

國立中央大學

數學研究所
碩士論文

九十四學年度高一學生三角函數
之學習狀況研究

研究生：黃鈺芸

指導教授：單維彰博士

中華民國九十六年五月



國立中央大學圖書館 碩博士論文電子檔授權書

(95年7月最新修正版)

本授權書所授權之論文全文電子檔(不包含紙本、詳備註1說明)，為本人於國立中央大學，撰寫之碩/博士學位論文。(以下請擇一勾選)

- ()同意 (立即開放)
()同意 (一年後開放)，原因是： _____
()同意 (二年後開放)，原因是： _____
()不同意，原因是： _____

以非專屬、無償授權國立中央大學圖書館與國家圖書館，基於推動「資源共享、互惠合作」之理念，於回饋社會與學術研究之目的，得不限地域、時間與次數，以紙本、微縮、光碟及其它各種方法將上列論文收錄、重製、公開陳列、與發行，或再授權他人以各種方法重製與利用，並得將數位化之上列論文與論文電子檔以上載網路方式，提供讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印。

研究生簽名： 黃銀芬 學號： 942201020

論文名稱： 九十四學年度高一學生三角函數之學習狀況研究

指導教授姓名： 單維彰

系所： 數學研究 所 博士班 碩士班

日期：民國 96 年 5 月 22 日

備註：

1. 本授權書之授權範圍僅限電子檔，紙本論文部分依著作權法第 15 條第 3 款之規定，採推定原則即預設同意圖書館得公開上架閱覽，如您有申請專利或投稿等考量，不同意紙本上架陳列，須另行加填聲明書，詳細說明與紙本聲明書請至 <http://thesis.lib.ncu.edu.tw/paper.htm> 查閱下載。
2. 本授權書請填寫並親筆簽名後，裝訂於各紙本論文封面後之次頁（全文電子檔內之授權書簽名，可用電腦打字代替）。
3. 請加印一份單張之授權書，填寫並親筆簽名後，於辦理離校時交圖書館（以統一代轉寄給國家圖書館）。
4. 讀者基於個人非營利性質之線上檢索、閱覽、下載或列印上列論文，應依著作權法相關規定辦理。

國立中央大學碩士班研究生

論文指導教授推薦書

數學 學系/研究所 黃鈺芸 研究生

所提之論文

九十四學年度高一學生三角函數之學習狀況

研究 係由本人指導撰述，同意提付審查。

指導教授 吳唯刻 (簽章)

96 年 4 月 23 日

國立中央大學碩士班研究生
論文口試委員審定書

數學 學系/研究所 黃鈺芸 研究生所提之論文
九十四學年度高一學生三角函數之學習狀況研究
經本委員會審議，認定符合碩士資格標準。

學位考試委員會召集人

張 民 杰

委

員

袁 媛
單 維 彭
張 民 杰

中華民國 96 年 5 月 22 日

論文摘要

本論文研究目的在於：針對三角函數之研究課題，了解九年一貫實施前後學生的差異性，以及在高中所必須要修讀的三角函數內容，希望透過此研究，可以作為九年一貫暫行綱要實施之後的成效探討，並對九十八學年度高中課程綱要修訂有所助益。

本文研究對象為九十四學年度北台灣的高一學生二十個班級共 829 人、20 位高中教師、164 位大學教授的問卷，以及微積分、統計與線性代數三個領域五冊大學用書。依據資料的蒐集分析，歸納出九年一貫實施後的錯誤類型、高中教師的教學心得、大學教授的意見，以及根據大學用書歸納出高中需修讀的三角函數課題。

研究結果建議：(1) 拉長三角函數的授課時數 (2) 將三角函數拆成兩部分 (3) 延後教授複數的極式 (4) 杜絕過於複雜或技巧性的題目。期盼本研究對我國未來三角函數之數學課程以及數學綱要的修訂提供有益的參考。

關鍵字

九年一貫、三角函數、錯誤類型。

Abstract

This is a thesis which mainly focuses on: (A) The distinction between those students who received “The General guidelines of Grade 1-9 Curriculum of Elementary & Junior High School Education” and those who did not on the difficulty in studying Trigonometric function they’ve faced in senior high schools; (B) The specific range of Trigonometric function which students should be required to study in senior high schools. Truly hope that this thesis will be some of the assistance to the development of future mathematics education in 2009 in Taiwan.

The targets of this research are senior high school students, in northern Taiwan, 829 students in total from different 20 classes, and 20 senior high school teachers, plus 164 university professors. Also, 5 academic books from three different fields are recruited in for the research, which are Calculus, Mathematical Statistics, and Elementary Linear Algebra. According to data analysis, the author pointed out that: (1) Students have much more difficulty in correctly answering some specific questions after receiving the General Guidelines of Grade 1-9 Curriculum of Elementary and Junior High School Education; (2) Teaching experience & thought from senior high school teachers; (3) Professors’ opinions; (4) The appropriate range of Trigonometric function for senior high school students to study for further education in universities or colleges.

The results of the research suggest that (1) Extended & longer teaching hours for Trigonometric function; (2) Dividing Trigonometric function into two parts for students to learn in separate semesters; (3) Avoid teaching the Polar Form of a Complex Number in the first year of senior high schools; (4) Avoid teaching certain questions that are too difficult. It is our hope that these conclusions and suggestions can make beneficial contributions to the future mathematics education in senior high school in Taiwan.

Keywords: the General Guidelines of Grade 1-9 Curriculum of Elementary and Junior High School Education, Trigonometric function, specific questions.

致謝

研究所的日子，讓我體驗了人生中的多種變化，短短的兩年，心境卻有截然不同的變化。

首先，謝謝我的指導教授 單維彰老師，謝謝您給我的指導，也讓我對數學教育的看法更為成熟，也謝謝袁媛老師以及張民杰老師，細心研讀我的論文，並給予我相當多寶貴的意見，並給予肯定，讓我的論文架構更趨於完整。也要感謝系上的老師，在研究所的日子中給予我的教導。

再來，謝謝我的學長姐，在我進入研究所時，給予我相當多的鼓勵與協助；謝謝一直陪伴著我的豬爺，研究所的路上因為有你，讓我有面對挫折的動力；謝謝一直陪伴著我的大學同學，擁有你們真的是我最大的福氣；以及感謝所有在我需要協助時幫助我的人，因為有你們，讓我的研究生活可以順利的完成。

最後，謝謝我的家人，不論何時，您們給我的鼓勵總讓我可以打起精神，謝謝您們給我的愛；也要謝謝我家的狗狗，每次總可以帶給我眾多的溫暖，讓我感覺你們總在我背後支持著我。

謝謝所有幫助過我的人，因為有你們，讓我充滿勇氣去面對所有的挑戰。並將此論文獻給爸爸。

爸爸，我碩士畢業了喔！

黃鈺芸 謹誌於 中央
中華民國九十六年六月

目錄

論文摘要	I
Abstract	II
致謝	III
目錄	IV
圖目	VII
表目	VIII
第 1 章 緒論	1
1.1 研究動機	1
1.2 研究背景	2
1.3 研究目的與待答問題	4
1.4 名詞釋義	5
1.5 研究限制與範圍	5
第 2 章 文獻探討	7
2.1 三角函數之教學目標	7
2.2 三角函數相關研究	11
2.2.1 三角函數課程之發展	12
2.2.2 三角函數相關論文	13
2.2.3 三角函數錯誤類型之研究	18
第 3 章 研究方法與實施步驟	27
3.1 研究設計理念	27
3.2 研究對象	27
3.3 研究方法與工具	30
3.3.1 調查研究法	30
3.3.2 研究工具	35

3.4 實施步驟	37
3.5 資料處理與統計.....	42
第4章 研究結果分析	46
4.1 前、後測試題結果之分析.....	47
4.1.1 後測的錯誤類型-全體	47
4.1.2 後測的錯誤類型-各校	54
4.1.3 後測的錯誤類型-高、低分組	68
4.1.4 高、低分組的學習成效	74
4.2 各校段考試題結果之分析.....	82
4.2.1 後測試卷的信度.....	83
4.2.2 各校段考之錯誤題型.....	84
4.3 其他問卷之結果分析.....	94
4.3.1 高中教師訪談稿.....	94
4.3.2 大學教授問卷.....	95
4.3.3 大學用書分析.....	98
第5章 結論與建議.....	104
5.1 結論	104
5.2 在數學授課時數與課程上的建議	108
參考書目.....	110
附錄	
附錄一 三角函數學習現況調查研究試卷（前測）.....	114
附錄二 三角函數學習現況調查研究試卷（後測）.....	116
附錄三 「九年一貫實施後學生進入高中學習三角函數現況之教師意見訪談大綱」	118

附錄四 「大學生在各科系學習或各領域所需三角函數相關知識的多寡」	119
附錄五 各校期中考、期末考試卷與高中教師訪談逐字稿.....	120
附錄六 錯誤類型之研究整理	121

圖目

圖 4-1-1 高、低分組後測答對題數折線圖-全體	75
圖 4-1-2 高、低分組後測答對題數折線圖-大直	76
圖 4-1-3 高、低分組後測答對題數折線圖-成功	77
圖 4-1-4 高、低分組後測答對題數折線圖-萬芳	77
圖 4-1-5 高、低分組後測答對題數折線圖-徐匯	78
圖 4-1-6 高、低分組後測答對題數折線圖-六和	78
圖 4-1-7 高、低分組後測答對題數折線圖-香山	79
圖 4-1-8 Normal 分佈雙側試驗的拒絕域	82

表目

表 2-2-1 國中三角函數課程之演變	12
表 2-2-2 三角函數的錯誤類型	15
表 2-2-3 國內三角函數相關文獻	19
表 2-2-4 三角函數錯誤類型統整	25
表 3-2-1 各校人數統計表	29
表 3-4-1 時間流程表	39
表 3-5-1 各校人數與有效之前、後測試卷數	42
表 3-5-2 各校段考、期末考有效試卷數	43
表 3-5-3 各系教授問卷回收數	44
表 3-5-4 三角函數檢核表	45
表 4-1-1 後測答對率-全體	47
表 4-1-2 錯誤類型-全體	53
表 4-1-3 各校人數與後測之有效試卷數	54
表 4-1-4 後測答對率-大直高中	54
表 4-1-5 錯誤題型-大直高中	56
表 4-1-6 後測答對率-成功高中	56
表 4-1-7 錯誤題型-成功高中	57
表 4-1-8 後測答對率-萬芳高中	58
表 4-1-9 錯誤題型-萬芳高中	59
表 4-1-10 後測答對率-徐匯高中	59
表 4-1-11 錯誤題型-徐匯高中	61
表 4-1-12 後測答對率-六和高中	61
表 4-1-13 錯誤題型-六和高中	63
表 4-1-14 後測答對率-香山高中	63

表 4-1-15 錯誤題型-香山高中	65
表 4-1-16 錯誤類型-綜合討論	65
表 4-1-17 前測之答對題數人數表	68
表 4-1-18 後測答對率-高分組	69
表 4-1-19 錯誤題型-高分組	71
表 4-1-20 後測答對率-低分組	71
表 4-1-21 錯誤題型-低分組	72
表 4-1-22 錯誤類型-高、低分組綜合比較	73
表 4-1-23 後測答對題數-高分組	75
表 4-1-24 後測答對題數-低分組	75
表 4-1-25 高、低分組-各校人數表	76
表 4-1-26 前測高、低分組與後測高、低分組之矩陣表	80
表 4-2-1 刪題後信度	83
表 4-2-2 餘弦定理答對率	86
表 4-2-3 三角函數的疊合之答對率	89
表 4-2-4 複數的極式之答對率	93
表 4-3-1 大學教授問卷統計表	95
表 5-1-1 與以往文獻錯誤類型之比較	105

第1章 緒論

本章節將對本研究之研究動機、研究背景、研究目的與待答問題、名詞釋義及研究範圍與限制作一通盤描述，共分爲五小節。

1.1 研究動機

我國在近三十年來的課程變動中，國小數學課程發展共歷經四次的修訂，分別是民國 64 年公布、67 學年度實施的國小數學課程標準，民國 82 年公布、85 學年度實施的國小數學新課程，民國 87 年公布、90 學年度實施的九年一貫數學課程暫行綱要及民國 92 年公布、94 學年度正式實施的九年一貫數學課程綱要。國中數學課程的發展也歷經民國 74 年、83 年、87 年的九年一貫數學課程暫行綱要及民國 92 年公布、94 學年度正式施行的九年一貫數學課程綱要之四次修訂。高中數學課程則歷經民國 73 年、84 年及 94 年修訂且於 95 八月實施的高中數學課程暫行綱要，以及未來即將要實施取代九五暫綱的「九八課綱」，目前剛公佈了「九八課綱」的總綱（普通高級中學課程綱要資訊網，2007）。

九年一貫的施行是教育史上的一大推動，係以「課程綱要」代替「課程標準」，強調的是讓學生有帶著走的能力而不再是背不動的書包和繁重的知識教材。在國中小學之課程理念方面希望可以以生活爲中心，配合學生身心能力發展歷程，更強調希望學生可以擁有「了解自我與發展潛能」、「欣賞、表現與創新」、「生涯規劃與終身學習」、「表達、溝通與分享」、「尊重、關懷與團隊合作」、「文化學習與國際了解」、「規劃、組織與實踐」、「運用科技和資訊」、「主動探索與研究」、「獨立思考與解決問題」這十大能力。

而九十四學年度的高一學生即是九年一貫課程施行以來的第一屆高中一年級學生，在面臨了教材的更新、教學模式的改變以及課程綱要的頒佈下，我們希望可以了解這一屆學生的學習狀況與學習效果。綜觀高中數學裡，三角函數普遍被視爲高一學生學習數學的夢魘，新的觀念建立、短時間的加深加廣、眾多公式的推導與應用，在在帶給學生莫大的壓力，所以選定三角函數爲課題，想要透過

三角函數了解九年一貫下的學生是否和以往的學生學習狀況有所差異？經過國中課程的薰陶是否有助於在數學方面的思考？本研究擬以學生的錯誤類型、學習狀況對九年一貫的學生做更進一步的探討與評析，期盼本文可以在「九八課綱」中對於課程的編排、綱要的修訂、十二年國教的推行計畫以及教師在教學上提供有用之參考。

