lim_{j\to-\infty} P_j f = 0, \quad \text{for } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

對 (4) 這性質有很好的應用, 使細層與粗層有某種關係, 可經由某種簡單的運算從細層得到粗層的投影.

如果 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, 且滿足 (1) 至 (4) 的條件, 我們稱 ϕ 生成一個多重解分析 (MRA).

1.4 Daubechies 的凌波函數

以下談到本章的主題, Daubechies 的凌波函數. 令 $c_k = 0, k \notin \{0, \ldots, 2p-1\}$, 且滿足以下條件

$$\begin{aligned} &(1)\ \textstyle\sum_k c_k = 2, \\ &(2)\ \textstyle\sum_k (-1)^k k^m c_k = 0, \text{ for } 0 \le m \le p-1, \quad (0^0 := 1) \\ &(3)\ \textstyle\sum_k c_k c_{k-2m} = 2\delta_{0m}. \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

其中 p 是一個正整數, 也稱作 Daubechies 的凌波函數的階數. (此處我們不証明以上的 c_k 有解, 但是確實已知對每個 $p \ge 1$ 有 $2p$ 個非零解.) 例如 $p = 1$ 有 $c_0 = 1, c_1 = 1$ 和 $p = 2$ 有

$$c_0 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, c_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, c_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}, c_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}.$$

若給定正整數 p, 定義

$$m_0(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2p-1} c_k e^{-ik\omega}.$$

則 m_0 是週期 2π 的三角多項式. 我們可以直接算出

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega+\pi)|^2 = 1. \tag{1.4.2}$$

因爲

$$\begin{aligned}
|m_0(\omega)|^2+|m_0(\omega+\pi)|^2 &= \frac{1}{2}\sum_k c_k e^{-ik\omega}\overline{\frac{1}{2}\sum_l c_l e^{-il\omega}}+\frac{1}{2}\sum_k(-1)^k c_k e^{-ik\omega}\overline{\frac{1}{2}\sum_l(-1)^l c_l e^{-il\omega}}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{k,l} c_k c_l e^{i(l-k)\omega}+\frac{1}{4}\sum_{k,l}(-1)^{k+l} c_k c_l e^{i(l-k)\omega}\\
&= \frac{1}{4}\sum_l\sum_m c_l c_{l+m} e^{im\omega}+\frac{1}{4}\sum_l\sum_m(-1)^m c_l c_{l+m} e^{im\omega}\\
&= \frac{1}{2}\sum_l\sum_m c_l c_{l+2m} e^{im\omega}\\
&= \frac{1}{2}\sum_m\sum_l c_l c_{l+2m} e^{im\omega}\\
&= 1
\end{aligned}$$

此因 $\{c_k\}$ 滿足條件 (3), 而且 $\{c_k\}$ 是有限長的數列.

因 (1) 則 $m_0(0)=1$, 並且令

$$\hat{\phi}(\omega)=\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n} m_0(\frac{\omega}{2^j}) \tag{1.4.3}$$

Mallat(1989) 証明上式的右邊存在. 我們略述如下：考慮

$$f_n(\omega)=\frac{1}{2\pi}[\prod_{j=1}^{n} m_0(\frac{\omega}{2^j})]\chi_{[-2^n\pi,2^n\pi]}(\omega),$$

則 $\lim_{n\to\infty} f_n=\hat{\phi}$ 點收斂. 更進一步, 可推得

$$\begin{aligned}
\int|f_n(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2^n\pi}^{2^n\pi}\prod_{j=1}^{n}|m_0(\frac{\omega}{2^j})|^2 d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2^{n+1}\pi}\prod_{j=1}^{n}|m_0(\frac{\omega}{2^j})|^2\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2^n\pi}[\prod_{j=1}^{n-1}|m_0(\frac{\omega}{2^j})|^2][|m_0(\frac{\omega}{2^n})|^2+|m_0(\frac{\omega}{2^n}+\pi)|^2]d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-2^{n-1}\pi}^{2^{n-1}\pi}\prod_{j=1}^{n-1}|m_0(\frac{1}{2^j}\omega)|^2 d\omega\\
&= ||f_{n-1}||^2.
\end{aligned}$$

因爲 $||f_0||^2=1$, 再由 Fatou's 引理, 則

$$\int|\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega\le\lim_{k\to\infty}\inf\int|f_k(\omega)|^2 d\omega\le 1.$$

因此 (1.4.3) 有定義, 我們可得

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}). \tag{1.4.4}$$

則它的逆富氏變換式爲

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x-k).$$

我們稱 ϕ 是自格函數 (scaling function), $m_0(\omega)$ 是 ϕ 的特徵函數 (characteristic function), c_k 是 ϕ 的自格係數 (scaling coefficients), 上面等式稱爲自格等式 (scaling equation).

$m_0(\omega)$ 是一個三角多項式, 且滿足等式 (1.4.2). 有幾個關於 $\{\phi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ (以後我們簡寫成 ϕ_{0k}) 是正規集的等價條件, 我們將留到第三章中討論. 在此我們僅僅說明 ϕ_{0k} 是正規集. 我們只須修改 Mallat 的証明, 把 $|f_n(\omega)|^2$ 的積分改成 $|f_n(\omega)|^2 e^{ik\omega}$ 的積分, 即可得到所要結果.

以下是從自格函數推導凌波函數的作法. 其主要概念是, 從多重解分析中取層與層之間的正交差集. 若 ϕ 生成一多重解分析. 則我們希望 $V_1 = V_0 \oplus W_0$ 且 W_0 是由另一函數 $\psi(x)$ 的平移所生成. 若 $f \in W_0$ 則 $f(x) = \sum_k v_k \Psi(x-k)$, 則 $\hat{f}(\omega) = \hat{v}(\omega)\hat{\Psi}(\omega)$. 其中數列 v_k 及函數 $v(\omega)$ 將在往後明瞭.

因爲 $f \in W_0$, 則 $f \in V_1$, 而且 $f \perp V_0$. 再因 $f \in V_1$, 則

$$f(x) = \sum_k f_k \phi(2x-k),$$

其中 $f_k = < f(x), \phi(2x-k) >$. 考慮 f 的富氏轉換

$$\hat{f}(\omega) = \sum_k f_k e^{-ik\frac{\omega}{2}} \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) = m_f(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}), \tag{1.4.5}$$

其中令 $m_f(\omega) = \sum_k f_k e^{-ik\omega}$, 而 m_f 是屬於 $L^2([0,2\pi])$ 且週期 2π 的函數. 我們要求 $f \perp V_0$, 亦即 $f \perp \phi(x-k)$, 對所有的 k, 所以

$$\int \hat{f}(\omega)\overline{\hat{\phi}(\omega)} e^{ik\omega} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

或

$$\int_0^{2\pi} \sum_l \hat{f}(\omega + 2\pi l)\overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)} e^{ik\omega} d\omega = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

所以

$$\sum_l \hat{f}(\omega + 2\pi l)\overline{\hat{\phi}(\omega + 2\pi l)} = 0.$$

從 (1.4.4), (1.4.2) 及 (1.4.5) 知,

$$m_f(\omega)\overline{m_0(\omega)} + m_f(\omega + \pi)\overline{m_0(\omega + \pi)} = 0.$$

由 (1.4.2) 知 $m_0(\omega)$ 和 $m_0(\omega + \pi)$ 不會同時爲 0, 即存在一個週期 2π 的函數 $\lambda(\omega)$ 使得

$$m_f(\omega) = \lambda(\omega)\overline{m_0(\omega + \pi)}$$

且 $\lambda(\omega) + \lambda(\omega + \pi) = 0$. 讓我們將 λ 寫成 $\lambda(\omega) = e^{i\omega} v(2\omega)$, 對某個 $v(\omega)$, 則

$$\hat{f}(\omega) = e^{i\omega/2}\overline{m_0(\omega/2 + \pi)} v(\omega)\hat{\phi}(\omega/2).$$

現在可以令

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\omega) &= e^{i\omega/2}\overline{m_0(\omega/2 + \pi)}\hat{\phi}(\omega/2) \\ &:= \frac{1}{2}\sum_k g_k e^{-ik\frac{\omega}{2}}\hat{\phi}(\omega/2) \end{aligned}$$

我們可得

$$\psi(x) = \sum_k g_k \phi(2x - k),$$

其中 $g_k := (-1)^k c_{1-k}$. 而 ψ 即是凌波函數, 這裡也定義

$$m_1(\omega) = e^{i\omega}\overline{m_0(\omega + \pi)}. \tag{1.4.6}$$

爲 ψ 的特徵函數.

1.5 凌波函數的分解及重建

以下我們用 Daubechies 的凌波函數爲例, 來介紹凌波分解及凌波重建, 並結束這一章簡介. 所謂凌波分解即是考慮 $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$, 對任意 $j \in \mathbb{Z}$. 若 $f_N \in V_N$, 則

$$f_N = f_{N-1} + g_{N-1},$$

在此 $f_{N-1} \in V_{N-1}$, $g_{N-1} \in W_{N-1}$, 如此下去可推得

$$f_N = g_{N-1} + g_{N-2} + \cdots + g_{N-M} + f_{N-M},$$

這分解是唯一的, 稱之爲凌波分解. 以下我們用 Daubechies 的凌波函數, 來舉例說明. 因爲

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x-k)$$
$$\psi(x) = \sum_k g_k \phi(2x-k)$$

且 $V_1 = V_0 + W_0, \phi(2x) \in V_1, \phi(2x-1) \in V_1$, 則存在 $\{a_k\}, \{b_k\}$, 這兩個序列使得

$$\phi(2x) = \sum_k a_{-2k}\phi(x-k) + b_{-2k}\psi(x-k)$$
$$\phi(2x-1) = \sum_k a_{1-2k}\phi(x-k) + b_{1-2k}\psi(x-k)$$

以上兩個式子, 可結合成

$$\phi(2x-l) = \sum_k [a_{l-2k}\phi(x-k) + b_{l-2k}\psi(x-k)] \quad l \in \mathbb{Z},$$

其中對 Daubechies 的正規凌波函數可有 $a_{-2k} = c_{2k}, b_{-2k} = g_{2k}$ 及 $a_{1-2k} = c_{1-2k}, b_{1-2k} = g_{1-2k}$, 此即稱爲 ϕ 及 ψ 的凌波分解及合成關係式.