1.2 研究背景

本研究選定三角函數為課題的理由有以下兩項：

1. 三角函數的概念中，涵蓋數與量、代數、幾何三大主題能力指標

民國 83 年課程綱要將「三角函數」列為國中選修教材，但是因為國中學力基本測驗不將選修內容納入命題中，所以在國中課程中大都以較少的篇幅、時數來介紹三角函數，這也間接的影響到高中學習此單元的基礎。而在九年一貫數學領域正式綱要公布後，三角函數的內容已從國中教科書中刪除。然而在此項的措施下唯恐造成國中與高中教科書內容上的落差，在《九年一貫數學學習領域九十四學年度銜接高中課程教材》中，把「平面幾何的基本性質」與「三角函數的基本概念」列入十大銜接教材（國立中正大學數學系，2005）。

在小學至國中教科書中三角函數相關課題的鋪陳範圍非常廣泛，包括三角形的認識、角的定義、三角形的面積、平面坐標、圓周率、比與比值、相似三角形性質與畢氏定理，以及高一上學期介紹函數的概念。因此，可以看出三角函數的先備知識橫跨十個年級的學習。而這十個年級的概念更是涵蓋了九年一貫中的四大主題—數與量、代數、幾何、統計與機率中的數與量、代數和幾何。三角函數的課題涉及數與量領域中整數、分數與小數的大量計算，代數領域中未知數、直角坐標系、二元一次方程式等與幾何領域中各種形體的角度、面積與三角形的各種性質等能力，並架構於函數概念之上。

楊淑芬(1993)指出三角函數學具有千百年歷史而且在實際生活上有極廣泛的應用(引自陳忠雄,2003)。

因此,本研究欲以此主題分析九年一貫的第一屆高中學生學習現況與錯誤類型。

2. 三角函數佔高中課程內容極大的篇幅

依據教育部指導,中正大學執行之九年一貫數學學習領域九十四學年度銜接高中課程教材中,主題包括「乘法公式與多項式」、「因式分解」、「平方根與立方根」、「一元二次方程式」、「線型函數與二次函數」、「不等式」、「數列與級數」與附錄中的「集合的概念」、「平面幾何的基本性質」與「三角函數的基本概念」等十個單元。其中以長達六頁的篇幅來介紹三角函數的源起、三角函數的定義以及角邊性質等,而且在高中的課程中,唯有三角函數橫跨兩個章節,分別是高一下第二章的「三角函數基本概念」與第三章的「三角函數的性質與運用」,在教科書中以如此大的篇幅希望可以傳授給學生相關的知識,甚至將三角函數列入十大銜接課程中,三角函數的重要性可見一斑。

另外瀏覽了中正大學執行之「九年一貫數學學習領域九十四學年度銜接高中課程教材」,與「九年一貫數學學習領域九十五暨九十六學年度銜接高中課程教材」這兩份教材中,可以發現雖其目錄在課程編排上稍有變化,但是卻都將「三角函數的基本概念」明列其中。在引出三角函數之前,也都有13頁的「平面幾何基本性質」作為對幾何的導引,在「平面幾何基本性質」中也明白指出在高一課程中並未有幾何的章節,但是因為在某些三角函數的推導過程中,涉及幾何知識,所以在銜接課程中以一個章節共13頁的份量介紹平面幾何的基本性質。另外「三角函數的基本概念」在兩份教材中的份量,九十四學年度以6頁的篇幅作為介紹(全文127頁),而在九十五暨九十六學年度中,以18頁的篇幅作為介紹(全文189頁),九十五暨九十六學年度介紹三角函數的篇幅是九十四學年度的三倍,以「三角函數的基本概念」與全文的百分比作為比較,九十四學年度「三

角函數的基本概念」約佔全文的 5%，但在九十五暨九十六學年度中，「三角函數的基本概念」約佔全文的 10%。以這樣的數據可以大膽的推測，在經歷九十四學年度課程之後，銜接教材的製作計畫相關人員有鑑於高一學生對三角函數相關知識的薄弱，所以在九十五暨九十六學年度中，特別增加了近三倍的相關知識，以期讓之後的高一學生對三角函數有更多的認識，可見三角函數的相關課題是相當受到重視的。

1.3 研究目的與待答問題

本研究的主要目的在於：

1. 瞭解九十四學年度入學的高一學生，學習三角函數內容上的錯誤類型。
2. 以九十四學年度入學的高一學生，和以往文獻上的錯誤類型作一比較。
3. 瞭解學習時間與錯誤類型的關係。
4. 瞭解學習時間與學習成效的關係。
5. 為銜接大學課程，希望了解高中所必須修讀的三角函數相關內容。

希望透過此研究，可作為「九八課綱」在課程綱要上編排的參考，也希望可以做為教師施行教學、補救教學與未來研究等之參考資料。

根據研究目的，本研究針對三角函數的課題提出以下五個具體問題：

1. 九十四學年度入學高一學生在三角函數上的錯誤類型有哪些？
2. 將錯誤類型與文獻作比較，看看近年來高一學生在三角函數上的錯誤類型是否有所差異？
3. 提早接觸三角函數者與跟著學校進度學習三角函數者，在學期末對於三角函數的錯誤類型是否會相同？
4. 提早接觸三角函數者在學期末的評量結果是否會比較好？
5. 普查五本大學用書，觀察哪些三角函數是大學課程中會用到的？

1.4 名詞釋義

1. 高一學生：本研究所提及的高一學生，指的是九十四學年度入學的高一學生。
2. 錯誤類型：本研究所指的錯誤類型是以本研究自編的「三角函數學習現況調查研究試卷（前、後測）」，以及各校的第二次段考、期末考試卷中，將答對率不足 60%的題型，定義為本研究的錯誤類型。
3. 學習成效：本研究所提及的學習成效，是以期末評量中的錯誤類型多寡，來定義學生的學習成效優劣。

1.5 研究限制與範圍

1. 本研究範圍設定於以三角函數為相關課題。
2. 受限於人力、物力、時間與經濟等因素，以北台灣之大台北地區、桃園地區以及新竹地區中六所學校，二十個班級共 829 人為施測對象。推論上宜與此類似的對象為之。
3. 在研究工具方面，本研究是以自編的「三角函數學習現況調查研究試卷（前、後測）」、各校的第二次段考考卷以及各校的期末考考卷，作為錯誤類型來源的依據。以「九年一貫實施後學生進入高中學習三角函數現況之教師意見訪談大綱」作為訪談二十位高中教師的依據。以「大學生在各科系學習或各領域所需三角函數相關知識的多寡」為問卷訪談六個國立中央大學系所（生命科學系、化學系、企管系、財金系、資訊系與經濟系）的教授。並參考以下三大領域的大學用書來探討大學生所會用到的三角函數相關知識：

- 微積分

Thomas' Calculus (11E) (新月圖書、東華代理)。

Instructor' s Solutions Manual Part 1 & Part 2 (根據 Thomas' Calculus (11E) 推出的習題詳解)。

Larson and Edwards , Calculus (6E)。

- 統計

D. D. Wackerly , W. Mendenhall III and R. L. Scheaffer , Mathematical Statistics with Applications (6E)。

- 線性代數

B. Kolman and D. R. Hill , Elementary Linear Algebra (7E)。

第2章 文獻探討

三角學源於探討三角形的邊角關係，特別是從三角形的三內角與三邊長所組成的六個元素中的某三個元素決定出三角形的其他元素；埃及、中國與巴比倫都各自發展出一些三角學的知識，一般相信三角學的創立者是古希臘的西帕修斯

(Hipparchus of Greece, 約 190BC~120BC) (翰林數學課本第二冊, 2007), 而因為天文學的觀測和研究, 到 15 世紀時三角學發展成一門獨立的學科。然而三角函數的由來是因為三角學而興起, 隨著微積分的發展, 三角函數的研究也越來越多, 並且有了三角函數的應用。到了 18 世紀初, 六個三角函數被認為是圓內和某弧有關的線段長。直到 1748 年, 在數學家 Euler 之後, 三角學才真正成為一門具有解析性的數學 (余鄺惠, 2003)。

在此章的文獻探討中, 先概述三角函數的學習目標, 再將所查閱到的三角函數相關論文以錯誤類型及三角函數錯誤類型等兩大類文獻一一概述, 最後以各論文中的錯誤類型整理為本章之小結。

2.1 三角函數之教學目標

在張琇涵 (2006) 的論文「台灣與新加坡三角函數課程之教科書比較」中第 4.1.1 節台灣數學課程之三角函數教學目標以及南一版教師手冊第二冊中提到, 三角函數的課程內容編寫在高一下學期第二章與第三章。

第二章「三角函數的基本概念」中, 引入廣義角與三角函數的概念, 探討三角形邊角之間的關係, 導出正弦定理、餘弦定理, 並討論解三角形的問題及測量上的應用。共分六節, 教學目標如下:

- 銳角三角函數

1. 了解兩直角三角形中, 若有一雙銳角對應相等, 則其任意兩對應邊所成的六個比的比值也對應相等。
2. 了解銳角 θ 的六個三角函數值: $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ 、 $\cot \theta$ 、 $\sec \theta$ 、 $\csc \theta$

的意義，並知道它們隨 θ 的度數而變。 θ 給定，這六個值也跟著確定，它們都是 θ 的函數。

- 三角函數的基本關係

1. 能利用銳角三角函數的定義，證明倒數關係、商數關係及平方關係。
2. 知道銳角的某一三角函數值，利用上述關係，求得其餘五個三角函數值。
3. 能利用上述關係，證明一些簡單的三角恆等式。
4. 能利用銳角三角函數值的定義，證明餘角關係。
5. 能利用倒數關係、商數關係、平方關係及餘角關係，簡化三角函數值的計算。

- 簡易測量與三角函數值表

1. 能認識測量術語：仰角、俯角及方位，並了解方位的表示法。
2. 能根據所附的三角函數值表，及利用線性內插法求得銳角的三角函數值。
3. 給一個三角函數值，能利用所附的三角函數值表，查得其所對應的銳角。
4. 能將簡單的測量問題轉化為三角形邊角的問題，並利用三角函數的概念求解。

- 廣義角的三角函數

1. 能了解始邊、終邊、旋轉量、正角、負角及廣義角的意義。
2. 能了解廣義角及同界角的意義，並知道同界角的三角函數值相同。
3. 給定一廣義角，能求出其介於 0° 與 360° 之間的同界角。
4. 能判斷每一象限角各三角函數值正負。
5. 能知道當 θ 為 $\pm 90^\circ$ 的同界角時， $\tan \theta$ 與 $\sec \theta$ 無意義。
6. 能知道當 θ 為 0° 或 180° 的同界角時， $\cot \theta$ 與 $\csc \theta$ 無意義。
7. 能將 $(-\theta)$ 、 $(180^\circ \pm \theta)$ 、 $(360^\circ - \theta)$ 、 $(90^\circ \pm \theta)$ 、 $(270^\circ \pm \theta)$ 的三角函數值化為 θ 的三角函數值。

- 正弦定理與餘弦定理

1. 能推得面積公式，並利用面積公式導出正弦定理。

2. 能證明餘弦定理。
 3. 能利用正弦定理、餘弦定理理解三角形，並推導其他幾何性質。
- 基本三角測量

能將日常測量問題轉化為解三角形問題，並利用各種三角關係式求解。

第三章「三角函數的性質與應用」中，引入角的弧度度量，將三角函數視為實數間的對應，並在坐標平面描繪其圖形，了解其特性，然後導出和、差角公式，倍角、半角公式，和、差與積的互化公式，進而討論正、餘弦函數之疊合問題及反三角函數的基本概念，最後介紹複數的極式、隸美弗定理，並介紹極坐標。共分爲七節，教學目標如下：

- 三角函數的圖形
 1. 知道「弧度」單位的意義及度量方法，及作「弧度」與「度」間的轉換。
 2. 能由圓半徑及圓心角求其所對的弧長與所成之扇形的面積。
 3. 能利用描點法描繪正弦函數的圖形，並知道如何透過平移及伸縮，由 $y = \sin x$ 的圖形描出 $y = a \sin(bx + c) + d$ 及 $y = \cos x$ 之圖形。
 4. 能透過平移和伸縮，由 $y = \cos x$ 的圖形描出 $y = a \cos(bx + c) + d$ 之圖形。
 5. 能利用描點法描繪出正切函數的圖形，並利用平移及鏡射的方法，由 $y = \tan x$ 的圖形描出 $y = \cot x$ 的圖形。
 6. 能利用倒數關係，由 $y = \cos x$ 的圖形描出 $y = \sec x$ 的圖形。
 7. 能利用平移的方法，由 $y = \sec x$ 的圖形描出 $y = \csc x$ 的圖形。
 8. 能知道六個三角函數的定義域、遞增或遞減之變化情形、週期、最大值與最小值以及判斷是爲奇函數或偶函數。
- 和角公式
 1. 能證明正弦函數與餘弦函數的和角公式，且應用其求值。
 2. 能導出正切函數的和角公式。

• 倍角、半角公式

1. 能導出正弦函數、餘弦函數及正切函數的倍角公式。
2. 能導出正弦函數、餘弦函數及正切函數的半角公式。

• 和、差與積的互化

1. 能利用和、差角公式導出積化和差與和差化積的公式。
2. 能利用上述公式求值及轉換三角函數式。

• 正餘弦函數的疊合

1. 能將 $y = a \sin x + b \cos x$ 轉化成

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta) \text{ 或 } y = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x + \phi) \text{ 的形式。}$$

2. 能應用上述的方法，能解最大值或最小值的實際問題。

• 反三角函數的基本關係

1. 能了解符號 $\sin^{-1} a$ 的定義，並知道定義域為 $[-1, 1]$ ，值域為 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ，且與

定義於 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上之正弦函數 $y = \sin x$ 互為反函數。

2. 能了解符號 $\cos^{-1} a$ 的定義，並知道定義域為 $[-1, 1]$ ，值域為 $[0, \pi]$ ，且與定義於 $[0, \pi]$ 上之餘弦函數 $y = \cos x$ 互為反函數。

3. 能了解符號 $\tan^{-1} a$ 的定義，並知道定義域為 R ，值域為 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，且與定

義於 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上之正切函數 $y = \tan x$ 互為反函數。

• 複數的極式

1. 了解複數平面上一點之向徑、幅角及主幅角之意義。
2. 了解複數的極式表示法，並能將給定的複數化為極式。
3. 能透過複數的極式，了解兩複數相乘的幾何意義。
4. 能推證棣美弗定理。

5. 能利用隸美弗定理做複數的乘、除運算。
6. 能利用隸美弗定理推出正、餘弦函數的倍角公式。
7. 能利用隸美弗定理解方程式 $x^n = \alpha (\alpha \in R)$ 。
8. 能知道 $x^n = \alpha$ 之解恰為以原點為圓心，半徑為 $n\sqrt{|\alpha|}$ 之圓內接正 n 邊形
(其一頂點為 $n\sqrt{|\alpha|}(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n})$ ， $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$) 的 n 個頂點。
9. 了解極、極軸的意義及極坐標的表示法。
10. 給定極坐標，能在極坐標格子圖中標出其所代表的點。
11. 給定極坐標格子圖上一點，能寫出其極坐標。

2.2 三角函數相關研究

有關三角函數的研究相當多。其中有若干研究指出若將「數學史」融入高一學生數學學習中，融入數學史的實驗組學生，學習成效會優於傳統教學法的控制組（如：蔡佳燕，2004）。亦有若干研究指出若將動態幾何系統（如：GSP）融入高中數學科廣義角三角函數單元中，則接受 GSP 電腦輔助教學的學生在數學學習態度上有正面的影響（如：鄭志明，2003）。這些研究是屬於在研究三角函數的教學部分。雖然有如此多的研究在探討三角函數的教學部分，但是，因為本研究所要探討的為高一學生學習三角函數狀況的部分，所以在此並不加以贅述，而單以與三角函數有關的論文作為探討。

以下我們選定以與三角函數的錯誤類型為探討的目標。第一小節探討近年來我國課程在三角函數上的變化與發展，第二小節探討國內有關三角函數的相關論文，在第三小節中則專門探討有關三角函數之錯誤類型的論文，並將其做一比較。

2.2.1 三角函數課程之發展

三角函數的課程經過多次的精簡或變動。民國 74 年教育部公佈國民中學數學課程標準，其中明訂將相似形、二次函數等相關內容列入三角函數的先備知識並且將「數值三角及其應用」列入課程編排中，讓國中學生可以對三角函數有一基本的認識。民國 83 年，教育部公佈國民中學數學課程標準，編寫了銳角三角函數與三角函數的應用相關內容，相關教材內容如下：

表 2-2-1 國中三角函數課程之演變

民國七十四年四月教育部修訂 公布的國民中學數學課程標準 內容	民國八十三年十月教育部修訂公布的國民中 學數學課程標準對相關教材之變革			
	列入必 修教材	列入選 修教材	大幅精簡 或刪除	備 註
第一章 相似形 1-1 比例線段 1-2 相似形的意義 1-3 相似三角形 1-4 相似形的應用	✓ ✓ ✓ ✓	 ✓		直角三角形 相似定理列 為選修教材。
第二章 二次函數 2-1 變數與函數 2-2 二次函數的圖形 二次函數的最大值與最 小值	✓ ✓ ✓			

第三章 數值三角及其應用				
3-1 銳角三角函數		✓		
3-2 三角函數的基本關係			✓	只介紹正、餘弦與正切函數之函數值。
3-3 用查表法求三角函數值			✓	
3-4 三角函數的應用		✓		

(張琇涵, 2006)

民國 83 年中，將三角函數列入選修教材，使得國中學生在進入高中前對三角函數基礎認識的不一致。民國 87 年九年一貫數學課程暫行綱要的公佈，將三角函數從國中課程中刪除，所以國中學生在進入高中前，對三角函數的認識僅有：相似形、二次函數圖形的概念、三角形的幾何性質等認識。因為上述課程的變動，造成各界恐慌數學能力的低落，所以教育部發行了「樂在數學參考手冊」來順應輿論對提昇國小學生計算能力的呼籲，更於 92 年召開數學小組諮詢會議，針對九年一貫數學課程的影響與改進進行討論。教育部更鑑於國民中學與高級中學課程之落差，委任國立中正大學數學系編寫高中銜接教材，提供九十四學年度高中入學新生作為數學領域補救教學之用。

國立中正大學並對高中三角函數課程提出兩點建議：1. 只處理正弦、餘弦和正切三個三角函數的圖形，至於餘切、正割和餘割的圖形可列為參考資料。2. 刪除反三角函數，希望能讓學生在整體的知識上有連貫的學習(張琇涵, 2006)。這些建議都反映在九五暫綱內。

2.2.2 三角函數相關論文

在這一節中，研究者找到了眾多與數學相關概念、課程與錯誤類型的論文，將其全面的整理並放置在附錄六。在此僅討論與三角函數有關的論文。

黃建興（2004）「國小教師數學單元教學之探討—以圓周率教學為例」中發現，學生學習圓周率困難的原因有二：一是對於圓心、直徑、半徑和圓周長相關概念的知識不足；二是缺少長度測量的能力，不會測量圓周長。

吳佳起（2003）「函數單元學習前後的概念成長探討」，國中二年級學生在函數方面存在許多錯誤類型，以及對於函數的迷思概念：

- (1) 在學生初次學習函數的概念前後，其函數概念有顯著的不同。
- (2) 函數單元的學習，最有助於「壓縮」層次的學生進階到「物化」層次。
- (3) 學生存在著許多錯誤類型。如：自變數與應變數的角色混淆顛倒。

黃振乾（2005）「高一學生解反函數問題之研究」，研究結果指出，學生普遍在非映成函數的概念發生錯誤，此外對於以合成函數定義反函數的定義，存在一些迷思。在個案方面顯示將函數的對應域、值域混淆，導致判斷非映成函數其反函數是否存在上發生錯誤。但學生可以使用變數變換的方式求變數表徵函數之反函數，以合成函數的方式驗證。此外，學生誤解反函數的定義，使其解題過程中發生部分錯誤。

曾淑鑾（1990）「高中生線性內插法瞭解的研究」，內插法概念知識方面發現約六成學生對內插法表徵系統圖形到數學式的轉換能力不夠好；在過程知識方面發現，計算錯誤為可線性估算函數值問題的錯誤主因之一；解題方面發現，有規律的非局部線性圖形，會因其規律性使學生認為可以使用內插法，且估算函數值時，不管函數是否局部線性，似乎線性內插法是學生主要的估測策略。

張琇涵（2006）「台灣與新加坡三角函數課程之教科書比較」，在台灣的教材中可以增加對數學量感的培養、學習新加坡對習題編制的設計與落實科技、實際應用

於教學中。而台灣的先備知識完備性較新加坡的多且深，讓學生可以有充足的時間奠定良好的基礎，但是教材的連貫性卻不足新加坡的編制，所以建議可以在教材的設計上，拉長三角函數的教學時程，可以讓學生發揮較好的學習成效。

邵錦程(2006)「台灣與英國三角函數課程之教科書比較」，對課程設計者的建議：希望可以更留意各單元與三角函數的關連性、調整單元內主題比重、順序、分段實施三角函數單元內容、並注意三角函數的銜接課程是否足以讓學生學習有關三角函數的內容基礎與潛在課程的編制。

綜觀國內研究三角函數的相關論文相當多，張琇涵(2006)曾對三角函數的文獻依研究者、年代、研究題目、研究內容等類別整理，在此依此表格為依據將其較新或再尋找到的文獻資料整理如下。

表 2-2-2 國內三角函數相關文獻

研究者(年代)	研究題目	研究內容
曾淑鑾 (1990)	高中生線性內插法瞭解的研究	(1) 探討高中生在估測函數值問題的解題表現，並分析其解題策略。(2) 檢驗不同的變因對線性內插法概念瞭解的影響。(3) 歸納研究結果，試提若干建議供教學上參考。
姚如芬 (1993)	高雄地區高一學生數學學習態度與其學習成就之相關研究	探究我國高中學生數學之學習態度與學習成就的相關性，並歸納影響高中學生數學學習態度的主要因素。

張景媛 (1994)	國中生數學學習歷程 統整模式的驗證及應用： 學生建構數學概念的分析及 數學文字題教學策略的研究	(1) 以模式考驗的方式驗證本研究之「國中生數學學習歷程統整模式」；(2) 以質的研究方法探討學生在數學文字題上所產生的錯誤概念，並探究學生如何建構出正確的數學概念；(3) 編製「後設認知與動機信念訓練課程」及「數學文字題解題策略訓練課程」，並以教學實驗的方式利用這些課程進行策略教學效果的考驗。
施盈蘭 (1995)	五專生的三角函數學習現象	探討五專生對三角函數在廣義角，廣義數值三角及三角函數概念三部份的認知情形。
陳姿妍 (1996)	中學生處理有輔助線需求之幾何證明的錯誤分析	探討中學生在幾何證明題的錯誤類型和錯誤原因。
黃純杏 (2001)	高中學生廣義角的三角函數運算錯誤概念類型之研究	探討高中學生在廣義角的三角函數運算的錯誤類型及錯誤原因。
陳美卿 (2002)	高雄市高中生複數絕對值概念及運算錯誤類型之分析研究	探討高中學生在複數絕對概念及運算之錯誤類型與錯誤原因。
吳佳起 (2003)	函數單元學習前後的概念成長探討	探討國二學生在函數的單元學習前後，其函數概念層次的變化情形，及學生的錯誤類型與迷思概念。

陳忠雄 (2003)	高中學生三角函數概念學習錯誤類型研究	探討高中學生在三角函數單元存在那些錯誤概念，並分析學生的三角函數錯誤概念的類型與形成錯誤概念的原因。
黃建興 (2004)	國小教師數學單元教學之探討—以圓周率教學為例	分析現有教科書中圓周率課程設計的內容，瞭解圓周率課程的設計梗概，並從中探討學生學習的困難。
簡志明 (2004)	高一學生銳角及廣義角三角函數基本概念應用運算錯誤類型之研究	探討高一學生學習銳角及廣義角三角函數的基本概念後，其概念發展情形與學生運算錯誤的類型及造成錯誤之原因。
賴潔芳 (2004)	二階段評量應用在高中生三角函數學習成效之研究	探討運用二階段診斷評量分析高中學生學習三角函數的錯誤概念類型，與錯誤概念形成的原因，並依據此項發現來設計高中學生學習三角函數之教學活動，據此探究教學活動對學生學習三角函數單元的成效。
黃振乾 (2005)	高一學生解反函數問題之研究	以反函數定義的認知、反函數的求解及反函數的驗證，三個階段進行測驗及訪談。
黃世穎 (2005)	台灣與日本高中現行數學教材比較	探討兩國高中數學課程之設計，就數系、多項式、不等式、三角函數、指數與對數、圓錐曲線、平面向量與空間圖形、矩陣、微積分、數值計算和機率與統計等十一個主題進行教材比較。
黃見益 (2005)	中部地區高二學生複數極式之錯誤類型	探討學生在複數的極式上的錯誤類型與錯誤原因，以及高中學生對複數概念。

林依伊 (2006)	反三角函數錯誤類型 分析之研究	探討高中學生在反三角函數概念及運算的錯誤類型與錯誤原因。
張琇涵 (2006)	台灣與新加坡三角函 數課程之教科書比較	探討台灣與新加坡從一到十年級的數學教材中三角函數的相關主題，並比較兩國鋪陳三角函數相關課題的異同。
邵錦程 (2006)	台灣與英國三角函數 課程之教科書比較	探討台灣與英國從一到十年級的數學教材中三角函數的相關主題，並比較兩國鋪陳三角函數相關課題的異同。

對本研究的啟示

三角函數是一門橫跨了眾多主題的科目，他包含了三大主題能力指標—數與量、代數與幾何，並且架構在函數之上，但是課程研究者認為在台灣的教材中，以三角函數的先備知識而言，比起新加坡與英國是足夠的，但是因為將三角函數變為國中的選修教材後與九年一貫實施後，刪除了國中有關三角函數的單元，造成國中生並未接觸過三角函數的單元，所以對學生在高中一年級學習時會有比較大的負擔。所以也希望透過本研究可以看出端倪，看看是否如課程研究者所述，並對新的課程編排有所助益。

2.2.3 三角函數錯誤類型之研究

Browm & Burton (1978) 指出分析學生錯誤類型的過程對教師及學生皆有幫助(陳忠雄, 2003)。Borasi (1987)提出教師藉由詳實的錯誤類型分析,可發現學生的學習困難,並瞭解學生錯誤的可能原因是否是由於錯誤的思考過程或其他原因所造成,而得到的診斷資料可作為設計補救教學時的參考依據,並針對學生的問題作有效的矯治(陳忠雄, 2003)。黃敏晃(1998)認為行為(包含由不是不小心而引起的錯誤在內)都是學習而來,那麼把背後犯錯的原因找出來,老師就

比較容易進行補救性教學（簡志明，2004）。而部分國中生的學習心態都是經由練習再練習（drill and practice），然而太多練習加強了連結，卻忽略理解，這種情況常發生在台灣的升學背景下，造成學生只背公式，不理會真正的意義（簡志明，2004）。

所以 在此節中，整理了七篇有關三角函數錯誤類型之研究，並且將他們分述如下。在本研究的最後，找到了九十四學年度入學高一學生的錯誤類型之後，會與此節的內容作一比較，看看經過地區上與教育政策的不同，錯誤類型是否會有所差異。

施盈蘭（1995）「五專生的三角函數學習現象」，廣義角三角函數概念方面的錯誤類型有：

1. 多數學生對於廣義角的認識模糊不清，易受到思維經驗及典型的視覺心像影響，而將坐標平面、象限、始邊的位置等非本質屬性納入廣義角的概念中
2. 在求值廣義三角函數的過程中，常易受到思維經驗中銳角三角函數定義的概念心像影響，使得在利用教科書上的操作型定義圖解題目時，形成錯誤的程序性知識
3. 對於三角的函數概念沒有很明確的認識，且易受到思維經驗的影響，產生知識的負遷移（對新知識的學習起干擾或抑制作用）而進行錯誤的判斷或代數運算。

表 2-2-3 三角函數的錯誤類型

單元內容	錯誤概念類型
廣義角	圖形錯覺，由圖形誤導廣義角度數。 誤認一圈等於 180 度，對於一圈 360 度做不當推論。 對於旋轉量的認知沒有深刻的體認，難以想像大於 360 度的角度。 有向角方向錯誤或忽略始邊、終邊這些本質屬性所附與廣義角的意思