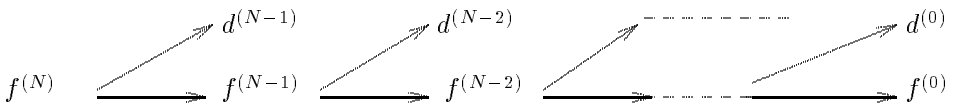
若 f 在 V_N 的投影 $f_N \in V_N$, 則有一序數 $< f_k^{(N)} >$, 使得

$$f_N = \sum_k f_k^{(N)} \phi(2^N x - k).$$

由凌波分解及合成的關係式, 可得

$$\begin{aligned} f_N &= \sum_k f_k^{(N)} \phi(2^N x - k) \\ &= \sum_k f_k^{(N)} [\sum_l a_{k-2l}\phi(2^{N-1}x - l) + b_{k-2l}\psi(2^{N-1}x - l)] \\ &= \sum_l \sum_k f_k^{(N)} a_{k-2l}\phi(2^{N-1}x - l) + \sum_l \sum_k f_k^{(N)} b_{k-2l}\psi(2^{N-1}x - 1) \end{aligned}$$

可令 $f_k^{(N-1)} = \sum_l f_l^{(N)} a_{l-2k}$ 及 $d_k^{(N-1)} = \sum_l f_l^{(N)} b_{l-2k}$. 因此我們有以下的分解演算法



再因

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x-k),$$

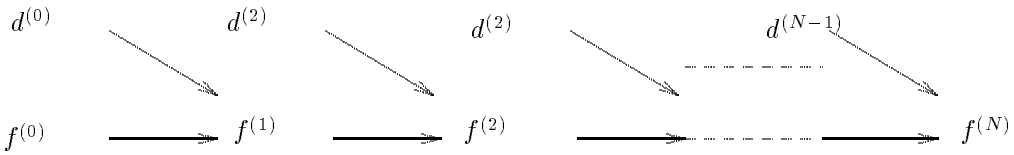
及

$$\psi(x) = \sum_k g_k \phi(2x-k).$$

若 $f_{N-K} = \sum_l f_l^{N-K} \phi(2^{N-K}x - l), d_{N-K} = \sum_l d_l^{N-K} \psi(2^{N-K}x - l)$, 則

$$\begin{aligned} f_{N-K+1} &= \sum_l f_l^{(N-K)} \phi(2^{N-K}x - l) + \sum_l d_l^{(N-K)} \psi(2^{N-K}x - l), \\ &= \sum_l f_l^{(N-K)} \sum_k c_k \phi(2^{N-k+1}x - 2l - k) + \sum_l d_l^{(N-K)} \sum_k g_k \psi(2^{N-K+1}x - 2l - k), \end{aligned}$$

因此 $f_k^{(N-K+1)} = \sum_l f_l^{(N-K)} c_{k-2l} + d_l^{(N-K)} g_{k-2l}$, 現在我們有重建的演算法:



第二章 數值積分法

在這一章中, 我們討論多項式與自格函數的積分, 亦即

$$M_{m,k}^{p} = \int x^{m}\phi(x-k)dx,$$

其中 m 是非負整數. 至於討論這些積分的原因有以下幾點 : 各種數值積分

$$\int f(x)\phi(x)dx$$

都須這些值. 在製造有限區間中的凌波函數 (有關這種凌波函數可參考 [15]), 有限元法的計算和很多其它應用須要

$$\int f(x)\phi(x)dx.$$

因此它的正確與否, 將有其重要性. 這一章中, 我們有一個理論上正確的疊代公式, 它依賴於自格係數準確與否.

$$M_{m}^{p} = \frac{1}{2(2^{m}-1)}\sum_{k} c_{k}\sum_{l}^{m}\binom{m}{l}M_{m-l}^{p}k^{l}.$$

在介紹以上結果前, 不妨先討論一下有限元方法. 因此第一節先敘述其方法, 但我們不詳細討論其性質, 例如其收斂速度, 一般化理論,...等等, 都將被略去. 第二節則討論 M_{m}^{p} 及

$$N_{m,k}^{p} = \int_{0}^{\infty} x^{m}\phi(x-k)dx,$$

的積分. 最後以疊積或稱迴旋積 (convolution) 亦即

$$f * g(x) = \int f(t)g(x-t)dt$$

作爲本章的結束.

2.1 有限元法

微分方程中, 一維兩點邊界值問題, 敘述如下 :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

其中 $f \in L^2[0,1]$. 以上是一個模型問題. 如果考慮

$$V = \{v \in H^1(0,1) | v(0) = v(1) = 0\}$$

而

$$H^1(0,1) = \{v \in L^2[0,1] | v' \in L^2[0,1]\}.$$

則 (2.1.1) 可以和以下敘述等價 : 求 $u \in V$ 使得

$$(u', v') = (f, v), \quad \forall v \in V \tag{2.1.2}$$

想法上是用 Galerkin 法解 (2.1.2). 所謂 Galerkin 法, 即是求一函數空間 V_h, 使得對 $f \in V$ 都有一級數函數 f_h 使得

$$\lim_{h \to 0} ||f - f_h|| = 0$$

例如取 $[0,1]$ 的分割 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1$, 則 $h = \max_{1 \le i \le n}\{(x_i - x_{i-1})\}$ 並且定義 $\phi_i(x)$ 爲在節點上 $\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}$ 的一階分片連續多項式且

$$V_h = \text{span}\{\phi_i : i = 1, \ldots, n-1\}$$

因而對 $u_h \in V_h$ 即有 α_i, 對 $i = 1, \ldots, n-1$ 使得

$$u_h = \sum \alpha_i \phi_i. \tag{2.1.3}$$

先求 u_h 即 (2.1.2) 可寫成 : 求 $u_h \in V_h$ 使得

$$(u_h', v_h') = (f, v_h'), \quad \forall v_h \in V_h$$

而 $\dim V_h = n-1$, 因此上式又等價於

$$(u_h', \phi_j') = (f, \phi_j'), \quad \forall j = 1, \ldots, n-1$$

現在我們代入 (2.1.3) 即得

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\phi_i', \phi_j') = (f, \phi_j) \quad \forall j = 1, \ldots, n-1$$

令 $< A >_{i,j} = < \phi_i', \phi_j' >$ 及 $b_j = (f, \phi_j)$ 得

$$A\alpha = b,$$

而 A 是對稱正定矩陣, 即 u_h 有解. 現在我們欲將一階分片連續函數, 取代成凌波函數或自格函數. 因此面臨 (f, ϕ_j) 及 (ϕ_i', ϕ_j') 的積分. 我們將在本章中討論前面兩種型式的積分.

2.2 自格函數對多項式的微分

接續上節, 我們想求 $(q, \phi_{j,k})$ 的值. 想法是我們先考慮 $(x^m, \phi_{j,k})$ 的積分. 如果 q 是足夠平滑的函數, 亦即 $q \in C^n$, 則 q 的 Taylor 展式爲

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k + \frac{q^{(n)}(\xi)}{n!}(x-y)^n,$$

其中 ξ 在 x 和 y 之間. 如果 $q^{(n)}$ 是有界的, 則數值積分的公式, 可由多項式積分導出. 因爲

$$(q(x), \phi_{j,k}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q^{(k)}(y)}{k!}((x-y)^k, \phi_{j,k}) + \frac{q^{(n)}(\xi)}{n!}((x-y)^n, \phi_{j,k}),$$

而 $q^{(n)}$ 有界, 且 $\phi_{j,k}$ 的涵蓋足夠小, 我們不仿就說它是 h, 則只須考慮 x 落在 ϕ_j 的涵蓋中的 q 的值. 因此, $(q, \phi_{j,k})$ 和 $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{q^{(k)}(y)}{k!}((x-y)^k, \phi_{j,k})$ 的差是 $O(q^{(n)}(\xi)((x-y)^n, \phi_{j,k}))$, 由以上的假設, 再加上 $\phi_{j,k}$ 的積分是 1, 可知誤差估計爲 $O(h^n)$. 令

$$M_{m,k}^p = \int x^m \phi(x-k) dx$$

我們可由自格等式求得

$$M_{m,0}^p = \frac{1}{2(2^m - 1)} \sum_k c_k \sum_{l=1}^{m} \binom{m}{l} k^l \int x^{m-l} \phi(x) dx$$

的公式, 只要我們知道 $\int \phi dx = 1$, 然後我們即可用疊代方法求得 $M^p_{m,0}$. 由上節我們所須的積分是

$$\int_a^b q(x)\phi(2^j x - k)dx$$

此種形式的積分, 其中 $q(x)$ 先假定爲多項式. 我們將再簡化這類的積分爲

$$N^p_{m,k} = \int_0^\infty x^m \phi(x-k)dx$$

此因只要 $\phi(2^j x - k)$ 的涵蓋足夠小. 而以上的積分所面臨的是邊界上的自格函數. 若 $k \geq 0$ 則 $N^p_{m,k} = M^p_{m,k}$. 現在只須對 $2-p \leq k \leq -1$ 求解. 利用變數變換可得

$$\int_0^\infty x^m \phi(x-k)dx = \frac{1}{2^{m+1}} \sum_l c_l \int_0^\infty x^m \phi(x-(2k+l))dx$$

對 $1-p \leq k \leq -1$ 的自格函數 $\phi(x-k)$ 有一半以上的函蓋能在 $[0,\infty)$. 對 $-2k \leq l \leq 2p-1$ 的自格函數則其涵蓋完全落在 $[0,\infty)$ 中. 綜合以上結果,

$$N^p_{m,k} = \frac{1}{2^{m+1}}[\sum_{l<-2k} c_l N^p_{m,2k+l} + \sum_{l\geq -2k} c_l M^p_{m,2k+l}].$$

假設 $M^p_{m,k}$ 已知, 則有以下的線性系統 ;

給定 $p \geq 2$ 且固定 $m \geq 0$ 求解未知量 $N^p_{m,k}$ 對 $2-2p \leq k \leq -1$. 令

$$\begin{cases} x_k & = N^p_{m,k} \\ b_k & = \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{l=2k}^{2p-1} c_l M^p_{m,l-2k}, \end{cases}$$

再令 $b = (b_k)^T$ 且 $A = (a_{kl})$ 是 $2p-2$ 階的矩陣且 $a_{kl} = c_{2k-l}$. 則 $x = (x_k)^T$ 是

$$(I - \frac{1}{2^{m+1}}A)x = b$$

的解. 我們要說明的是 A 與 m 無關的有限矩陣. 而且 $||A|| \leq \sqrt{2}$.