	<p>義，將角度所涵蓋的象限當成有向角性質符號的判定依據。</p> <p>學生對於同界角的概念非常模糊，傾向以幾何圖形判斷法。</p> <p>角度的單位換算有問題。</p>
<p>銳角</p> <p>三角函數</p>	<p>定義的理解不清楚。</p> <p>三角形三邊長性質的誤用。</p> <p>三角形邊角關係先備知識不足，對於圖形中呈現的直角三角形一律當成所認知的特別角角度的三角形。</p>
<p>廣義</p> <p>三角函數</p>	<p>定義的理解不清楚。</p> <p>各三角函數值範圍錯誤。</p> <p>代數性質的誤用：乘法性質的誤用、誤認三角函數具有線性性質、三角函數的奇偶性質錯誤、三角函數的正負不會判斷。</p> <p>廣義三角函數的求值解題策略偏愛使用代數記憶公式，但不是很符合概念地學習公式，導致不能很正確地運用公式。</p> <p>對於定義操作步驟的程序性知識亦不夠熟稔，求值時，易忽略有向線段的性質符號，或是邊長的比例錯誤。</p> <p>對於同界角三角函數，少從同界角的方向去判斷其值相等。</p> <p>對於廣義三角函數定義的圖解步驟，步驟執行技巧不夠熟練，缺乏完整的程序性知識。</p> <p>對於三角函數的概念性知識不夠完備，自行綜合歸納，做過度的歸論類化。</p>
<p>三角函數</p> <p>的圖形</p>	<p>函數週期的定義概念不清楚。</p> <p>三角函數的遞增與遞減不清楚。</p> <p>三角函數的圖形與平移認識、對稱性概念、三角函數的週期與振幅性質認識不清。</p>

(施盈蘭，1995)

黃純杏（2001）「高中學生廣義角的三角函數運算錯誤概念類型之研究」，錯誤類型有：

1. 廣義角部分的錯誤類型有：圖形錯覺、由圖形誤導廣義角度數、地理方向錯誤、有向角方向錯誤、廣義角大小錯誤及數值計算錯誤。
2. 廣義角的三角函數部分的錯誤類型有：三角函數基本定義錯誤、三角函數值錯誤、各三角函數值範圍錯誤與其他錯誤類型

錯誤原因有：

1. 因概念不清產生的錯誤：對廣義角定義不瞭解、廣義角與三角函數值定義混淆，相似概念混淆產生錯誤、三角函數基本定義產生錯誤、三角函數值與角度產生錯誤、三角函數關係式誤解用法、不瞭解三角函數符號。
2. 對圖形的錯覺：學生會將題目所附的圖形以自己的方式去分析。
3. 題目數字影響：學生將題目所給的數字，用自己認為合理的運算找出答案。
4. 受先前學習過的知識或本單元學習經驗影響作錯誤推論：學生會因為舊經驗學習不夠熟悉容易遺忘，或是過度的依賴舊有經驗，而將其做不當或過度的推論。如將一圈 360 度或者分配律作不當的推論、將題目與自己熟悉的三角函數值聯想在一起、將三角函數值產生的基本運算看成與角度之度數產生的基本運算性質一樣、誤認一圈為 180 度、常用的直角三角形邊長比例弄混淆等。
5. 誤譯語文：學生將數學問題原文轉譯成數學語言時所產生的錯誤。
6. 其他錯誤：如粗心計算錯誤、拼湊答案等。

陳忠雄（2003）「高中學生三角函數概念學習錯誤類型研究」，研究結果發現學生錯誤類型主要有下列六部份：

1. 三角函數與反三角函數定義的概念不清：三角函數與反三角函數的定義混淆、不瞭解三角函數的定義域、不瞭解三角函數的值域、不瞭解反三角函數

的定義域。

2. 三角函數符號運用的概念不清：乘法性質的誤用、函數與反函數合成的誤用、三角形三邊長性質的誤用。
3. 三角函數運算性質的概念錯誤：三角函數的遞增與遞減不清楚、三角函數的平方關係不清楚、誤認三角函數具有線性性質、三角函數的正負不會判斷、三角函數的奇偶性質錯誤、三角函數的疊合性不清楚、三角函數值相等的概念不清。
4. 角度的基本性質概念不清：角度的單位換算有問題、同界角的認識不清
5. 三角函數的圖形概念不清：三角函數的圖形與平移認識不清、三角函數圖形的對稱性概念不清。
6. 三角函數的週期與振幅概念不清：函數週期的定義概念不清、三角函數的週期與振幅性質認識不清。

錯誤原因有：

1. 未能達成「概念的獲得」的錯誤概念原因有：對三角函數與反三角函數定義的概念缺乏、三角函數的定義域概念缺乏、三角函數值域的概念缺乏、反三角函數的定義域概念缺乏、角度的單位換算不清楚、同界角的概念缺乏、函數週期的定義概念缺乏
2. 未能達到「概念的同化」的錯誤概念原因有：乘法性質的誤用、函數與反函數合成的誤用、三角形三邊長性質的誤用、三角函數的遞增與遞減性概念缺乏、三角函數的平方關係的概念缺乏、誤以為三角函數具有線性性質、三角函數的正負號判斷錯誤、三角函數的奇偶性概念缺乏、三角函數的疊和性概念缺乏、三角函數圖形與平移概念缺乏、三角函數圖形的對稱性概念缺乏、三角函數的週期與振幅的概念缺乏。

簡志明（2004）「高一學生銳角及廣義角三角函數基本概念應用運算錯誤類型之研究」，錯誤類型有：

1. 銳角三角函數：對定義不清楚、角度與邊長的對應關係為片段性的認知、無理數運算過程出錯、解聯立方程式產生錯誤、對恆等式轉換不熟悉而產生誤用、代數觀念薄弱，無法作答、沒有記憶 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 三角形的三角函數值、運算不完整。
2. 廣義角三角函數：對同界角、廣義角定義不清楚、角度的範圍無法使用不等式表示、各象限角的三角函數值正負判斷錯誤、角度轉換錯誤、三角函數方程式不會分解、象限角的三角函數值為錯誤值、不會查閱三角函數值表、運算不完整。

賴潔芳（2004）「二階段評量應用在高中生三角函數學習成效之研究」，錯誤類型有：弧度與函數值概念的錯誤概念、圖形概念的錯誤、正餘弦疊合概念的錯誤概念、廣義三角函數的錯誤概念、三角函數的運算性質錯誤概念、反三角函數概念的錯誤概念、角度單位換算的錯誤概念。

林依伊（2006）「反三角函數錯誤類型分析之研究」，研究中指出錯誤原因有：基本概念知識不足、沒有能力運用適當的符號表徵溝通數學概念、憑直覺或關鍵字做反應、未能檢核題目所需條件是否成立、對符號結構缺乏深層認識、先前不穩固的學習造成知識的負遷移、用固定的思路與解題策略解決問題。

黃見益（2005）「中部地區高二學生複數極式之錯誤類型」，研究中指出在「將複數化為極式及隸美弗定理的應用」的錯誤原因有：高一上學期時，對於虛數的概念不清，導致於對複數的形式更無法接受；對於複數與高斯平面的一對一對應的概念無法理解，導致於更不能接受複數有絕對值的概念；三角函數的學習情形不佳，導致在化複數為極式時發生主幅角錯誤的情形；運算過程中發生邏輯推理不

正確的情形；計算錯誤；題意理解不清，導致誤用公式。

受測學生對於「複數絕對值、複數極式、隸美弗定理以及複數的 n 次方根」的概念發展情形為：許多學生對於複數上只停留在高一所學之虛數 i 的概念，仍然無法理解複數是由實部及虛部所組合而成的一個數系；學生的三角函數部份之學習狀況不佳，對於三角函數在四個象限中的正負號仍然模糊不清；複數的引入更無法接受，完全不能理解所代表的意義。

而將研究三角函數錯誤類型的七篇文獻，依其研究者、年份、論文名稱以及所找到的研究對象分別如下：

- 施盈蘭（1995）「五專生的三角函數學習現象」。
- 黃純杏（2001）「高中學生廣義角的三角函數運算錯誤概念類型之研究」，研究對象為台南的兩所國立高中，八個班，共 311 位學生。
- 陳忠雄（2003）「高中學生三角函數概念學習錯誤類型研究」，研究對象為嘉義的某高中，高二、高三各一個班，共 78 位學生。
- 簡志明（2004）「高一學生銳角及廣義角三角函數基本概念應用運算錯誤類型之研究」，研究對象為高雄某高中，高一，三個班級，共 113 位學生。
- 賴潔芳（2004）「二階段評量應用在高中生三角函數學習成效之研究」，錯誤類型的對象為台南某高中，高三學生，37 位學生。
- 林依伊（2006）「反三角函數錯誤類型分析之研究」，研究對象為台南某高中，高一，共 210 位學生。
- 黃見益（2005）「中部地區高二學生複數極式之錯誤類型」，研究對象為中部地區某高中二年級，共 95 人。

綜合他們提出的錯誤類型整理如下表。

表 2-2-4 三角函數錯誤類型統整

三角函數相關概念	施 盈 蘭	黃 純 杏	陳 忠 雄	簡 志 明	賴 潔 芳	林 依 伊	黃 見 益
三角函數的定義（包括定義域、值域、各象限角正負值、三角函數奇偶性等）	✓	✓	✓	✓	✓		
平方關係、倒數關係等恆等式的轉換		✓	✓	✓	✓		
同界角	✓	✓	✓	✓			
廣義角的定義	✓	✓	✓	✓			
角度關係（包含餘角關係、角度與弧度、角度與邊長關係）	✓	✓	✓	✓	✓		
特殊三角形的三角函數值	✓	✓	✓	✓			
代數觀念太過於薄弱	✓	✓	✓	✓			
反三角函數			✓		✓	✓	
誤以為三角函數有線性關係	✓		✓				
角度比較大小（三角函數的遞增與遞減）	✓		✓				
三角函數的疊合			✓		✓		
三角函數的圖形（包含振幅、週期、平移、對稱）	✓	✓	✓		✓		
運算錯誤		✓		✓			
角度範圍不會以不等式表示				✓			
查閱三角函數表				✓			
複數的極式							✓

對本研究的啟示

在這些論文上我們可以看到國內對於三角函數的錯誤類型研究從 1995 年起就有所研究。在這份研究中，我們將會以九年一貫第一屆畢業生在高一時期的三角函數錯誤類型來與歷年來研究出錯誤類型的論文加以比較，看看經過了時代、課程的改變，高中學生在三角函數上的錯誤類型是否有所差異？或者不論時空的改變，學生對三角函數的錯誤類型依舊。來探討三角函數對於高中學生是否會太過於艱深？以期可以對「九八課綱」做出建議，讓教師在教學過程中有所參考。

第3章 研究方法與實施步驟

本章旨在說明本研究的研究設計理念、研究對象與研究工具、施行步驟和資料處理與統計，共分為五節，分述如下。

3.1 研究設計理念

本研究主要目的在探討九十四學年度入學的高一學生對於三角函數的錯誤類型，並分析哪些題型對高一學生太過於艱深，以作為日後數學教師實施補救教學或改進教學策略的參考，亦將與以往的文獻作一比較，以期可以作為「九八課綱」的參考。

本研究採用的方法分成四方面進行：

- 高一學生方面：藉由研究者自編的「三角函數學習現況調查研究試卷（前、後測）」、蒐集各校第二次段考考卷以及各校期末考考卷的學生試卷，作為錯誤類型來源的依據。
- 高中教師方面：以「九年一貫實施後學生進入高中學習三角函數現況之教師意見訪談大綱」，對二十個班級的數學老師進行半結構性訪談，並以「九年一貫實施後學生進入高中學習三角函數現況之教師意見訪談大綱」為原則，讓二十位教師們發表他們自己的想法。
- 大學教授方面：以「大學生在各科系學習或各領域所需三角函數相關知識的多寡」為問卷，發給中央大學六個系所的教授；問卷題目中採取以封閉式問題和開放式問題並列的方式，讓各教授們填寫回答。
- 在大學用書方面：參考微積分、線性代數與統計等三大領域的大學用書共五冊來探討大學生所會用到的三角函數相關知識。

3.2 研究對象

本研究是以北台灣的大台北地區、桃園地區、新竹地區的六所高中其中二十個班的學生進行調查。

為配合高中教師的訪談，希望以帶領九十四學年度的高一數學教師，並且在九十四學年度之前近三年內，有過另一次帶領高一數學經驗之教師為訪談對象，以期可以藉由高中教師的記憶比較出九年一貫實施前後的差異。請求符合此條件的數學老師及其班級，接受我們的訪問，而有二十位老師以其所帶領的數學班級共襄盛舉，以下是各學校的大致資料：

大台北地區（以筆畫順序排列）

台北市立大直高中，三個班，共 103 位學生。

台北市立成功高中，四個班，共 170 位學生。

台北市立萬芳高中，四個班，共 159 位學生。

台北縣私立徐匯高中，兩個班，共 100 位學生。

根據全國教師會選聘服務網（<http://www.nta.org.tw/exam>）中，「九四年基北區公立高中最低錄取分數」一文中，台北市立成功高中為九十四學年度的男生第四志願，最低錄取分數為 269 分，台北市立大直高中為 256 分（男生），台北市立萬芳高中為 229 分（女生）。而在本研究的第四章錯誤類型分析中，以這三校作一整體表現的整理。

桃園地區

桃園縣私立六和高中，四個班，共 185 位學生。

新竹地區

新竹市立香山高中，三個班，共 112 位學生。

本研究希望透過這二十個班級的樣本，涵蓋數學學習成就高、中、低三種成就的學生，以期可以推論到全台灣的高中學生。各校的基本資料如下表：

表 3-2-1 各校人數統計表

學校 \ 人數	總班級數	回收問卷總數
台北市立大直高中	3	103
台北市立成功高中	4	170
台北市立萬芳高中	4	159
台北縣私立徐匯高中	2	100
桃園縣私立六和高中	4	185
新竹市立香山高中	3	112
總計	20	829

在大學教授部分，因為英文版的微積分教科書，多將教科書分為兩大類—理工用微積分與商管、生物用微積分，理工用書的微積分中，用到的三角函數並不少，這是大眾所熟知的。所以在本研究中特別針對商管、生物用書擬訂「大學生在各科系學習或各領域所需三角函數相關知識的多寡」為問卷，發放給國立中央大學校內之生命科學學系、化學學系、企業管理學系、資訊管理學系、財務金融學系與經濟學系，這六個系所共 164 位教授，也希望藉由商管、生物用微積分以及大學教授的意見，整理出商管、生物類也就是高中時修讀數乙的學生，在大學時所需要用到的三角函數相關知識，以期可以了解數乙的學生，到底需要修讀多少的三角函數相關內容。

在大學用書部分，參考以下三大領域用書：

- 微積分

Thomas' Calculus (11E) (新月圖書、東華代理，屬於理工用書)。

Instructor' s Solutions Manual Part 1 & Part 2 (根據 Thomas' Calculus (11E) 推出的習

題詳解)。

Larson and Edwards, Calculus (6E, 屬於生物、管科用書)。

- 統計

D. D. Wackerly, W. Mendenhall III and R. L. Scheaffer, Mathematical Statistics with Applications (6E)。

- 線性代數

B. Kolman and D. R. Hill, Elementary Linear Algebra (7E)。

觀察這三大領域用書中,各是哪些單元會使用到三角函數並且使用三角函數的哪些部分,將其統整做一綜合整理,以期可以推測出大學生所需用到的三角函數概念。

3.3 研究方法與工具

本研究欲探討九十四學年度高一學生在三角函數上的錯誤類型、並將錯誤類型與文獻作比較,看是有否有差異。透過錯誤類型的比較,看提早接觸三角函數者與跟著學校進度學習三角函數者,在學期末的表現是否有差異。基於此研究主題本研究採用「調查研究法」為本研究之基本研究法,並以「調查研究法」為原則,設計研究工具。以下兩節分別敘述「調查研究法」與本研究的「研究工具」。

3.3.1 調查研究法

調查研究法是教育學者常用的一種標準方法,也是大家所熟知的方法,但是為了方便以後的學弟妹有一個依據的參考,還是將所參考的三本書中的定義與分類分述如下。

調查研究法(survey research methods)是科學研究方法中的一種,近代的調查研究配合以抽樣方法、問卷設計、資料分析以及調查實施程序等,常作為心裡

學、教育學、社會學、政治學以及公共衛生學等各領域的研究方法。到了 1960 年代，實證主義成爲教育研究的主流，實證主義的學者主張，要充分了解社會現象，唯有透過客觀的測量，提出科學的數據，這樣才能夠符合科學的要求（葉重新，2004）。在教育的領域中，運用調查研究法所進行的研究文獻或專題報告，爲數相當的多。美國兩位學者採用內容分析法，分析 1964 年的四十種教育期刊發現，約有三分之一的研究採用調查研究法（Lazarsfeld & Sieber，1964；郭生玉，1981）。根據 1972 年英國社會科學研究委員會的調查發現，有 60% 的社會科學研究報告採用調查科學法（Marsh，1982）。民國 60 年至 73 年國內的教育博士、碩士論文有 66.66% 採用調查研究法（陳伯璋，1987）。民國 61 年至 73 年我國 66 篇教育專案研究中，採調查研究法的比率更高達 87.88%（林新發，1991）。除了在學術研究上時常採用調查研究法之外，商業界也經常使用市場調查來蒐集商業情報，藉以了解消費者對其產品的態度與使用情形，以便在商業競爭中提高產品的市場佔有率。如：美國蓋洛普（Gallup）公司所做的民意調查，在了解受調查者的意見或態度具有相當高的準確性，因而聞名於世（葉重新，2004）。因此本研究以調查研究法爲準則，研究學生的錯誤類型、教師的訪談記錄與大學教授的問卷。

在教育上，調查研究的目的，在探討教育現象的實際情況，以作爲研擬教育計畫、改進教育現況、解決教育問題的依據。分析而言有以下五項：蒐集現況是十、確立改進標準、研擬教育計畫、決定採行錯失與提供研究依據（林新發，1991）。王文科（2000）定義調查研究是「研究者採用問卷（questionnaire）、訪問（interview）或觀察（observation）等技術，從母群體成員中，蒐集所需的資料，已決定母群體在一個或多個社會學變項或心裡學變項上的現況，或諸變項間的關係。」；郭生玉（1995）認爲調查研究是「根據母群體（population）所選出來的樣本，從事探求社會學變項與心裡學變項的發生、分配及彼此互相關係的一種研究法（Kerlinger，1973）。」簡單來說，調查研究就是對母體性質作描述的一種研究（林重新，2001）。而調查研究的特徵有以下三點（郭生玉，1995）：

1. 調查研究通常是以從母體抽取樣本為研究對象，有時也被稱為樣本調查研究（sample survey research）。
2. 調查研究的變項多為心裡學或社會學的變項，社會學的變項是用來描述各人所處的社會的特徵，如：性別、年齡、社會、職業、收入、宗教等；而心裡變項包括個人的態度、行為、信念、動機等。
3. 調查研究可以是簡單的設計或複雜的設計，簡單的設計如屬於描述現況的調查，而複雜的設計不僅只在描述現況也在探討變項間的關係。

調查研究的種類繁多，依名詞定義的不同，所包含的範圍也略有不同。以下綜合參考郭生玉（1981）、蔡保田（1987）、林新發（1991）、王文科（2000）、蔡重新（2004）等學者對調查研究的分類將其綜合整理如下：

- 依描述內容而分：

1. 描述性的調查(descriptive surveys): 描述性的調查旨在對現況(status quo)加以描繪，但並不解釋變項間的關係或因果關係。此類調查多為事實，爭議較少。
2. 解釋性的調查(explanatory surveys): 解釋性的調查是屬於事後回溯研究的一種。目的在蒐集資料並且解釋變項間的因果關係。此類調查大抵只能解釋變項間的關係而非因果。

- 依調查的範圍來區分可分為：

1. 普查(censuses): 普查是將母體內的元素都納入為觀察的對象，基於時間、經濟上考量，普查比較少見，但有時母群體不是很大時，普查是可以進行的。
2. 樣本調查(sample survey): 是從母體中抽出某些樣本作為調查的對象，其所強調的是樣本的代表性，若樣本具有代表性，則所調查的結果才可以推論回母群體。

- 若以對象的性質可區分為真實事物 (tangible) 與非真實事物 (intangible)；態度、動機與行為發生次數等是屬於非真實事物，而學校大小、桌椅與設備等則是屬於真實的事物，在教育研究中多數是屬於非真實事物 (抽象) 的調查。
- 依照研究變項的性質分為：狀況調查 (有形的變項)、調查研究 (無形的變項)；狀況調查的研究變項如桌椅、教室、電腦與圖書設備等，而例如成績、績效、態度、意見與工作動機等，則為調查研究。
- 依資料蒐集的方法可分為：
 1. 問卷調查 (questionnaire survey)
 2. 訪問調查 (interview survey)
 - 2-1 訪問調查依照人數可區分為：個別訪問、團體訪問。
 - 2-2 訪問調查依詢問的方式可分為：結構性訪問 (標準化訪問)、無結構性訪問、半結構性訪問。
 - 2-2-1 無結構訪問又可分為：重點訪問法、客觀陳述法、深度訪談。
 3. 控制觀察 (controlled observation) 又稱調查表調查：研究者可以使用標準化測驗來蒐集資料，或者請求學校提供一些學生的基本資料 (考試成績、一般記錄)。
- 依照資料蒐集時間的長短可分為橫斷式調查 (cross-section survey) 與縱貫式調查 (longitudinal survey)。

縱貫式調查可分為：趨向研究、同一團體研究、小組研究。
- 教育上的調查研究又可依其他標準分為：學校調查、電話調查

學校調查又可分為：綜合調查、教育調查、校舍調查

從上述的整理，可以看出在調查研究方面的分類相當的多，但是調查研究亦有其優缺點的存在。以下列舉一小部分來說明，以問卷調查法來說，其優點有：經濟方便，容易在短時間之內得到大量的研究資料、具有廣布性，樣本代表性高、受調查者可自由表達意見，而且沒有及時作答的時間壓力、問卷可不具名，誠實回答的可能性高與可以對受調查者呈現標準化刺激等；但其缺點有：問卷回收率低，容易導致調查結果的誤差、若以匿名方式填寫，不易掌控填答者的身份、若有受調查者不明白的問題，無法當場解說、受調查者對敏感性問題或開放性問題，填寫意願不高、容易得到表面性資料，不利於深入探討問題的真相與無法了解未寄回者的態度與意見等等。而在訪問調查亦有其優缺點，優點如：可以使受訪者暢所欲言，蒐集更深入的調查資料、當面訪問，可以讓受訪者有受人尊重的感覺、可以從受訪者的心情、言語或行爲，觀察其動機、態度與人際關係、彈性大可以重複訪問與可以了解受訪者內心深層的意念等；但其缺點可能有：訪問的樣本小，不易向問卷調查採大樣本實施、當面訪問相當花時間、由少數受訪者的意見，不適合推論到母群體、訪問所得的資料不易整理、訪問所得資料難以量化與訪問員的能力、價值觀、經驗、宗教信仰等，都可能影響訪問結果。

所以我們可以看到調查研究有其好處亦有其壞處，所以在實施調查研究時，應設定好大致上的重點，以其將誤差減到最小，避免影響眾多研究結果。而在本研究中，因為大學教授人數較多，所以採取問卷調查，避免因為人數眾多而訪問不易，但是確實遭遇到問卷回收不易的狀況，所幸最後有達到預定的 1/3 回收率。因為高中教師人數較少，所以採取一對一的訪問，在訪問時，有時因為老師下一節有課，受限於時間而不能侃侃而談，所幸在持續老師相約與等待後，可以得到較為完整的訪談內容。

3.3.2 研究工具

本研究以自編的「三角函數學習現況調查研究試卷（前、後測）」（附錄一、二）、蒐集各校第二次段考考卷以及各校期末考考卷的學生試卷，作為錯誤類型來源的依據。以「九年一貫實施後學生進入高中學習三角函數現況之教師意見訪談大綱」（附錄三）為原則，讓二十位高中教師們發表他們自己的想法。以「大學生在各科系學習或各領域所需三角函數相關知識的多寡」（附錄四）為問卷，廣發給六個大學系所的教授。並參考微積分、統計與線性代數等三大領域的大學用書來探討大學生所會用到的三角函數相關知識。三大領域用書分述如下：

- 微積分

Thomas' Calculus (11E) (新月圖書、東華代理，屬於理工用書)。

Instructor' s Solutions Manual Part 1 & Part 2 (根據 Thomas' Calculus (11E) 推出的習題詳解)。

Larson and Edwards , Calculus (6E , 屬於生物、管科用書)。

- 統計

D. D. Wackerly , W. Mendenhall III and R. L. Scheaffer , Mathematical Statistics with Applications (6E)。

- 線性代數

B. Kolman and D. R. Hill , Elemetary Linear Algebra (7E)。

而本研究的調查方式即可依上節中的分類方法加以歸納如下：

- 本研究若依描述內容而分：在蒐集資料描述錯誤題型時，為描述性調查，而在說明提早接觸三角函數者在學期末的評量結果是否有差異時，屬於解釋性調查。

- 本研究若依調查的範圍來區分，則屬於樣本調查，僅調查北台灣的二十個班級。
- 本研究若以研究的對象的性質則屬於非真實事物的調查，調查學生的答對率與學生的學習狀況。
- 本研究若依照研究變項的性質區分則屬於調查研究，以學生的成績作為調查。
- 本研究若依資料蒐集的方法來區分，則在學生方面，以研究者自編的「三角函數學習現況調查研究試卷（前、後測）」、蒐集各校第二次段考考卷以及各校期末考考卷的學生試卷作為控制觀察（調查表調查）。高中教師的訪談屬於訪問調查，且為訪問調查中的個別訪問與半結構性訪問，以「九年一貫實施後學生進入高中學習三角函數現況之教師意見訪談大綱」為訪問重點，讓教師們敘述他們自身的看法。而在大學教授的部分，則以「大學生在各科系學習或各領域所需三角函數相關知識的多寡」為問卷，進行問卷訪問，其中問卷中以封閉性與開放性的問題並列。
- 本研究若依照資料蒐集時間的長短來區分，在同一時間內對同時對學生施測研究者自編的「三角函數學習現況調查研究試卷（前、後測）」屬於橫斷式調查，而在一整個學期內，對同一個班級持續的蒐集資料屬於縱貫式調查中的同一團體研究。
- 本研究若依教育上的調查研究又可分為學校調查中的教育調查，專門調查學生的學習成效。

綜觀而言，本研究使用了調查研究法為基本，調查高一學生、高中教師與大學教授，但因調查研究法亦有其缺點，如在本研究遇到的：在問卷調查中，會有

問卷回收不易的狀況；在訪問調查中，可能會有環境的影響，或者訪談的內容廣度足夠但是深度不足，造成日後分析的困難，或者訪談者接受訪問時有要事在身，時間無法讓訪談者侃侃而談等。因為調查研究有其缺點存在，所以在當初要執行時，設定問卷回收應達到一定的回收率（1/3）；在訪談時，依照大綱注意內容讓訪談的廣度與深度都足夠，並且在與教師約定時間時，應注意教師的時間是否足夠等。注意細節中的問題，才能將調查研究逐一發揮，而讓研究盡善盡美。

3.4 實施步驟

本研究在 94 年 12 月開始即著手探討本研究之目的與方向，並於 95 年 2 月開始擬定「三角函數學習現況調查研究試卷（前測）」，並給予預試，預試目的、對象與時間如下：

1. 第一次預試

目的：瞭解題目的字句是否順暢與題意是否可以清晰瞭解。

對象：國立中央大學數學研究所的研究生四名。

施測時間：20 分鐘。

測驗結果：修改部分字句後，讓高中生施測。

2. 第二次預試

目的：瞭解題目的難易度。

對象：桃園地區的三所高中（中壢、平鎮、光仁）的三名高三學生。

施測時間：20 分鐘。

測驗結果：將較難的題目稍做修改，並將題意修改的更清楚。

3. 正式施測

在 95 年 3 月 17 日前，將三角函數學習現況調查研究試卷（前測）考卷交付給協助幫忙的二十位高中教師，並請老師教授在第二章「三角函數的基礎概念」前，以 20 分鐘的時間讓學生施測，目的在於了解學生對於三角函數先備

知識的了解。

並於 95 年 3、4 月開始著手擬定「三角函數學習現況調查研究試卷（後測）」與「九年一貫實施後學生進入高中學習三角函數現況之教師意見訪談大綱」。在擬定三角函數學習現況調查研究試卷（後測）時，參考文獻、教科書與坊間參考書，了解學生容易犯錯的錯誤類型有哪些，並針對該類型出題，在出題時，先預設好該題的考試目標，即該題如果錯誤，學生所犯的錯誤類型也同時確定，經過不斷的修改後，並給予三角函數學習現況調查研究試卷（後測）預試，預試的時間、對象如下：