引理2.2.1. 令 $A = A(p)$ 是以上的定義. $\|\cdot\|$ 是由 Euclidean 的範數所引出的矩範數, 我們可得

$$\|A\| \leq \sqrt{2}.$$

因爲 $A = \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix}$ 這裡

$$S = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ c_{2p-3} & c_{2p-4} & \cdots & c_0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad T = \begin{pmatrix} c_{2p-1} & c_{2p-2} & \cdots & c_2 \\ & & \ddots & \\ 0 & & c_{2p-1} & c_{2p-2} \end{pmatrix}.$$

從 (1.4.1) 可知 $ST^T = TS^T = 0$. 因此

$$AA^T = \begin{pmatrix} SS^T & 0 \\ 0 & TT^T \end{pmatrix}.$$

再從 (1.4.1) , 我們有 $SS^T + TT^T = 2I$. 因此假如 λ 是 SS^T 的固有值相對固有向量 $\boldsymbol{v}$, 則 λ 和 $2-\lambda$ 是 AA^T 的固有值且相對的固有向量 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$. 再因 AA^T 是半正定矩陣, 我們可得 $0 \le \lambda \le 2$. 因此

$$\|AA^T\| \le 2.$$

因此對任何 $m \ge 0$ 和 $p \ge 2$, *Neumann* 級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2^{m+1}} A)^n \tag{2.2.1}$$

對計算 $I - \frac{1}{2^{m+1}} A$ 的逆矩陣是有效的.

2.3 多項式和自格函數的疊乘積

這節考慮

$$L^p_{m.k} = \int x^m \phi(x) \phi(x-k) dx.$$

的積分. 以上的積分是對

$$\int q(x) \phi(x) \phi(x-k) dx$$

的積分的基本形式. 因爲 $L^p_{0,k} = \delta_{0,k}$, 所以我們只考慮 $m \ge 1$. 因爲 p 階的 Daubechies 的凌波函數 $\phi(x)$ 的涵蓋是 $[0, 2p-1]$. 因此未知量只有 $2-2p \le k \le 2p-2$.

$L^p_{m,k}$ 其中 $2-2p \le k \le 2p-2$. 而且

$$\begin{aligned} L^p_{m,k} &= \int x^m \sum_n c_n \phi(2x-n) \sum_\ell c_\ell \phi(2x-2k-\ell)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{n,\ell} c_n c_\ell \int (\frac{x+n}{2})^m \phi(x)\phi(x+n-2k-\ell)\, dx \\ &= \frac{1}{2^{m+1}} \Big[\sum_{n,\ell} c_n c_\ell L^p_{m,2k+\ell-n} + \sum_{n,\ell} c_n c_\ell \sum_{r=1}^{m} \binom{m}{r} n^r L_{m-r,2k+\ell-n} \Big]. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

以上的線性系統可寫成

$$(I - \frac{1}{2^{m+1}} A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{2.3.2}$$

令 $N = 2p-2$, 則 $\boldsymbol{x} = (L^p_{m,-N}, \ldots, L^p_{m,N})^T$, $\boldsymbol{b} = (b_k)$ 和 $A = (a_{k,j})$ 有著

$$b_k = \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{n=1}^{2p-1} c_n \sum_{\ell=\ell_1}^{\ell_2} c_\ell \sum_{r=1}^{m} \binom{m}{r} n^r L^p_{m-r,2k+\ell-n}, \quad \text{且} \begin{cases} \ell_1 = \max\{n-2k-N, 0\}, \\ \ell_2 = \min\{n-2k+N, 2p-1\} \end{cases}$$

和

$$a_{k,j} = \sum_n c_n c_{n+j-2k}, \qquad -N \le j,k \le N.$$

這裡要說明的是, ϕ 的微分也滿足自格等式

$$\phi^{(s)}(x) = \sum_k 2^s c_k \phi^{(s)}(2x-k). \tag{2.3.3}$$

因爲 $\phi \in C^{r(p)}$ 和 $r(p) \to \infty$ 當 $p \to \infty$, 我們可以應用式子 (2.3.3) 在 $\int \phi(x)\phi^{(s)}(x-k)\, dx$ 中並且重複以上步驟在 (2.3.1). 我們求得矩陣 $A = A(p)$ 有固有值 $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$, 當 $p \to \infty$. 我們將在下節中, 更仔細討論這類積分.

矩陣 A 有一個簡單的形式. 由 (1.4.1) 在偶數行的元素是 0 除了 $a_{k,2k} = 2$; 在奇數行的元素是 0 除了 $\lceil \frac{j-2p}{2} \rceil \le k \le \lfloor \frac{j+2p}{2} \rfloor$, 它是一個 $2p$ 元素的向量

$$\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} \sum_k c_k c_{k+(2p-1)} \\ \vdots \\ \sum_k c_k c_{k+3} \\ \sum_k c_k c_{k+1} \\ \sum_k c_k c_{k+1} \\ \sum_k c_k c_{k+3} \\ \vdots \\ \sum_k c_k c_{k+(2p-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \phi(x)\phi(x-\frac{2p-1}{2})\, dx \\ \vdots \\ \int \phi(x)\phi(x-\frac{3}{2})\, dx \\ \int \phi(x)\phi(x-\frac{1}{2})\, dx \\ \int \phi(x)\phi(x-\frac{1}{2})\, dx \\ \int \phi(x)\phi(x-\frac{3}{2})\, dx \\ \vdots \\ \int \phi(x)\phi(x-\frac{2p-1}{2})\, dx \end{pmatrix}.$$

引理：令 $A = A(p)$ 是以上定義的矩陣, $\|\cdot\|$ 是由 Euclidin 引出的範數. 可推得

$$\|A\| \le 2\sqrt{2}.$$

[證明] 定義矩陣

$$B = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & & \cdots & c_{2p-1} & & \\ & c_0 & c_1 & \cdots & c_{2p-2} & c_{2p-1} & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & c_0 & c_1 & \cdots & c_{2p-1} \end{pmatrix}_{(2N+1)\times 2(N+p)}$$

和矩陣

$$D = \begin{pmatrix} c_{2p-2} & c_{2p-1} & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & & & c_0 & c_1 \end{pmatrix}_{(2N+1)\times 2(N+p)}.$$

亦即 $B_{ij} = c_{j-i}$ 和 $D_{ij} = c_{(2p-1)+j-2i}$. 觀察可得

$$A = D\,B^T.$$

我們將矩陣 D 分成三部份:

$$D = \begin{pmatrix} E \\ F \\ G \end{pmatrix} \begin{matrix} p-1 \\ 2p-1 \\ p-1 \end{matrix}$$

更精確的表示爲,

$$E_{ij} = c_{2(p-i)+j-1}$$

$$F_{ij} = c_{j-2(i-1)-1}$$

$$G_{ij} = c_{2(p-i)-1-2(N+p)+j}$$

現在我們考慮矩陣 DD^T. 在對角線上, 它形成對稱矩陣 EE^T, GG^T 和 FF^T. 因此只先考慮上三角的部份, 亦即 $i \le j$. 現在

$$\begin{aligned} (EE^T)_{ij} &= \sum_{k=1}^{2(N+p)} E_{ik}E_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^{2i} c_{2(p-i)+k-1}c_{2(p-j)+k-1} \\ &= \sum_{k=2(p-i)}^{2p-1} c_k c_{k-2(j-i)} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}(GG^T)_{ij} &= \sum_{k=1}^{2(N+p)} G_{ik}G_{jk} \\ &= \sum_{k=2(N+p)-2(p-j)+1}^{2(N+p)} c_{2(p-i)-1-2(N+p)+k}c_{2(p-j)-1-2(N+p)+k} \\ &= \sum_{k=2(j-i)}^{2(p-i)-1} c_k c_{k-2(j-i)}\end{aligned}$$

因此

$$(EE^T)_{ij} + (GG^T)_{ij} = \sum_{m=2(j-i)}^{2p-1} c_m c_{m-2(j-i)} = \sum_m c_m c_{m-2(j-i)}.$$

從，我們有 $EE^T + GG^T = 2I_{p-1}$.