1. 第一次預試

目的：瞭解題目的字句是否順暢與題意是否可以清晰瞭解。

對象：國立中央大學數學研究所的研究生四名。

施測時間：30 分鐘。

測驗結果：修改部分字句後，讓高中生施測。

2. 第二次預試

目的：瞭解題目的難易度。

對象：桃園地區的三所高中（中壢、平鎮、光仁）的四名高三學生。

施測時間：30 分鐘。

測驗結果：將較難的題目稍做修改，並將題意修改的更清楚。

3. 信度測試

將擬訂的後測試卷，做信度檢定（事後補做）。詳細的結果將在 4.2.1 節中敘述。

4. 正式施測

在各高中第二次段考後，到學校向二十位教師借閱第二次段考考卷，同時交付給高中教師三角函數學習現況調查研究試卷（後測），請老師於教授完三角函數單元後，當作一次小考考卷施測，施測時間 30 分鐘。並在同時交付給高

中教師「九年一貫實施後學生進入高中學習三角函數現況之教師意見訪談大綱」，讓老師可以初步了解本研究欲訪談之內容。

然後在 95 年 7、8 月，一一翻閱三大領域的大學用書，以其可以找出在哪些章節使用到三角函數，並且使用了三角函數的哪些部分。且在 95 年 8 月著手擬定「大學生在各科系學習或各領域所需三角函數相關知識的多寡」，並於 9 月發放到國立中央大學校內的六個大學系所的教授共 164 位教授。

詳細地擬定「三角函數學習現況調查研究試卷（前、後測）」、「九年一貫實施後學生進入高中學習三角函數現況之教師意見訪談大綱」與「大學生在各科系學習或各領域所需三角函數相關知識的多寡」的時間表如下。

表 3-4-1 時間流程表

日程	調查活動主題	活動內容說明	備註
95 年 2 月	擬定前測	擬定施測用前測，並先進行預試及考卷修改。	
	情商學校老師協助	情商 20 位老師、班級幫助，以便順利進行前、後測與教師訪談。	為瞭解九年一貫前與後之學生差異，希望 94 學年度為高一的數學教師，而且在近三年內有另一次高一數學的教授經驗。
	前測預試	透過兩次預試，讓前測的修辭、題型更接近於高中學生平時試卷的感覺。	第一次預試：國立中央大學五位研究生。 第二次預試：三所高中的三位高中生。
95 年 3 月		於學校老師正式教	請學校老師安排約 20 分鐘施

17日之前	前測	授三角函數課程之前，做相關之事的學前測驗。	測，由我們收回閱卷並記錄。 詳細施測時間以各高中學校課程進度調整。
95年三、四月	擬定後測	擬定施測用後測，並先進行預試及考卷修改。	
	擬定老師訪談稿	擬定之後訪談老師用訪談稿，以便瞭解94學年度高一學生之學習狀況。	
	後測預試	透過兩次預試，讓後測的修辭、題型更接近於高中學生平時試卷的感覺。	第一次預試：國立中央大學五位研究生。 第二次預試：三所高中的四位高中生。 信度測試：大直101班（事後補做）。
各高中第二次段考後		借閱第二次段考考卷	於學生檢討完後借閱並影印，以便日後分析。
		回收前測考卷。	
95年6月23日之前	後測	於學校老師教授完畢正弦與餘弦定理、三角函數之圖形、應用（測量）、反三角函數等課程後，做三角函數的	請老師在第三次段考前以30分鐘當作一次小考考卷施測。 詳細施測時間以各高中學校課程進度調整。

		學後測驗。	
各高中第三次段考後		借閱第三次段考考卷。	於學生檢討完後借閱並影印，以便日後分析。
		回收後測考卷。	
95年6月19-30日	訪談老師	就學生學習三角函數情況進行約30分鐘訪談。	
95年7、8月	翻閱大學用書	就三大領域的大學用書逐一翻閱，看看哪些章節使用到三角函數，並且使用了三角函數的哪些部分，以期可以了解大學生所需的三角函數內容。	<ul style="list-style-type: none"> • 微積分 Thomas' Calculus (11E)。 Instructor' s Solutions Manual Part 1 & Part 2。 Larson and Edwards, Calculus。 • 統計 D. D. Wackerly, W. Mendenhall III and R. L. Scheaffer, Mathematical Statistics with Applications。 • 線性代數 B. Kolman and D. R. Hill, Elementary Linear Algebra。
	大學生在各科系學習或各領域所需三角函數相關知識的	擬定問卷，以便發放給六個系所的教授。	
95年9月	多寡	發放與回收問卷。	

其中，一開始發放大學教授問卷時，期盼可以有 30% 以上的回收率。也就是在 164 位教授中，期盼可以回收 50 份問卷以上。但是因為問卷的發放在學期開始之初，所以一開始的回收率並不佳。原本改以電話訪談的方式，但也因為難以預測各教授的時間，而常常不得其門而入，之後嘗試了以電子郵件的方式，將問卷夾帶在附檔中，終於得到大部分教授的青睞，得到了較好的回收率。最後問卷回收有 55 份，生命科學學系 10 份（回收率達 50%）。化學學系 9 份（回收率達 47%）。企業管理學系 9 份（回收率達 24%）。資訊管理學系 13 份（回收率達 31%）。財務金融學系 9 份（回收率達 29%）。經濟學系 5 份（回收率達 33%）。

3.5 資料處理與統計

在回收所有問卷後，依照性質的不同，做了以下的處理方法。

- 前後測試卷：依照所回收的「三角函數學習現況調查研究試卷（前測）」與「三角函數學習現況調查研究試卷（後測）」，依照坐號一一排列，並將坐號未同時出現在兩份試卷中的學生剔除。因為要透過前測與後測的交互比較，所以將未同時出現在兩份試卷中的試卷視為無效試卷。剔除後的各校有效樣本數如下：

表 3-5-1 各校人數與有效之前、後測試卷數

學校 \ 人數	總班級數	回收問卷總數	有效問卷
台北市立大直高中	3	103	98
台北市立成功高中	4	170	166
台北市立萬芳高中	4	159	137
台北縣私立徐匯高中	2	100	65
桃園縣私立六和高中	4	185	174
新竹市立香山高中	3	112	98
總計	20	829	738

並利用 Excel 軟體，依班級將試卷中的答案的對與錯一一輸入，以便於將來作統計之用；其中「三角函數學習現況調查研究試卷（後測）」一卷中的選擇題第六題為複選題，所以將答錯兩個選項（含兩個）以上的視為錯誤；而回答時空白亦視為錯誤。

- 各校段考、期末考試卷：將回收的段考與期末考試卷，依照坐號排列，將無法辨別其坐號或影印試卷過於模糊不清者剔除，不納入本研究的樣本內。因回收的試卷皆為老師批改後的試卷，所以在輸入對與錯時，以老師的批卷為準。若試題為複選題者，將答錯兩個選項（含兩個）以上的視為錯誤；而回答時空白亦視為錯誤；若試題為簡答題，則以老師的給分為準，該題得分未達該題總分的三分之二者視為錯誤。二十個班級的段考與期末考考卷都以此標準將其輸入為 Excel 檔，以便統計之用。各校之段考與期末考考卷回收與有效試卷數如下表。

表 3-5-2 各校段考、期末考有效試卷數

學校 \ 人數	總班級數	各班人數	期中考 有效試卷	期末考 有效試卷
台北市立大直高中	3	103	99	98
台北市立成功高中	4	170	159	169
台北市立萬芳高中	4	159	139	155
台北縣私立徐匯高中	2	100	99	97
桃園縣私立六和高中	4	185	183	170
新竹市立香山高中	3	112	104	103
總計	20	829	783	792

- 高中教師訪談：依照「九年一貫實施後學生進入高中學習三角函數現況之教師意見訪談大綱」為原則，訪談二十位高中教師時，皆先取得教師同意將訪談內容全程錄音，訪談完畢後再將其錄音依照逐字稿原則依序完成其逐字稿（附錄五）。
- 大學教授問卷：依照「大學生在各科系學習或各領域所需三角函數相關知識的多寡」的之問卷，回收完畢後，依其系所分類並統計各教授的填答選項，以及開放式問題中教授的答案，一一記錄。各系所回收問卷數如下：

表 3-5-3 各系教授問卷回收數

系所名稱		系所教授人數	回收人數
理 學 院	化學學系	19	9
	生命科學學系	20	10
管 理 學 院	企業管理學系	37	9
	資訊管理學系	42	13
	財務金融學系	31	9
	經濟學系	15	5
總計		164	55

- 大學用書部分：以教育研究者常用的「內容分析法」進行五冊大學用書的翻閱。並依照研究者張琇涵（2006）的論文中，表 4-2-5 的十年級教材台灣部分所列出的台灣教材中所學的三角函數課題，設計成一份三角函數檢核表。依此檢核表，翻閱三大領域用書時，將所提到的三角函數分類。三角函數檢核表如下：

表 3-5-4 三角函數檢核表

銳角三角函數值的定義	利用做圖法求三角函數	倒數關係
商數關係	平方關係	畢氏定理求三角函數值
餘角關係	簡易的三角函數測量	如果使用三角函數值表
電算器求三角函數值	同界角	廣義角的三角函數值
化(- θ)為 θ 的三角函數	180°和 θ 的角度關係	360°和 θ 的角度關係
270°和 θ 的角度關係	三角形面積公式	海龍公式
正弦定理	正弦定理與外接圓半徑	餘弦定理
基本三角測量	弧度	扇形的弧長與面積
三角函數的圖形及特性	餘弦函數的和角公式	餘弦函數的差角公式
正弦函數的和角公式	正弦函數的差角公式	正切函數的和差角公式
二倍角公式	半角公式	積化和差公式
和差化積公式	正餘弦函數的疊合	反正弦函數
反餘弦函數	反正切函數	複數的極式
其他(三角函數的微分與積分)		內積的定義

各方面皆依上述做資料上的處理與統計，以便於作資料的分析，也依此步驟做好本研究的事前處理準備。

第4章 研究結果分析

本章旨在探討在高一學生學完三角函數相關課題之後，對於三角函數的錯誤類型到底有哪些。利用「三角函數學習現況調查研究試卷（後測）」（底下簡稱後測）找出所有學生在後測上的錯誤類型，為避免後測的題型不足，更加以分析各學校之段考與期末考試卷，增加其資料來源；目的在於找出學生易犯錯或容易誤解的觀念題型。在尋找錯誤題型當中，本研究選定以答對率四捨五入至整數後未達60%，則該題型即為錯誤類型；選定60%，除了是因為一般在成績批閱上以60分為及格的一項習慣之外，也因為教育部曾在九年一貫實施時說，希望透過九年一貫的實施，目標是可以讓八成的學生都學的會；也因為這樣所以選定比教育部的標準稍低的情況下，來作為探討錯誤類型的標準。

找出其錯誤題型之後，與2.2.3節中所整理之三角函數錯誤類型相關文獻加以比較，檢驗九十四學年度這一屆是否因為課程的改變、教育制度的改變與地區上的不同而有不一樣的變化。就此來分析三角函數課題對高一學生是否容易學習或太過於艱深。

再利用「三角函數學習現況調查研究試卷（前測）」（以下簡稱前測）中三角函數的基本性質部分，來探討學生是否在學校進度前先學習了三角函數的部分基礎知識。利用這份資料，將學生分成三大類-先學過（高分組）、未先學過（低分組）與介於其中的學生，再探討先學過的學生與未先學過的學生在後測的表現又有怎樣的變化。

為了上述之目標，本研究將考卷的分析闡述如下，第一節先討論「三角函數學習現況調查研究試卷（前、後測）」這兩份試卷的分析結果。第二節討論各校的段考與期末考的分析結果。第三節討論其他問卷-高中教師訪談稿、大學教授問卷與大學用書分析。

4.1 前、後測試題結果之分析

在 4.1 中，我們希望可以找到後測的錯誤類型，以及利用前測將學生成為兩大類—先學過與未先學過者，再找出這兩大類學生在後測是否有學習成效上的差異。所以分成四小節 4.1.1 後測的錯誤題型-全體、4.1.2 後測的錯誤類型-各校、4.1.3 高、低分組的錯誤題型與 4.1.4 高、低分組的學習成效分述如下。

4.1.1 後測的錯誤類型-全體

首先，希望可以先找出每位學生在測驗同一份試卷時的錯誤類型有哪些。所以本研究先利用後測，將二十個班級的學生資料中的有效試卷（共 738 份試卷）綜合分析整理出各題的答對率。因為在編寫「三角函數學習現況調查研究試卷(後測)」這份試卷時，即以預設了該題錯誤時，學生的錯誤類型，所以透過這份試卷的答對率，可以清楚的看出哪些題型的答對率偏低。各題的答對率如下：

表 4-1-1 後測答對率-全體（738 人）

選擇題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
1		銳角角度比較大小	522	71%
2		基本三角測量	285	39%
3		三角函數值的定義	561	76%
4		象限角與函數的增減關係	368	50%
5		反三角函數	438	59%
6			405	55%
填充題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
題號	小題			
1	1	三角函數的定義與倒數關係	251	34%

	2		118	16%
2		三角函數的定義應用	417	57%
3	1	廣義角求值	549	74%
	2		486	66%
	3		392	53%
4		角度與弧度	546	74%
5	1	三角函數的定義與和角公式	340	46%
	2		231	31%
6	1	平方關係	574	78%
	2	商數關係	563	76%
簡答題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
1		三角函數的圖形	149	20%
2		平方關係	363	49%
3		和差化積公式	346	47%

★ 透過以上表格的陳述，可以看到答對率最低的為填充題第一題的第二格，該題的題目為：

1. 若 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，請問餘弦函數值 $\cos \theta$ 的範圍為何？_____。