接著, 我們可得

$$\begin{aligned}(FF^T)_{ij} &= \sum_{k=1}^{2(N+p)} F_{ik}F_{jk} \\ &= \sum_{k=2j-1}^{2(i-1)+2p} c_{k-2(i-1)-1}c_{k-2(j-1)-1} \\ &= \sum_{k=2(j-i)}^{2p-1} c_k c_{k-2(j-i)}\end{aligned}$$

以上的結果是 $FF^T = 2I_{2p-1}$.

然後考慮 DD^T 的下三角矩陣. 舉個例來說

$$(EF^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{2(N+p)} E_{ik}F_{jk}.$$

對 $2j-1 > 2i$, 很明顯的 $(EF^T)_{ij} = 0$.

$$\begin{aligned}(EF^T)_{ij} &= \sum_{k=2j-1}^{2i} c_{2(p-i)+k-1}c_{k-2(j-1)-1} \\ &= \sum_{m=2(p-i+j-1)}^{2p-1} c_m c_{m-2(p-i+j-1)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

因此 $EF^T = 0$. 同理可推得 $GF^T = 0$. 它是容易推得 $EG^T = 0$ 僅僅比較矩陣 E 和 G 非零的元素.

最後我們有

$$DD^T = \begin{pmatrix} EE^T & & \\ & 2I & \\ & & GG^T \end{pmatrix}.$$

仿照引理 2.2.1 的證明 假如 $\lambda \geq 0$ 是矩陣 DD^T 的固有值, 則 $\lambda = 2$ 或 $2 - \lambda \geq 0$ 也是固有值. 因此 $\|D\| = \sqrt{2}$.

現在我們討論矩陣 B. 令 $\boldsymbol{x}$ 是 $2(N+p)$ 維度的向量. 延擴 $\boldsymbol{x}$ 成 $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_k) \in \ell^2$ 使得

$$\tilde{x}_k = \begin{cases} x_k & \text{if } 1 \leq k \leq 2(N+p) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

則

$$\begin{aligned} \|B\boldsymbol{x}\|^2 &= \sum_{i=1}^{2N+1} \Big(\sum_j c_{j-i} \tilde{x}_j \Big)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{2N+1} \sum_{j,k} c_{j-i} c_{k-i} \tilde{x}_j \tilde{x}_k \\ &= \sum_{i=1}^{2N+1} \sum_{j,k} c_j c_k \tilde{x}_{j+i} \tilde{x}_{k+i} \\ &= \sum_k c_k^2 \sum_{i=1}^{2N+1} \tilde{x}_{k+i}^2 + \sum_{j \neq k} c_j c_k \sum_{i=1}^{2N+1} \tilde{x}_{j+i} \tilde{x}_{k+i}. \end{aligned}$$

我們有 $\sum_{i=1}^{2N+1} \tilde{x}_{k+i}^2 \leq \|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2$ 和, 再由 Cauchy-Schwarz 不等式, $\sum_{i=1}^{2N+1} \tilde{x}_{j+i} \tilde{x}_{k+i} \leq \|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2$. 因此

$$\begin{aligned} \|B\boldsymbol{x}\|^2 &\leq \sum_k c_k^2 \|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2 + \sum_{j \neq k} c_j c_k \|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2 \\ &= \Big(\sum_k c_k \Big)^2 \|\boldsymbol{x}\|^2 \\ &= 4 \, \|\boldsymbol{x}\|^2. \end{aligned}$$

因此 $\|B\| \leq 2$ 和 $\|A\| \leq \|D\| \, \|B\| \leq 2\sqrt{2}$. □

2.4 自格函數的微分與其積分

接著上節所留下的問題, 和有限元法的應用, 我們想知自格函數 ϕ 其

$$< \phi'(x), \phi'(x-k) >$$

的積分爲何？首先, ϕ 是否可微分, 我們給出以下結果其證明不仿參考 [7] : 對於 Daubechies 的正規的自格函數, 在這節中 p 階的自格函數, 記爲 $\phi_{<p>}(x)$. 很明顯的 $\phi_{<l>}(x)$ 是不連續, $p \geq 2$ 時是連續函數. 而且 當階數 p 增加時, $\phi_{<p>}$ 的可微程度也將提高. $\phi_{<2>}(x)$ 是不可微, $\phi_{<3>}(x)$ 是可微的, 但是 $\phi'_{<3>}(x)$ 就已經非常不平滑 ($\phi'_{<3>}(x) \in C^{0.09}$, 式中 C^{α} 其中 α 是 Lipshz 數). $\phi_{<4>}(x)$ 是一次可微. 我們不清楚 $\phi_{<6>}(x)$ 是否二次可微, 即使在理論上可以, 實際也很難計算其數值. 我們確定 $p \geq 7$ 時 $\phi_p(x)$ 是二次可微. 大略知道自格函數的微分後, 我們回答以上的問題.

假如 $\phi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是自格函數相對於自格係數 c_k 和 d_k, 且定義

$$F(x) = \int \phi(t)\varphi(t-x)dt$$

則 F 也是一個自格函數, 其自格係數爲 $e_k = \frac{1}{2}\sum_m c_{k+m}d_m$. 此因

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \phi(t)\varphi(t-x)dt \\
&= \int \sum_k c_k\phi(2t-k)\sum_m d_m\varphi(2t-2x-m)dt \\
&= \sum_k\sum_m c_k d_m \int \phi(2t-k)\varphi(2t-2x-m)dt \\
&= \frac{1}{2}\sum_k\sum_m c_k d_m \int \phi(t)\varphi(t-2x-m+k)dt \\
&= \frac{1}{2}\sum_k\sum_m c_{k+m} d_m \int \phi(t)\varphi(t-2x+k)dt \\
&= \sum_k (\frac{1}{2}\sum_m c_{k+m}d_m)F(2x-k).
\end{aligned}$$

由以上的結果, 我們如果知道自格係數, 則求自格函數的整數點值, 將轉成解一個固有值問題. 假設 $\phi(x)$ 是一自格函數, 令其爲

$$\phi(x) = \sum_k c_k\phi(2x-k).$$

再加上 $\phi(x)$ 是 n 次可微分, 對 $m \leq n$ 可推得

$$\phi^{(m)}(x) = 2^m \sum_k c_k\phi^{(m)}(2x-k).$$

因此 $\phi^{(m)}$ 對 $0 \le m \le n$ 都是自格函數, 它的自格係數分別是 $2^m c_k$.

現在, 我們可以看出, $<\phi^{(r)}(x), \phi^{(s)}(x-k)>$ 的積分, 即是求固有值問題. 特別對 Daubechies 的凌波函數, 延續上一節的矩陣 A. 我們有固有值 $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ 分別對不同的 $r+s$ 的和. 對其固有值的固有向量, 必須有關係的唯一決定. 因爲 $x^m \in V_0$, 對 $0 \le m \le n$.(這句話的意思是, 如果我們取任一有限區間, 亦即對 x^m 在這有限區間外是 0. 因此它就在 $L^2(\mathbb{R})$ 中, 又對 ψ 和 x^m 正交, 其中 $0 \le m \le n$. 因此 $\sum < x^m, \phi(\cdot - k) > \phi(x-k)$ 是有限項的和, 且在區間內等於 x^m.) 則有

$$x^r = \sum_k k^r \phi(x-k) + P_{r-1},$$

其中 P_{r-1} 是一個多項式且階數不大於 $r-1$. 因此唯一決定的關係式可爲

$$\int \phi^{(s)}(x)dx = \int \phi^{(s)}(x) \sum_k k^r \phi^{(r)}(x-k)dx.$$

而上式等式的左邊等於 $(-1)^s$. 這個方法, 也可以被應用於求自格函數所有在 $\frac{k}{2^j}$ 對 k 是整數和 j 是正整數. 因爲求得整數點的值後, 再由自格等式求得 $\frac{k}{2}$ 其中 k 爲整數, 依此類推, 則可得所須結果.

第三章 正規集的充分必要條件

這一章完全獨立於前一章, 我們介紹一個小結果, 它是對自格函數 ϕ_{0k} 形成正規基底的充份條件的推廣. 若已知 $m_0(\omega) \neq 0$ 在 $[-\alpha\pi, \alpha\pi]$, 則對 $0 \leq \alpha \leq 1$ 須檢驗那些循環集 (cycle), 可以使得 $\phi_{0,k}$ 形成正規集, 第三節接續上節, 是否對任意的 $0 \leq \alpha \leq 1$, 都只須檢驗有限的循環集的數目就足夠呢 ?

3.1 正規集的充份必要條件

我們的條件是假設 (1.4.2) 成立且

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\frac{\omega}{2^j}).$$

若再加上 $m_0(0) = 1$, 則有以下敘述是等價的:

(1) ϕ_{0k} 是正規集. 爲說明方便, 這個條件我們記爲 (O)

(2) (Cohen 的條件) 若緊緻集 K 滿足 $|K| = 2\pi$ 和對所有 $\omega \in [-\pi, \pi]$, 存在 $n \in Z$ 使得 $\omega + 2n\pi \in K$. 有這樣的 K 且 0 是它的內點, 使

$$\inf_{n>0} \inf_{\omega \in K} |m_0(2^{-n}\omega)| > 0.$$

這條件記爲 (C).

(3) 我們定義一個循環集 $\{[\omega_0], \ldots, [\omega_{k-1}]\}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 同餘 (mod) 2π, 即是對 $\omega_j = 2\omega_{j-1}$, 且 $2[\omega_{k-1}] = [\omega_0]$, 其中每個元素都不同, 我們說這循環集的長度是 k. 若 $k = 1$ 稱爲退化循環集 (trivial cycle) 否則是非退化循環集 (non-trivial cycle). 以下是另一個等價條件. 不存在 non-trivial 循環集 $\{[\omega_0], \ldots, [\omega_{k-1}]\}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 使得 $|m_0(\omega_j)| = 1$, 對所有的 $j = 0, \ldots, k-1$. 我們用 (S) 來表示 (3) 的條件.

(4) 定義一運算 P_0 作用於 2π 週期的函數 f,

$$(P_0 f)(\omega) = |m_0(\frac{\omega}{2})|^2 f(\frac{\omega}{2}) + |m_0(\frac{\omega}{2} + \pi)|^2 f(\frac{\omega}{2} + \pi).$$

在 P_0 運算下不變的意思是 $P_0 f = f$. 則三角多項式在 P_0 運算下不變的函數只有常數函數, 以上是另一個等價條件, 用 (P) 來表示.

(5) 若假設 $m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{N} c_k e^{-ik\omega}$, 因爲 $\phi(x) = \sum_k c_k \phi(x-k)$, 令 $\alpha_l = \int \phi(x)\phi(x-l)dx$, 則

$$\begin{aligned}\alpha_l &= \sum_{m,n=0}^{N} c_n c_m \int \phi(2x-n)\overline{\phi(2x-2l-m)}dx \\ &= \sum_{m,n=0}^{N} c_n \overline{c_m} \alpha_{2l+m-n} \\ &= \sum_{k=-N+1}^{N-1} (\sum_{n=0}^{N} c_n \overline{c_{k-2l-n}})\alpha_k .\end{aligned}$$

定義 $(2N-1)\times(2N-1)$ 的矩陣 A 如下:

$$A_{kl} = \sum_{n=0}^{N} c_n \overline{c_{k-2l+n}}, \quad -N+1 \le l,k \le N-1,$$

若 1 是 A 的固有值且非退化 (nondegenerate), 這是第五個等價條件, 用 (L) 表示. 至於推廣是 (2) 的條件. 若 $m_0(\omega)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ 中沒有根, 則可造正規集.

對於這五個等價條件, 我們簡述如下 : (其說明順序 $(O) \Longrightarrow (C) \Longrightarrow (S) \Longrightarrow (P) \Longrightarrow (L) \Longrightarrow (O)$) 首先, 若 $\{\phi(x-k) : k \in Z\}$ 是正規集, 則可推得

$$\begin{aligned}\delta_{0k} &= \int \phi(x)\phi(x-k)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{ik\omega}d\omega \quad \forall k \in Z \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_k |\hat{\phi}(\omega+2k\pi)|^2 e^{ik\omega}d\omega \quad \forall k \in Z\end{aligned}$$

因此, 由 Parseval 等式可知 $\sum_k |\hat{\phi}(\omega+2k\pi)| = 1$. 給定 ω, 則存在 $l_\omega \in N$, 使得

$$\sum_{|k|\le l_\omega} |\hat{\phi}(\omega+2k\pi)|^2 \ge \frac{1}{2}$$

因爲 $\hat{\phi}$ 是連續函數, 所以有限項的和也是連續的. 對所有 $\zeta \in [-\pi,\pi]$, 則有 $\{\zeta \in [-\pi,\pi] : |\zeta-\omega| < \delta(\omega)\}$ 的開集使得

$$\sum_{|k|\le l_\omega} |\hat{\phi}(\zeta+2k\pi)|^2 \ge \frac{1}{4}$$

對於 ζ 在開集內. 因爲 K 是緊緻集, 則有一有限子集涵蓋 $[-\pi,\pi]$. 取 l_0 是最大的 l_{ω_j}. 則對 $\zeta \in [-\pi,\pi]$

$$(F) \qquad \sum_{|k|\le l_0} |\hat{\phi}(\zeta+2k\pi)|^2 \ge \frac{1}{4}$$

亦即對 $\omega \in [-\pi,\pi]$, 存在 $k \in [-l_0,l_0]$ 使得

$$|\hat{\phi}(\omega+2k\pi)| \ge [\frac{(2l_0+1)]^{-1/2}}{4}] \equiv C$$

則令

$$S_0 = \{\omega \in [-\pi,\pi] : |\hat{\phi}(\omega)| \ge C\}$$

及

$$S_l = \{\omega \in [-\pi,\pi] \backslash (\bigcup_{k=-l_0}^{l-1} S_k \bigcup S_0) : |\hat{\phi}(\omega+2l\pi| \ge C\}$$

對 l 在 $-l_0$ 及 l_0 之間. 因此 $\{S_l : -l_0 \le l \le l_0\}$ 形成對 $[-\pi,\pi]$ 的分割. 因爲 $|\hat{\phi}(0)| = 1 > C$ 並且 $\hat{\phi}$ 是連續的, 推得 0 是 S_0 的內點. 現在只須定義

$$K = \bigcup_{k=-l_0}^{l_0} \overline{(S_l+2k\pi)}$$

則 K 是我們所要的, 只須再證明條件 (C) 成立. 因 $m_0(0) = 1$ 且 K 是緊緻集, 則 K 是有界的, 故 (C) 又可簡化成只証明

$$\inf_{\omega \in K} |m_0(2^{-n}\omega)| > 0 \quad 1 \le n \le N_0$$

對某個 $N_0 \in N$. 考慮

$$|\hat{\phi}(\omega)| = |\prod_{n=1}^{N_0} m_0(\frac{\omega}{2^n})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2^{N_0}})|$$

由 (F) 我們可知 $\hat{\phi}(\omega)$ 是沒有根, 因此

$$|\prod_{n=1}^{N_0} m_0(\frac{\omega}{2^n})| \ge C' > 0$$

對某個 $C'>0$, 再由 (1.4.2) 知 $|m_0(\omega)|\le 1\,\forall\omega$, 且 $1\le n\le N_0$

$$|m_0(\frac{\omega}{2^n})|\ge|\prod_{k=1}^{N_0}m_0(\frac{\omega}{2^k})|\ge C'>0$$

即得證 $(O)\Longrightarrow(C)$.

現在欲証 $(C)\Longrightarrow(S)$, 先假設 (C) 成立. 若設 (S) 不成立. 亦即有一非退化循環集 $\{[\omega_1],\ldots,[\omega_n]\}$ 對 $\omega\to 2\omega$ 同餘 2π 使得 $|m_0([\omega_j])|=1\forall j=1,\ldots,n$. 取 $\omega_{j+1}\in K$ 且 $\omega_{j+1}=2[\omega_j]+2^mk\pi$, 這裡 k 是奇數. 因而可得 $m_0(\frac{\omega}{2^m})=0$, 假如我們重寫 $\omega_{j+1}=2^m[\omega_{j-m+1}]+2^mk\pi$, 因此與假設不符. 故證得 $(C)\Longrightarrow(S)$.

現在我們證明 $(S)\Longrightarrow(P)$. 假設有一個不是常數函數使得 (G) 成立, 則定義 $f_1(\omega)=f(\omega)-\min_\zeta f(\zeta)$, 及 $f_2(\omega)=-f(\omega)+\max_\zeta f(\zeta)$. 以上的 min 及 max 存在是因 f 是連續於 $[-\pi,\pi]$, 則 f_1,f_2 都至少有一根. 取 $f_j(0)\ne 0$(可以取得是因爲 f 不是常數函數, 則 $\min|f|\ne\max|f|$), 並定義 $f_0=f_j$, 則 f_0 是非負, $f_0(0)\ne 0$, 且 f_0 至少有一根, 更要緊的 f_0 滿足 (P). 因爲 $f_0(\omega)=0$ 對 $0\ne\omega\in[0,2\pi]$, 則

$$0=f_0(\omega)=P_0f_0(\omega)=|m_0(\frac{\omega}{2})|^2f_0(\frac{\omega}{2})+|m_0(\frac{\omega}{2}+\pi)|^2f_0(\frac{\omega}{2}+\pi).$$

因 M_0,f_0, 都是非負, 且 $M_0(\frac{\omega}{2}),M_0(\frac{\omega}{2}+\pi)$ 不同時爲 0. 因此 $f_0(\frac{\omega}{2})$ 或 $f_0(\frac{\omega}{2}+\pi)$ 是 0. 則可得 $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_k,\ldots$, 使得 $\omega_j=\tau\omega_{j+1}$. 而 $\tau:\omega\to 2\omega$ 同餘 2π, 因爲 f_0 是三角多項式, 因此 f_0 僅僅只有有限的根, 亦即

$$\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_k$$

其中 $k>1$. 若 $k=1$, 得 $\omega_2=\omega_1$, 即 $\omega_1=0$ (這與我們所取不和). 若 r 是第一個發生迴圈的數, 則 $\omega_r=\omega_k$, 否則對某個 $1<m<r$ 使得 $\omega_1=\tau^m\omega_1$, 則必有

$$\omega_1=\tau^r\omega_1=\omega_{r-m}$$

其中 $1<r-m<r$, 這又與 r 的假設不符. 對 f_0 的根是一些有限循環集的聯集. 若 $f_0(\omega)=0$ 則 $f_0(\omega+\pi)\ne 0$. 因爲 $\tau(\omega)=\tau(\omega+\pi)$, 則 ω 和 $\omega+\pi$ 將屬於同一個循環集, 假如循環集的長度

是 n, 則

$$\omega = \tau^n\omega = \tau^{n-1}\tau\omega = \tau^{n-1}\tau(\omega+\pi) = \omega+\pi$$

這是不可能的. 因此我們得到 $|m_0(\omega)| = 1$ 對這樣的循環集. 這矛盾於假設. 因此 $(S) \Longrightarrow (P)$.