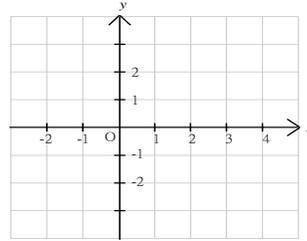
正割函數值 $\sec \theta$ 的範圍又為何？_____。

該題是在探討在第一象限內 $\sec \theta$ 的範圍為何；在第一格時，以 $\cos \theta$ 的代入，希望可以透過倒數關係推導出 $\sec \theta$ 的範圍。 $\cos \theta$ 範圍的答對率有 34%，是 $\sec \theta$ 答對率的兩倍之多（16%），但 $\cos \theta$ 的範圍答對率卻也是第四低。推測其中的原因除了學生在學習三角函數時，並未了解銳角三角函數的範圍值，尤其是用弧度量時；甚至可推測出學生比較了解 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 與 $\tan \theta$ ，對於 $\cot \theta$ 、 $\sec \theta$ 與 $\csc \theta$ 的了解相當薄弱。也並未學習到如何在建立起 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 與 $\tan \theta$ 等相關概念

後，利用倒數關係或其他的恆等式，去推敲出 $\cot \theta$ 、 $\sec \theta$ 與 $\csc \theta$ 的關係。

★答對率第二低為簡答題的第一題，題目如下：

1. 試草繪 $\frac{3}{2}\sin(\pi\theta)$ 的圖形。



該題的答對率僅有 20%，所以可以看出學生在學習三角函數時，對於圖形的概念相當缺乏，這是一個屬於 $\sin \theta$ 系列的函數，只要透過週期與振幅的改變即可繪出。但是正確繪出的同學僅有 149 人（全體 738 人），所以可以看出學生在學習三角函數的圖形上是一知半解的，只有少數人有代數與幾何的連結。

★答對率第三低的題目為填充題第五題的第二格，其中第一格的答對率亦未達 60%，僅有 46%，屬於答對率第六低的題目。題目如下：

5. 設 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ ， $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\tan \beta = \frac{12}{5}$ ，則 $\sin \beta =$ _____，
 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____。

第一格（46%）僅需利用三角函數的基本定義，繪出一個直角三角形，並利用 $\tan \theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$ ，還有 $\sin \beta$ 在第三象限的正負性質即可答對，所以屬於三角函數的定義問題；而第二格（31%）則屬於和角公式的範圍，僅需利用和角公式代入其值即可，這兩格以題目的屬性來說並不難，但是卻有相當多的同學錯誤或者空白，屬於定義與公式不清楚的題型。

★答對率第四低的題目與答對率最低的題目屬於同一個題組，所以在此便不再多加敘述。

★答對率第五低的題目為選擇題第二題，題目如下：

- () 2. 在兩塔的塔腳所連之線段的中點，測得兩塔的塔頂之仰角各為 60° 與 30° ，則一塔高為另一塔的 (A)3 倍 (B)2 倍 (C) $\sqrt{3}$ 倍 (D) $\sqrt{2}$ 倍。

這一題是屬於基本三角測量中的題型，利用 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 的特殊三角形，將兩塔的高度求出。這一題的答對率僅有 39%，換言之在 738 人當中僅有 285 人答對。以南一課本為例，基本三角測量屬於高一數學課本中第二章的第六節，在教科書中，明列出利用特殊角與三角函數值表，去解決出生活中實例的測量問題，在課文內容中，也枚舉了數個利用特殊角三角形的基本三角測量題型。所以此題屬於課內基本題，但是答對的學生卻不到 40%，可知學生對測量題的熟練度仍不足。

★答對率第六低的是填充題第五題的第一格，因為與第五題的第二格屬於同一個題組，而第五題的第二格為答對率第三低，所以在之前已闡述過，在此就不再贅述。

★答對率第七低的是簡答題的第三題，題目如下：

4. 試求 $\sin 100^\circ + \sin 150^\circ + \sin 210^\circ + \sin 260^\circ$ 之值。

此題是屬於和差化積公式的應用，解題的方式如下：

原式 = $(\sin 100^\circ + \sin 260^\circ) + (\sin 150^\circ + \sin 210^\circ)$ ，先將其配對後，再利用和差化積的公式，即可得到特殊角 $\sin 180^\circ = 0$ ，使得原式整個為 0。這一題的重點在於是否知道利用和差化積的公式，並且知道把角度稍做配對，讓利用公式後的結果可以更快的被看出。在南一課本中，有一題這樣的題目：

$\sin 72^\circ + \sin 144^\circ + \sin 216^\circ + \sin 288^\circ$ ，與本題為相同之題型，而且本題的數字更為簡化，所以可以看出本題是屬於課內應會之題型，但是答對的學生僅有 47%，不到一半的學生，可見在這方面學生的數學能力仍稍嫌不足。值得玩味的是，這

一道計算題比 $\cos \theta$ 範圍那種基本定義難得多，但是答對率卻還稍高。

★答對率第八低的題目為簡答題第二題，題目如下：

2. 試求 $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ$ 之值。

本題所考驗的題型為平方關係，利用 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 的恆等式與餘角關係，即可輕易求出該題答案。在南一課本第二章第二節中有相同的題目，所以本題也是屬於課內題型，但是答對的同學仍不到一半，僅 49%，可見學生在練習平方關係時，仍不夠小心，推測在課內習題時，學生可以模仿該題之類題去做演練，但是當該題獨立時，學生卻找不出該題的解題策略，所以學生的練習仍不足。

★答對率第九低的題目為選擇題第四題，題目如下：

() 4. 設 $a = \sin 1$ ， $b = \sin 2$ ， $c = \sin 3$ ， $d = \sin \frac{\pi}{2}$ ，則 (A) $d > a > b > c$ (B) $d > a > c > b$
(C) $d > b > a > c$ (D) $d > b > c > a$ 。

這一題是屬於象限角與函數的增減關係的題型，這一題對學生來說比較難的在於 $a = \sin 1$ 而非 $a = \sin 1^\circ$ ，學生容易搞混其關係，如果對角度等關係可以了解的更加清晰，這題就僅在討論其大小關係，這一題的答對率恰好為 50%，答對人數為 738 人中的 368 人，所以對角度等關係仍有一半的學生需再加強。

★答對率第十低的題目為填充題第三題的第三小題，題目如下：

3. 寫出下列各三角函數的值：(1) $\sin(-90^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2) $\cos 900^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
(3) $\sec 540^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

這一題的題型主要是在探討廣義角求值的問題，第一小題的答對率為 74%，第二小題的答對率為 66%，第三小題的答對率為 53%，可以看出第三小題的答對率明顯的較低，在廣義角求值的題型中， $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ 中，答對率明顯的較 $\sec \theta$ 為高，推測是因為學生對 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 與 $\tan \theta$ 較為熟悉，對於 $\cot \theta$ 、 $\sec \theta$ 與 $\csc \theta$

的了解相對之下較為薄弱，但卻不熟悉如何恆等式將其轉換為 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 與 $\tan \theta$ ，所以在這方面仍須加強。

★答對率第十一低的為選擇題第六題，題目如下：

- ()6. 下列何者有意義？（複選）(A) $\sin^{-1}(-2)$ (B) $\sin^{-1} \frac{3}{4}$ (C) $\sin^{-1} \pi$
(D) $\sin^{-1} \frac{\pi}{4}$ (E) $\sin^{-1}(-\frac{2}{5})$ 。

這一題是探討反三角函數的範圍與意義，屬於反三角函數的題型，學生的答對率為 55%，推測應為學生在學習反三角函數時，對反三角函數的概念不甚熟悉，僅止於如何計算反三角函數，但是對於反三角函數應有的函數範圍卻不了解，所以造成對常用的 $\sin^{-1} \theta$ 範圍仍不熟悉。

★答對率第十二低的為填充題第二題，題目如下：

2. 設 θ 是銳角，且 $\cot \theta = \frac{12}{5}$ ，則 $\sin \theta - \cos \theta$ 之值為_____。

本題只需繪出一個直角三角形，並將 $\cot \theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$ 或者 $\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$ 將值代入直角三角形中，並利用畢氏定理，即可將 $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ 求出；所以本題屬於三角函數的定義應用，然而本題的答對率為 57%，所以許多學生對應用之題型訓練仍不足。

★答對率第十三低的為選擇題第五題，題目如下：

- ()5. $\sin(\cos^{-1} \frac{3}{5}) =$ (A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{6}{5}$ 。

本題亦為探討反三角函數的題型，利用反三角函數的計算即可輕易求出本題之解。本題的答對率為 59%，比選擇題第六題的反三角函數題型較好，可以再次驗證學生對於反三角函數的計算優於對反三角函數範圍不了解的看法，所以可知大部分學生會計算但是卻不了解其中的意義，所以應加強反三角函數觀念的學

習。

所以可以整理出答對率未達 60%的題型有十三組題型，將這十三組題型的題號、測驗目標與答對率表列在下：

表 4-1-2 錯誤類型-全體（738 人）

百分比（低於 60%）	題號	測驗目標
11%~20%	填充題 1(2) 簡答題 1	三角函數的定義與倒數關係 三角函數的圖形
31%~40%	選擇題 2 填充題 1(1) 填充題 5(2)	基本三角測量 三角函數的定義與倒數關係 三角函數的定義與和角公式
41%~50%	選擇題 4 填充題 5(1) 簡答題 2 簡答題 3	象限角與函數的增減關係 三角函數的定義與和角公式 平方關係 和差化積公式
51%~60%	選擇題 5 選擇題 6 填充題 2 填充題 3(3)	反三角函數 反三角函數 三角函數的定義應用 廣義角求值

透過上表，可以看出在後測的錯誤類型中以「三角函數的定義與倒數關係」、「三角函數的圖形」、「基本三角測量」、「三角函數的定義與和角公式」、「象限角與函數的增減關係」、「平方關係」、「和差化積公式」、「反三角函數」、「三角函數的定義應用」與「廣義角求值」，這九大測驗目標是學生較容易出錯的部分，教師在教學上亦可多做加強。

4.1.2 後測的錯誤類型-各校

在上一小節中，本研究探討了全體 738 份有效問卷中，在後測的錯誤類型共有上述之題型。在本節，想要探討的是，若將 738 份有效問卷，分成以各校來探討，在後測的錯誤題型上會不會有所差異。各校的有效問卷數如下：

表 4-1-3 各校人數與後測之有效試卷數

學校	人數	總班級數	回收問卷總數	有效問卷
台北市立大直高中		3	103	98
台北市立成功高中		4	170	166
台北市立萬芳高中		4	159	137
台北縣私立徐匯高中		2	100	65
桃園縣私立六和高中		4	185	174
新竹市立香山高中		3	112	98
總計		20	829	738

利用這些有效問卷數，本研究將各校的各題答對率與答對率未達 60% 的錯誤題型，以校的方式，分別表列如下，最後再提出對其之探討。

- 台北市立大直高中

台北市立大直高中的有效問卷數為 98 份，分別將各題的答對率表列如下：

表 4-1-4 後測答對率-大直高中

選擇題	測驗目標	答對總人數	答對百分比
1	銳角角度比較大小	84	86%
2	基本三角測量	56	57%
3	三角函數值的定義	80	82%

4		象限角與函數的增減關係	66	67%		
5		反三角函數	84	86%		
6			75	77%		
填充題		測驗目標	答對總人數	答對百分比		
題號	小題					
1	1	三角函數的定義與倒數關係	55	56%		
	2		22	22%		
2		三角函數的定義應用	71	72%		
3	1	廣義角求值	92	94%		
	2		85	87%		
	3		76	78%		
4		角度與弧度	79	81%		
5	1	三角函數的定義與和角公式	70	71%		
	2		57	57%		
6	1	平方關係	89	91%		
	2	商數關係	88	90%		
簡答題		測驗目標	答對總人數	答對百分比		
1	三角函數的圖形				25	26%
2	平方關係				66	67%
3	和差化積公式				75	77%

從上表列可以看出答對率四捨五入後未達 60%的題型有五題，分別將其表列如下：

表 4-1-5 錯誤題型-大直高中

百分比(低於 60%)	題號	測驗目標
21%~30%	填充題 1(2)	三角函數的定義與倒數關係
	簡答題 1	三角函數的圖形
51%~60%	選擇 2	基本三角測量
	填充題 1(1)	三角函數的定義與倒數關係
	填充題 5(2)	三角函數的定義與和角公式

• 台北市立成功高中

台北市立成功高中的有效問卷數為 166 份，分別將各題的答對率表列如下：

表 4-1-6 後測答對率-成功高中

選擇題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
1		銳角角度比較大小	150	90%
2		基本三角測量	109	66%
3		三角函數值的定義	147	89%
4		象限角與函數的增減關係	116	70%
5		反三角函數	143	89%
6			126	76%
填充題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
題號	小題			
1	1	三角函數的定義與倒數關係	114	69%
	2		68	41%
2		三角函數的定義應用	111	67%
3	1	廣義角求值	148	89%

	2		141	85%
	3		131	79%
4		角度與弧度	134	81%
5	1	三角函數的定義與和角公式	114	69%
	2		71	43%
6	1	平方關係	138	83%
	2	商數關係	133	80%
簡答題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
1		三角函數的圖形	80	48%
2		平方關係	112	67%
3		和差化積公式	114	69%

從上表列可以看出答對率四捨五入後未達 60%的題型有三題，分別將其表列如下：

表 4-1-7 錯誤題型-成功高中

百分比（低於 60%）	題號	測驗目標
40%~50%	填充 1(2)	三角函數的定義與倒數關係
	填充 5(2)	三角函數的定義與和角公式
	簡答 1	三角函數的圖形

• 台北市立萬芳高中

台北市立萬芳高中的有效問卷數為 137 份，分別將各題的答對率表列如下：

表 4-1-8 後測答對率-萬芳高中

選擇題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
1		銳角角度比較大小	112	82%
2		基本三角測量	67	49%
3		三角函數值的定義	109	80%
4		象限角與函數的增減關係	60	44%
5		反三角函數	100	73%
6			94	69%
填充題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
題號	小題			
1	1	三角函數的定義與倒數關係	45	33%
	2		16	12%
2		三角函數的定義應用	87	64%
3	1	廣義角求值	120	88%
	2		101	74%
	3		89	65%
4		角度與弧度	98	72%
5	1	三角函數的定義與和角公式	54	39%
	2		36	26%
6	1	平方關係	116	85%
	2	商數關係	113	82%

簡答題	測驗目標	答對總人數	答對百分比
1	三角函數的圖形	31	23%
2	平方關係	73	53%
3	和差化積公式	23	56%

從上表列可以看出答對率四捨五入後未達 60%的題型有九題，分別將其表列如下：

表 4-1-9 錯誤題型-萬芳高中

百分比（低於 60%）	題號	測驗目標
11%~20%	填充 1(2)	三角函數的定義與倒數關係
21%~30%	填充 5(2) 簡答 1	三角函數的定義與和角公式 三角函數的圖形
31%~40%	填充 1(1) 填充 5(1)	三角函數的定義與倒數關係 三角函數的定義與和角公式
41%~50%	選擇 2 選擇 4	基本三角測量 象限角與函數的增減關係
51%~60%	簡答題 2 簡答題 3	平方關係 和差化積公式