以下證明 $(P) \Longrightarrow (L)$. 先計算

$$M_0(\omega) = \sum_k (\sum_n h_n \overline{h_{n-k}}) e^{-ik\omega},$$

$$M_0(\omega) f(\omega) = \sum_l (\sum_{k,n} h_n \overline{h_{n-1} f_{l-k}) e^{-il\omega}}.$$

因此,

$$(P_0 f)(\omega) = \sum_l (\sum_{k,n} h_n \overline{h_{n-k}} f_{2l-k}) e^{-il\omega},$$

$$(P_0 f)_l = \sum_{k,n} \overline{h_{n-k}} f_{2l-k} = \sum_m (\sum_n h_n \overline{h_{n-2l+n)}} f_m.$$

以上式子和我們所須要有點不同, 因爲 Lawton 的敘述是有限項. 但若已知 $P_0 f = f$ 只有常數函數, 亦即可以得到 1 是非退化則我們所須的 $A_{k,l}$.

最後我們證明 $(L) \Longrightarrow (O)$. 因爲 $(A\beta)_l = \sum_m A_{lm}\beta_m = \sum_n h_n \overline{h_{n-2l}} = \delta_{0,l}$, 所以 1 是 A 的固有值且非退化則 $\alpha = c\beta$, 對某個常數 c 亦即,

$$\int \phi(x)\phi(x-k)dx = c\delta_{0k},$$

可推得 $\sum_k |\hat{\phi}(\omega+2k\pi)|^2 = 1$, 再因爲

$$\hat{\phi}(\omega) = m(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$$

且由定義 $\hat{\phi}(0) = 1$, 再因 $m_0(0) = 1$ 及 $m_0(\pi) = 0$,

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(2k\pi) &= \hat{\phi}(22^n(2m+1)\pi) \\
&= [\prod_{j=1}^{n} m_0(2^{n+1-j}(2m+1)\pi)] m_0((2m+1)\pi)\hat{\phi}((2m+1)\pi) \\
&= m_0(\pi)\hat{\phi}((2m+1)\pi) = 0
\end{aligned}$$

可推得 $c=1$, 亦即

$$\int \phi(x)\phi(x-k) = \delta_{0k}$$

以上是這五個等價條件的證明.

3.2 循環集

上節我們對 ϕ_{0k} 是正規集的五個等價條件中, 對 (S) 的條件將作較細微的討論. 如果我們知道 $m_0(\omega)$ 在包含 0 的某一區間使得 $m_0(\omega) \neq 0$, 則有多少非退化循環集是必須檢驗使得 $|m_0(\omega)| \neq 1$, 因而推得 ϕ_{0k} 形成正規集.

很明顯的從以上推得, 若已知 $m_0(\omega) \neq 0$ 在 $\omega \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 則 (C) 推得 ϕ_{0k} 是正規集.

Cohen(1990)證明 $m_0(\omega) \neq 0$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$, 則 ϕ_{0k} 形成正規集. 這裡我們給一個新的證明.

假設 $m_0(\omega) \neq 0$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$. 而 $\{\xi_i : 1 \leq k\}$ 是任一個 τ 循環集, 若有某一個 $\xi_{i_0} \in [-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi]$, 則 $\xi_{i_0} + \pi \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$. 由 (D) 使得 $|m_0(\xi_{i_0})| \neq 1$, 因此這樣的循環集將不用檢驗了. 則考慮所有的 ξ_i 完全落在 $(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})^c$ 內, 亦即

$$\xi_i \notin [-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi] \quad \forall i,$$

則

$$\xi_{i+1} \notin [-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}], \quad \forall i,$$

因爲 i 是任意的, 故

$$\xi_i \notin [-\pi, \pi] \quad \forall i$$

這和我們假設矛盾, 即得證.

當已知 $m_0(\omega) \neq 0$ 在 $[-\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}]$, 則再加上 $m_0(\frac{2\pi}{3}) \neq 0$, 推得 $\phi_{0,k}$ 形成正規集. 這個定理不妨參考附錄 **A**.

3.3 有限的區間

本節敘述並不是所有的有限區間都只確定有限多個循環集即可. 如果區間 A 小於 $\frac{1}{7}$, 亦即 $A \subset [-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}]$, 則有無限個循環集必須檢驗.

我們先討論如何從一個長度 k 的循環集, 找到長度 $2k$ 的循環集. 然後給一個例子. 這個定理沒有說明比 $\frac{1}{7}$ 大的循環集一定檢驗有限個. 這也是未能解決的問題, 檢驗無限個和有限個的界限是那一個數呢? (以上的結果請參考附錄 B). 這裡特別謝謝系上的胡門昌教授給我們的提示及有效的方向.

第四章 小小快速轉換和新證

我們對凌波理論的探討時, 所獲得的一些零散的結果, 將記錄在本章, 例如當我們知道 $<\phi^{(r)}(x),\phi^{(s)}(x-k)>$ 對所有整數 k 的積分, 則有一個關係式

$$<\psi^{(r)}(x),\psi^{(s)}(x-k)>=2^{r+s}<\phi^{(r)}(x),\phi^{(s)}(x-2k)>-<\phi^{(r)}(x),\phi^{(s)}(x-k)>$$

使得我們可以較快算出 $<\psi^{(r)}(x),\psi^{(s)}(x-k)>$. 本章也給

$$(\int x\phi(x)dx)^2=\int x^2\phi(x)dx.$$

另一個的證明. 以上兩個式子, 可說是由富氏分析上來推得.

4.1 小小的快速轉換

當我們在第二章討論 $\int\phi^{(r)}(x)\phi^{(s)}(x-k)dx$ 的積分後, 如果要對 $\int\psi^{(r)}(x)\psi^{(s)}(x-k)dx$ 的積分時, 可以用前一個積分再加上 $\{c_k\}$ 的有限的線性組合, 即可求得 $\int\psi^{(r)}(x)\psi^{(s)}(x-k)$ 的值. 不過, 以下將有一個更快速的方法, 請參考以下的定理.

定理 4.1.1. 令 ϕ 是自格函數和 ψ 是凌波函數,

$$\int\psi^{(r)}(x)\psi^{(s)}(x-k)dx=2^{r+s}\int\phi^{(r)}(x)\phi^{(s)}(x-2k)dx-\int\phi^{(r)}(x)\phi^{(s)}(x-k)dx.$$

[證明] 從 $\psi^{(r)}$ 的富氏變換式及 Parseval 等式, 考慮

$$\begin{aligned}\int\psi^{(r)}(x)\psi^{(s)}(x-k)dx&=\int(-i\omega)^r\hat{\psi}(\omega)\overline{e^{-ik\omega}(-i\omega)^s\hat{\psi}(\omega)}d\omega\\&=\int(-1)^{r-s}(i\omega)^{r+s}|h_0(\frac{\omega}{2})|^2e^{ik\omega}|\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})|^2d\omega\\&=\int(-1)^{r-s}(i\omega)^{r+s}(1-|m_0(\frac{\omega}{2})|^2)e^{ik\omega}|\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})|^2d\omega\\&=\int(-1)^{r-s}(i\omega)^{r+s}e^{ik\omega}|\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})|^2d\omega-\int(-1)^{r-s}(i\omega)^{r+s}e^{ik\omega}|\hat{\phi}(\omega)|^2d\omega\\&=2^{r+s}\int\phi^{(r)}(x)\phi^{(s)}(x-2k)dx-\int\phi^{(r)}(x)\phi^{(s)}(x-k)dx\end{aligned}$$

即得證.

4.2 新證

這節的討論, 在 Wim Sweldens 和 Robert Piessens 的 Quadrature Formulae for the Calculation of the Wavelet Decomposition 的論文, 有詳盡地說明, 在此僅僅給一個對

$$(\int x\phi(x)dx)^2 = \int x^2\phi(x)dx.$$

的另一個證明. 而且我們也稍稍說明一點法則, 另有多點法則, 但我們不深入討論, 可參考 [16] 和 [18]

一點法則的主要想法, 如果函數 f 是足夠可微分, 且 $f^{(i)}(x)$ 是有界的對 $i \le p$, 當考慮

$$\int f(x)\phi_{jk}dx$$

的積分時, 我們使用 Taylor 公式在某一點 $\alpha \in R$,

$$f_{jk} = \int f(x)\phi_{jk}(x)dx = 2^h \int f(h(x+l))\phi(x)dx = 2^h[f(\alpha_{jl}) + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(\alpha_{jl})M_{i\alpha} + K_{jl}h^p]$$

上式 $h = 2^{-j}$, 及 $\alpha_{jl} = h(\alpha + l)$,

$$M_{p\alpha} = \int (x-\alpha)^p \phi(x)dx,$$

且

$$K_{jl} = \frac{1}{p!} \int f^{(p)}(h(\xi(x)+l))(x-\alpha)^p \phi(x)dx,$$

其中 $\xi(x)$ 在 x 和 α 之間. 我們稱 $M_{p\alpha}$ 是平移的 moments. 而且可用 $\sqrt{h}f(\alpha_{jl})$ 去逼近 f_{jk}. 在此如果我們加以選擇 α 使得 $M_{1\alpha}$ 消失, 亦及可選 $M_1 = M_{1\alpha}$. 在此我們定義, 一個積分法, 使得所有不大於 n 階的多項式都正確, 則稱此積分法是 n 階法. 所以一點法則是一階積分法.

由於 ϕ 有較好的性質使得一點法則提升至 2 階法. 而且爲了提高積分法的階數, 有所謂的 Coiflets 凌波函數, 但這邊也省略了. 接下來敘述我們的證明方法, 只要稍稍理解富氏分析和微積分即可證明, 不過有點煩瑣罷了.

我們假設 $m_1(0) = m_1'(0) = 0$. 觀察

$$\hat{\phi}^{(n)}(\omega) = \int (-ix)^n \phi(x)e^{-ix\omega}dx. \tag{4.2.1}$$

由 (1.4.4),

$$2\hat{\phi}'(\omega) = m_0'(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) + m_0(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}'(\frac{\omega}{2}).$$

因此 $\hat{\phi}'(0) = m_0'(0)$. 和

$$4\hat{\phi}''(\omega) = m_0''(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) + 2m_0'(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}'(\frac{\omega}{2}) + m_0(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}''(\frac{\omega}{2}). \tag{4.2.2}$$

因此 $\hat{\phi}''(0) = \frac{1}{3}m_0''(0) + \frac{2}{3}m_0'(0)\hat{\phi}'(0)$. 從 (1.4.2) 的一次微分我們知

$$m_0'(\omega)\overline{m_0(\omega)} + m_0(\omega)\overline{m_0'(\omega)} + m_1'(\omega)\overline{m_1(\omega)} + m_1(\omega)\overline{m_1'(\omega)} = 0,$$

則 $m_0'(0) = -\overline{m_0'(0)}$. 再從 (1.4.2) 的二次微分可得

$$m_0''(\omega)\overline{m_0(\omega)} + 2m_0'(\omega)\overline{m_0'(\omega)} + m_0(\omega)\overline{m_0''(\omega)} + m_1''(\omega)\overline{m_1(\omega)} + 2m_1'(\omega)\overline{m_1'(\omega)} + m_1(\omega)\overline{m_1''(\omega)} = 0.$$

則 $m_0''(0) + \overline{m_0''(0)} = -2|m_0'(0)|^2$. 從 $m_0(\omega)$ 定義, 我們觀察出 $m_0''(0) = \overline{m_0''(0)}$. 因此推得 $m_0''(0) = -|m_0'(0)|^2$. 再利用 (4.2.2) 可得

$$\hat{\phi}''(0) = -\frac{1}{3}|m_0'(0)|^2 - \frac{2}{3}\overline{m_0'(0)}\hat{\phi}'(0) = -|m_0'(0)|^2.$$

我們敘述定理如下 :

假設 $m_0(\omega)$ 是自格函數 $\phi(x)$ 的特徵函數, 且 $|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega+\pi)|^2 = 1$ 和 $m_0^{(k)}(\pi) = 0$ 當 $k = 0, 1$ 時, 則可推得

$$(\int x\phi(x)dx)^2 = \int x^2\phi(x)dx.$$

Appendix A : About the cycles

DEFINITION 1. *Let $[\xi]$ be an equivalence class of real numbers in $[-\pi, \pi) \pmod{2\pi}$ and i be the equivalence class of integers in $\{0, 1, \ldots, k-1\} \pmod{k}$. The set $\boldsymbol{\xi} = \{[\xi_i] : 0 \le i \le k-1\}$ is a τ-cycle of length k if it satisfies the following conditions:*

(1) $[\xi_{i+1}] = [2\xi_i]$;

(2) $[2^k \xi_i] = [\xi_i]$;

(3) $[\xi_i] \neq [\xi_j]$ *for any* $i \neq j$.

PROPOSITION 1. *Suppose $([\xi_0], [\xi_1], \ldots, [\xi_{k-1}])$ is a τ-cycle of length k. Then*

$$\xi_i = \frac{2z_i}{2^k - 1}\pi$$

for some $z_i \in \mathbb{Z}$.

Proof. By definition, $[2^k \xi_i] = [\xi_i]$ for all i. Thus $2^k \xi_i = \xi_i + 2z_i\pi$ for some $z_i \in \mathbb{Z}$ and the result follows. □

PROPOSITION 2. *Let*

$$\xi = \frac{2z}{2^k - 1}\pi \neq 0, \quad z \in \mathbb{Z},$$

where k is the smallest integer such that ξ has the above form. Then $([\xi], [2\xi], \ldots, [2^{k-1}\xi])$ is a τ-cycle of length k.

Proof. We check for the three conditions in cycles. Condition (1) is easily satisfied. For condition (2), it suffices to check for $[2^k \xi] = [\xi]$. Indeed,

$$2^k \xi = 2^k \left(\frac{2z}{2^k - 1}\pi \right) = \frac{2z}{2^k - 1}\pi + 2z\pi = \xi + 2z\pi.$$

Now suppose $[2^i \xi] = [2^j \xi]$. Then $(2^i - 2^j)\xi = 2z_0\pi$ for some $z_0 \in \mathbb{Z}$. That is,

$$z_0 = \frac{2^i - 2^j}{2^k - 1} z.$$

Assume that $0 \le j < i \le k-1$, we see that 2^j is a factor of z_0. Thus

$$\xi = \frac{2 \cdot 2^{-j} z_0}{2^{i-j} - 1} \pi.$$

It contradicts to the assumption of k. Hence $i = j$. □

THEOREM 3. *Let* $([\xi_0], [\xi_1], \ldots, [\xi_{k-1}])$ *be a* τ*-cycle of length* ≥ 3. *Then there exists some* $[\xi_i] \in [-\pi, -\frac{4}{5}\pi] \cup [\frac{4}{5}\pi, \pi]$.

Proof. Let $([\xi_0], [\xi_1], \ldots, [\xi_{k-1}])$ be a τ-cycle of length k, where $k \ge 3$. Suppose that, for all i,

$$[\xi_i] \not\in [-\pi, -\frac{4}{5}\pi] \cup [\frac{4}{5}\pi, \pi]. \tag{1}$$

Then

$$[\xi_{i+1}] \not\in [\frac{-2}{5}\pi, \frac{2}{5}\pi]. \tag{2}$$

Note that can also be written as

$$[\xi_i] \not\in [-\frac{6}{5}\pi, -\frac{4}{5}\pi] \cup [\frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi] \pmod{2\pi},$$

therefore

$$[\xi_{i-1}] \not\in [-\frac{3}{5}\pi, -\frac{2}{5}\pi] \cup [\frac{2}{5}\pi, \frac{3}{5}\pi]. \tag{3}$$

By and , and since i is arbitrary, we have

$$[\xi_i] \not\in [-\pi, -\frac{4}{5}\pi] \cup [-\frac{3}{5}\pi, \frac{3}{5}\pi] \cup [\frac{4}{5}\pi, \pi], \quad \forall i. \tag{4}$$

Now the cycle only appears on the intervals $(-\frac{4}{5}\pi, -\frac{3}{5}\pi)$ or $(\frac{3}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi)$; that is,

$$[\xi_{i+1}] \in (-\frac{4}{5}\pi, -\frac{2}{5}\pi) \cup (\frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi).$$

But, by ,

$$[\xi_{i+1}] \not\in [-\frac{3}{5}\pi, -\frac{2}{5}\pi] \cup [\frac{2}{5}\pi, \frac{3}{5}\pi].$$

Go back to $[\xi_i]$, we conclude that the cycle can only appear on the intervals

$$(-\frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\frac{4}{5})\pi\ ,-\frac{3}{5}\pi) \quad \text{or} \quad (\frac{3}{5}\pi,\ \frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\frac{4}{5})\pi). \tag{5}$$

In other words

$$[\xi_i]\ \notin [-\frac{4}{5}\pi,\ -\frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\frac{4}{5})\pi] \cup [\frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\frac{4}{5})\pi,\ \frac{4}{5}\pi], \quad \forall i. \tag{6}$$

Then again, by , we have

$$[\xi_{i+1}] \in (-\frac{4}{5}\pi, -\frac{3}{5}\pi) \cup (\frac{3}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi).$$

But, by and going back to $[\xi_i]$, actually the cycle can only appear in

$$(-\frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\frac{4}{5})\pi,\ -\frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}))\pi) \quad \text{or} \quad (\frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}))\pi,\ \frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\frac{4}{5})\pi),$$

which also implies that

$$\begin{array}{l} [\xi_i] \notin [\frac{3}{5}\pi,\ \frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}))\pi] \cup [\frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\frac{4}{5})\pi,\ \frac{4}{5}\pi] \quad \text{or} \\ [\xi_i] \notin [-\frac{4}{5}\pi,\ -\frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\frac{4}{5})\pi] \cup [-\frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}))\pi,\ -\frac{3}{5}\pi] \end{array} \quad \forall i.$$

Continue with the above process we have the following result:

$$\begin{array}{l} [\xi_i]\ \notin \bigcup_n \{[\frac{3}{5}\pi, a_n\pi] \cup [b_n\pi, \frac{4}{5}\pi]\} \\ [\xi_i]\ \notin \bigcup_n \{[-\frac{4}{5}\pi, -b_n\pi] \cup [-a_n\pi, -\frac{3}{5}\pi]\} \end{array} \quad \forall i.$$

Here

$$a_0 = \frac{3}{5}, \quad b_0 = \frac{4}{5}, \quad \text{and} \quad b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \quad a_n = \frac{a_{n-1}+b_n}{2}.$$

We then solve the linear equation

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

A can be decomposed into BDB^{-1} with

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We get

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1/4)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Hence we have $\lim a_n = \lim b_n = \frac{2}{3}$. That means $[\xi_i] \in \{[\frac{-2}{3}\pi], [\frac{2}{3}\pi]\}$. But it is a τ-cycle of length 2, contradicts to the assumption. □

With a similar patching and cutting argument on the intervals, one can show the following fact:

(7) If $L(\xi)$ has no zeros in $[-3/17\pi, 3/17\pi]$, and if $L(\frac{\pi}{3}) \neq 0$, $L(\frac{\pi}{5}) \neq 0$, then the Cohen's condition is satisfied.

Appendix B: The lower bound of shrinking intervals

We start with two more simple facts about the τ-cycles. Then we present an algorithm for building a τ-cycle of length $2k$ from a τ-cycle of length k.

LEMMA 1. *Let* $([\xi_0], [\xi_1], \ldots, [\xi_{k-1}])$ *be a* τ*-cycle of length* k*. Then*

$$[\xi_i] = [\frac{\xi_{i+1}}{2} - \pi] \quad or \quad [\xi_i] = [\frac{\xi_{i+1}}{2}]$$

Proof. Since

$$[2(\frac{\xi_{i+1}}{2} - \pi)] = [\xi_{i+1} - 2\pi] = [\xi_{i+1}] = [2\xi_i],$$

so

$$2(\xi_i - \frac{\xi_{i+1}}{2} + \pi) = 2z\pi.$$

Hence $[\xi_i] = [\frac{\xi_{i+1}}{2} - \pi]$ if z is even; otherwise $[\xi_i] = [\frac{\xi_{i+1}}{2}]$. □

LEMMA 2. *Let* $([\xi_0], [\xi_1], \ldots, [\xi_{k-1}])$ *be a* τ*-cycle of length* k*, then* $([-\xi_0], [-\xi_1], \ldots, [-\xi_{k-1}])$ *is also a* τ*-cycle of length* k*.*

THEOREM 1. *Let* $([\xi_0], [\xi_1], \ldots, [\xi_{k-1}])$ *be a* τ*-cycle of length* k *and* $2\gamma = \min\{|[\xi_i]| : 0 \leq i \leq k-1\}$*. Without loss of generality, let* $[\xi_0] = -2\gamma = \frac{2z_0}{2^k-1}\pi$*. Then*

$$\{[2^i(\xi_{k-1} + \beta)] : 0 \leq i \leq 2k-1\} \tag{1}$$

is a τ*-cycle of length* $2k$*, where* $\beta = \frac{2\gamma}{2^k+1}$*.*

Proof. In order to prove that is a τ-cycle of length $2k$, it suffices to show that

$$[2^m\xi_{k-1} + 2^m\beta] \neq [2^n\xi_{k-1} + 2^n\beta] \quad \forall\ 0 \leq m \neq n \leq k-1, \tag{2}$$

and

$$[2^k\xi_{k-1} + 2^k\beta] = [-(\xi_{k-1} + \beta)]. \tag{3}$$

To prove , suppose $[2^m\xi_{k-1} + 2^m\beta] = [2^n\xi_{k-1} + 2^n\beta]$ for some integers $m \neq n \in [0, k-1]$. It can be reduced to

$$[2^l\xi_{k-1} + 2^l\beta] = [\xi_{k-1} + \beta] \quad \Longrightarrow \quad (2^l - 1)\xi_{k-1} + (2^l - 1)\beta = 2z\pi,$$

for some integer z. Consider

$$\begin{aligned}(2^l - 1) \cdot (\frac{2z_{k-1}}{2^k - 1}\pi + \frac{2z_0}{(2^k+1)(2^k-1)}\pi) &= \frac{2^l - 1}{2^k - 1} \cdot \frac{2^k(2^k+1)z_0 + 2z_0}{2^k + 1}\pi \\ &= \frac{2z_0(2^l - 1)}{2^k - 1} \cdot \frac{2^{k-1}(2^k+1) + 1}{2^k + 1}\pi.\end{aligned} \tag{4}$$

Recall that $z_j = 2^j z_0$. Since $\gcd(2^k + 1, 2^{k-1}(2^k + 1) + 1) = 1$ for any $k > 0$, $(2^l - 1) \mid (2^k - 1)$, and $|2z_0| < 2^k + 1$, so the rational part of is not an integer. The contradiction implies .

Next we prove . Since $[\xi_0]$ is the absolute minimum, by and , we have $[\xi_{k-1}] = [\frac{\xi_0}{2} - \pi] = [\pi - \gamma]$ or $[-\pi + \gamma]$. For our choice of $[\xi_0]$, $[\xi_{k-1}]$ should be positive. So we take $[\xi_{k-1}] = [\pi - \gamma]$. Then

$$\begin{aligned}[2^k\xi_{k-1} + 2^k\beta] &= [\pi - \gamma + \frac{2^k \cdot 2\gamma}{2^k + 1}] \\ &= [\pi - \gamma + 2\gamma - \frac{2\gamma}{2^k + 1}] \\ &= [\pi + \gamma - \frac{2\gamma}{2^k + 1}] \\ &= [-\pi + \gamma - \frac{2\gamma}{2^k + 1}] \\ &= [-(\xi_{k-1} + \beta)].\end{aligned}$$

Therefore forms a τ-cycle of length $2k$. □

With an analogous argument, we can generalize the above theorem.

COROLLARY. *Let* $([\xi_0], [\xi_1], \ldots, [\xi_{k-1}])$ *be a* τ*-cycle of length* k, $2\gamma = \min\{|[\xi_i]| : 0 \leq i \leq k-1\}$, *and take* $[\xi_0] = -2\gamma$. *Then*

$$\{[2^i(\xi_{k-1} + \beta)] : 0 \leq i \leq 2mk - 1\}$$

is a τ*-cycle of length* $2mk$, *where* $\beta = \frac{2\gamma}{2^{mk}+1}$ *and* m *is a positive integer.*

We now apply the techniques to a particular case. Let

$$[\xi_0] = 2\gamma = \frac{2}{7}\pi \quad \text{and} \quad [\beta] = \frac{2\gamma}{2^{3m} + 1}.$$

That is,

$$\boldsymbol{\xi} = ([\xi_0], [\xi_1], [\xi_2]) = ([\frac{2}{7}\pi], [\frac{4}{7}\pi], [-\frac{6}{7}\pi])$$

is a τ-cycle of length 3.

Consider

$$\boldsymbol{\xi}_m := \{[2^i(\xi_1 + \beta)] : 0 \leq i \leq 6m - 1\}.$$

One can compute that $[2^{3m}(\xi_1 + \beta)] = [-\xi_2 - \beta]$ and $\boldsymbol{\xi}_m$ is a τ-cycle of length $6m$, for any $m > 0$. The absolute values of the elements in $\boldsymbol{\xi}_m$ are

$$|[\xi_0 + 2^{3i+2}\beta]|, \quad |[\xi_1 + 2^{3i}\beta]|, \quad |[\xi_2 + 2^{3i+1}\beta]|, \qquad \text{for } 0 \leq i \leq m-1;$$

$$|[-\xi_0 - 2^{3i+1}\beta]|, \quad |[-\xi_1 - 2^{3i+2}\beta]|, \quad |[-\xi_2 - 2^{3i}\beta]|, \qquad \text{for } 0 \leq i \leq m-1.$$

We conclude that, for each $\boldsymbol{\xi}_m$, all elements are in the interval $(-\frac{6}{7}\pi, \frac{6}{7}\pi)$. After a shift of π, they do not fall in $[-\frac{1}{7}\pi, \frac{1}{7}\pi]$.

Modify the Corollary a little bit and apply to this particular $\boldsymbol{\xi}$, we can get a sequence of τ-cycles $\boldsymbol{\xi}_m$ of length $6m$, for any $m > 0$. We can show that, for each $\boldsymbol{\xi}_m$, all elements are in the interval $(-\frac{6}{7}\pi, \frac{6}{7}\pi)$. After a shift of π, they do not fall in $[-\frac{1}{7}\pi, \frac{1}{7}\pi]$.

Since the statement is valid for all positive integers m. We have the following conclusion.

> If it is only known that $L(\xi) \neq 0$ for $\xi \in [-\alpha\pi, \alpha\pi]$,
>
> where $\alpha \leq \frac{1}{7}$. Then there are infinitely many points to
>
> avoid from a failure of the Cohen's cycle condition.

REFERENCES

1 G. Beylkin, R. Coifman and V. Rokhlin, Wavelets in numerical analysis, in *Wavelets and their applications,* Jones and Barlett Publishers, Boston, 1992.

2 G. Beylkin R. Coifman and V. Rokhlin, Fast wavelet transforms and numerical algorithms, *Comm. Pure Appl. Math.,* 44: 141–183 (1991)

3 C.-K. Chui, *An Introduction to Wavelets,* Academic Press, 1992.

4 A. Cohen, Ondelettes, analyses multirésolutions et filtres miroir en quadrature, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non linéaire,* 7: 439–459 (1990)

5 A. Cohen, Ondelettes, analyses multirésolutions et traitement numérique du signal, Ph. D. Thesis, Université Paris, Dauphine, 1990.

6 I. Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.,* 41: 909–996 (1988)

7 I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets,* SIAM, Philadelphia, 1992.

8 K. Gröchenig, Orthogonality criteria for compactly supported scaling functions, *Appl. Comput. Harmonic Anal.,* 1: 242–245 (1994)

9 B. Jawerth and W. Sweldens, An overview of wavelet based multiresolution analysis, *Math. Rev.* to appear.

10 W. Lawton, Necessary and sufficient conditions for constructing orthonormal wavelet bases, *J. Math. Phys.,* 32: 57–61 (1991)

11 S. Mallat, Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process,* 37: 2091–2110 (1989)

12 S. Mallat, A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation, *IEEE Trans. on Patt. Anal. Mach. Intell.,* 11: 674–693 (1989)

13 S. Mallat, Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$, *Trans. Amer. Math.*

Soc., 315: 69–87 (1989)

14 W.-C. Shann and C.-C. Yen, Quadratures involving polynomials and Daubechies' wavelets, Technical Report 9301, Department of Mathematics, National Central University, 1993.

15 W.-C. Shann and J. Zheng, About wavelets on the interval, The proceedings of the international math. conference 1994, to appear.

16 M.-T. Shu, Numerical quadratures rules for wavelets, Master Dissertation, Department of Mathematics, National Central University, 1995.

17 G. Strang, Wavelets and dilation equations: A brief introduction, *SIAM Review,* 31: 614–627 (1989)

18 W. Sweldens and R. Piessens, Quadrature formulae for the calculation of the wavelet decomposition, *SIAM J. Numer. Anal.* to appear.

19 J. Xu and W.-C. Shann, Galerkin-wavelets methods for two-point boundary value problems, *Numer. Math.,* 63: 123–144 (1992)