• 台北縣私立徐匯高中

台北縣私立徐匯高中的有效問卷數為 65 份，分別將各題的答對率表列如下：

表 4-1-10 後測答對率-徐匯高中

選擇題	測驗目標	答對總人數	答對百分比
1	銳角角度比較大小	50	77%
2	基本三角測量	17	26%

3		三角函數值的定義	48	74%
4		象限角與函數的增減關係	29	45%
5		反三角函數	39	60%
6			31	48%
填充題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
題號	小題			
1	1	三角函數的定義與倒數關係	6	9.2%
	2		2	3.1%
2		三角函數的定義應用	22	34%
3	1	廣義角求值	42	65%
	2		35	54%
	3		20	31%
4		角度與弧度	42	65%
5	1	三角函數的定義與和角公式	17	26%
	2		18	28%
6	1	平方關係	41	63%
	2	商數關係	41	63%
簡答題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
1		三角函數的圖形	2	3.1%
2		平方關係	18	28%
3		和差化積公式	16	25%

從上表列可以看出答對率四捨五入後未達 60%的題型有十三題，分別將其表列如下：

表 4-1-11 錯誤題型-徐匯高中

百分比(低於 60%)	題號	測驗目標
低於 10%	填充 1(1)	三角函數的定義與倒數關係
	填充 1(2)	三角函數的定義與倒數關係
	簡答 1	三角函數的圖形
21%~30%	選擇 2	基本三角測量
	填充 5(1)	三角函數的定義與和角公式
	填充 5(2)	三角函數的定義與和角公式
	簡答 2	平方關係
	簡答 3	和差化積公式
31%~40%	填充 2	三角函數的定義應用
	填充 3(3)	廣義角求值
41%~50%	選擇 4	象限角與函數的增減關係
	選擇 6	反三角函數
51%~60%	填充題 3(2)	廣義角求值

• 桃園縣私立六和高中

桃園縣私立六和高中的有效問卷數為 174 份，分別將各題的答對率表列如下：

表 4-1-12 後測答對率-六和高中

選擇題	測驗目標	答對總人數	答對百分比
1	銳角角度比較大小	90	52%
2	基本三角測量	26	15%
3	三角函數值的定義	116	67%
4	象限角與函數的增減關係	73	42%

5		反三角函數	49	28%
6			27	16%
填充題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
題號	小題			
1	1	三角函數的定義與倒數關係	21	12%
	2		7	4%
2		三角函數的定義應用	95	55%
3	1	廣義角求值	102	59%
	2		89	51%
	3		55	32%
4		角度與弧度	122	70%
5	1	三角函數的定義與和角公式	60	34%
	2		34	20%
6	1	平方關係	130	75%
	2	商數關係	132	76%
簡答題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
1		三角函數的圖形	8	4.6%
2		平方關係	57	33%
3		和差化積公式	34	20%

從上表列可以看出答對率四捨五入後未達 60%的題型有十六題，分別將其表列如下：

表 4-1-13 錯誤題型-六和高中

百分比(低於 60%)	題號	測驗目標
低於 10%	填充題 1(2) 簡答題 1	三角函數的定義與倒數關係 三角函數的圖形
11%~20%	選擇 2 選擇 6 填充 1(1) 填充 5(2) 簡答 3	基本三角測量 反三角函數 三角函數的定義與倒數關係 三角函數的定義與和角公式 和差化積公式
21%~30%	選擇 5	反三角函數
31%~40%	填充 3(3) 填充 5(1) 簡答 2	廣義角求值 三角函數的定義與和角公式 平方關係
40%~50%	選擇 4	象限角與函數的增減關係
51%~60%	選擇題 1 填充題 2 填充題 3(1) 填充題 3(2)	銳角角度比較大小 三角函數的定義應用 廣義角求值 廣義角求值

• 新竹市立香山高中

新竹市立香山高中的有效問卷數為 98 份，分別將各題的答對率表列如下：

表 4-1-14 後測答對率-香山高中

選擇題	測驗目標	答對總人數	答對百分比
1	銳角角度比較大小	36	37%
2	基本三角測量	10	10%

3		三角函數值的定義	61	62%
4		象限角與函數的增減關係	24	24%
5		反三角函數	23	23%
6			52	53%
填充題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
題號	小題			
1	1	三角函數的定義與倒數關係	10	10%
	2		3	3.1%
2		三角函數的定義應用	31	32%
3	1	廣義角求值	45	46%
	2		35	36%
	3		21	21%
4		角度與弧度	71	72%
5	1	三角函數的定義與和角公式	25	26%
	2		15	15%
6	1	平方關係	60	61%
	2	商數關係	56	57%
簡答題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
1		三角函數的圖形	3	3.1%
2		平方關係	37	38%
3		和差化積公式	30	31%

從上表列可以看出答對率四捨五入後未達 60%的題型有十七題，分別將其表列如下：

表 4-1-15 錯誤題型-香山高中

百分比(低於 60%)	題號	測驗目標
低於 10%	選擇 2 填充 1(1) 填充 1(2) 簡答 1	基本三角測量 三角函數的定義與倒數關係 三角函數的定義與倒數關係 三角函數的圖形
11%~20%	填充 5(2)	三角函數的定義與和角公式
21%~30%	選擇 4 選擇 5 填充 3(3) 填充 5(1)	象限角與函數的增減關係 反三角函數 廣義角求值 三角函數的定義與倒數關係
31%~40%	選擇 1 填充 2 填充 3(2) 簡答 2 簡答 3	銳角角度比較大小 三角函數的定義應用 廣義角求值 平方關係 和差化積公式
41%~50%	填充 3(1)	廣義角求值
51%~60%	選擇題 6 填充題 6(2)	反三角函數 商數關係

並將上述各校的錯誤類型，整理如下表：

表 4-1-16 錯誤類型-綜合討論

題號	測驗目標	學校
選擇題 1	銳角角度比較大小	六和、香山
選擇題 2	基本三角測量	大直、萬芳、徐匯、六和、香山

選擇題 4	象限角與函數的增減關係	萬芳、徐匯、六和、香山
選擇題 5	反三角函數	六和、香山
選擇題 6	反三角函數	徐匯、六和、香山
填充題 1(1)	三角函數的定義與倒數關係	大直、萬芳、徐匯、六和、香山
填充題 1(2)	三角函數的定義與倒數關係	大直、成功、萬芳、徐匯、六和、香山
填充題 2	三角函數的定義應用	徐匯、六和、香山
填充題 3(1)	廣義角求值	六和、香山
填充題 3(2)	廣義角求值	徐匯、六和、香山
填充題 3(3)	廣義角求值	徐匯、六和、香山
填充題 5(1)	三角函數的定義與和角公式	萬芳、徐匯、六和、香山
填充題 5(2)	三角函數的定義與和角公式	大直、成功、萬芳、徐匯、六和、香山
填充 6(2)	商數關係	香山
簡答題 1	三角函數的圖形	大直、成功、萬芳、徐匯、香山
簡答題 2	平方關係	萬芳、徐匯、六和、香山
簡答題 3	和差化積公式	萬芳、徐匯、六和、香山

從上述的表格中，比較特別的是填充題第一題第二格與填充題第五題第二格中，六校的答對率均未到達 60%，但兩題卻是屬於三角函數的定義與倒數關係，與三角函數的定義與和角公式等基礎的題型。另外可以看出各校的錯誤類型幾乎與全體的錯誤類型差不多，比較不一樣的是增加了：選擇題第一題「銳角角度比較大小」；填充題第三題的第一與第二小題「廣義角求值」，其中更以第二小格的錯誤率較第一小格低，所以可以看出學生對 $\sin \theta$ 比 $\cos \theta$ 來的熟悉；以及填充題第六題的第二小題，該題是在探討「商數關係」。在全體的錯誤題型中探討填充

題第三題的第三小格時，已順帶探討第一小格與第二小格的關係。所以在此分別探討選擇題第一題與填充題第六題。

★選擇題第一題的題目如下：

- () 1. 設 $a = \sin 50^\circ$ ， $b = \cos 50^\circ$ ， $c = \tan 50^\circ$ ，其大小順序為 (A) $a > b > c$
(B) $c > a > b$ (C) $a > c > b$ (D) $b > c > a$ 。

這一題主要在探討銳角角度比較大小，在同樣是 50° 的情況下，探討 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 與 $\tan \theta$ 的大小，本題為銳角三角函數的遞增與遞減應用，屬於基本的三角函數應用題型。本題在全體的答對率為 71%，所以以全體學生來說本題的表現尚屬不錯。

★填充題的第六題的題目如下：

6. 已知 θ 為銳角且 $\sin \theta = \frac{5}{6}$ ，試求 $\cos \theta =$ _____， $\tan \theta =$ _____。

本題的第一小題僅需利用平方關係即可求出，求出第一小題之後利用商數關係即可求出第二小題，所以本題的錯誤說明了學生對恆等式應用不熟悉。在全體的答對率中，第一小題的答對率為 78%，而第二小題的答對率為 76%，所以全體學生的表現也還不錯。

在全教會的資料中，得知以 94 學年度北區公立高中的排名順序為：成功（最低錄取分數 268）、大直（最低錄取分數 256）、萬芳（最低錄取分數 229）。而在後測的錯誤類型題數裡，可以清楚的看見，成功的錯誤題數為三題，大直的錯誤題數為五題包括成功的三題，而萬芳的錯誤題數為九題包括大直的五題，所以後測的資料也與當年的入學成績排名相吻合，所以可以得知學生在數學上的學習性向亦會影響之後的學習成效。

4.1.3 後測的錯誤類型-高低分組

在這一節中，想要探討的是透過前測的三角函數基本性質相關題型，可以將學生分類為提早接觸三角函數以及跟著學校進度接觸三角函數者，看看兩類的學生在後測的表現是否有所差異。

• 前測的分類

在「三角函數學習現況調查研究試卷（前測）」中，有一部份的試卷是用來測驗學生是否擁有三角函數的基本性質。當初在前測的發放時，是希望各班教師在教導三角函數相關知識之前，以做一個學前測驗的方式，讓學生經過前測的考試之後，再進行三角函數的相關教學。

所以，從前測三角函數基本性質試題中，可以看出哪些學生在學校教授三角函數相關知識前，已具備有三角函數的基本性質相關知識，也就是先學過三角函數且學會三角函數的相關基本知識。所以高分組即為先接觸三角函數且學會三角函數者。

透過這方法，將學生進行分類。首先，將三角函數基本性質中的題目，以格數為單位，共有 17 格，將每位學生的答對格數統計，並算出佔所有人數的百分比（四捨五入至整數位）。如下表：

表 4-1-17 前測之答對題數人數表

答對題數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
人數	137	48	65	41	19	32	24	14	20	19
百分比 (%)	19	7	9	6	3	4	3	2	3	3
答對題數	10	11	12	13	14	15	16	17	總計	
人數	17	21	18	11	30	32	34	156	738	
百分比 (%)	2	3	2	1	4	4	5	21		

從上表總共有全錯與答對 1~17 格的人數表，從上表可以看出，全錯與全對者所佔的人數最多，兩者百分比為 19%與 21%，也相當接近。依上表將試卷分為三類，以答對題數為 0~4 者為一類，稱為前測低分組；答對題數為 13~17 者為一類，稱為前測高分組；其餘中間族群則自為一類。所以前測低分組的總人數有 310 人，佔總人數的 42%；而前測高分組的總人數有 263 人，佔總人數的 36%；中間族群有 165 人，佔總人數的 22%。上述分法的依據是，儘量將各分類中所佔的題數切割為總題數的三分之一與維持高低分組的百分比儘量一致的情形下，經過多次調整而決定的。

選定了前測高低組的分類方法後，再依照前測中高分組與低分組的學號，依此學號將後測中的試卷亦分為高、低分組。例如：某校某班的 20 號同學在前測之三角函數性質中，答對題數為 15 題，則該生屬於前測高分組學生，亦即該生為在學校課程進度之前，已擁有三角函數基本性質的相關知識，則該生的後測試卷歸類於高分組的試卷，以便與分類為前測低分組的試卷做比較。

• 高低分組的錯誤類型

將後測的試卷分類為高、低分組之後，與前兩小節的分法一致，來探討高、低分組在後測的錯誤題型是否有所差異。以下列出高、低分組在後測的答對率，與答對率四捨五入至整數位後未達 60%的錯誤題型。

高分組共有 263 人，在後測各題的答對率如下：

表 4-1-18 後測答對率-高分組

選擇題	測驗目標	答對總人數	答對百分比
1	銳角角度比較大小	210	80%
2	基本三角測量	138	52%
3	三角函數值的定義	223	85%

4		象限角與函數的增減關係	154	59%
5		反三角函數	193	73%
6			189	72%
填充題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
題號	小題			
1	1	三角函數的定義與倒數關係	116	44%
	2		63	24%
2		三角函數的定義應用	159	61%
3	1	廣義角求值	221	84%
	2		187	71%
	3		168	64%
4		角度與弧度	217	83%
5	1	三角函數的定義與和角公式	157	60%
	2		113	43%
6	1	平方關係	218	83%
	2	商數關係	214	81%
簡答題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
1		三角函數的圖形	74	28%
2		平方關係	166	63%
3		和差化積公式	158	60%

從高分組的後測答對率中，整理出答對率未達 60%的題型如下：

表 4-1-19 錯誤題型-高分組

百分比(低於 60%)	題號	測驗目標
21%~30%	填充題 1(2) 簡答題 1	三角函數的定義與倒數關係 三角函數的圖形
40%~50%	填充題 1(1) 填充題 5(2)	三角函數的定義與倒數關係 三角函數的定義與和角公式
51%~60%	選擇題 2 選擇題 4 填充題 5(1)	基本三角測量 象限角與函數的增減關係 三角函數的定義與和角公式

所以高分組未達 60%的錯誤題數總共有七題，涵蓋六個測驗目標。

低分組的總人數為 310 人，低分組在後測答對率的整理如下：

表 4-1-20 後測答對率-低分組

選擇題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
1		銳角角度比較大小	209	67%
2		基本三角測量	101	33%
3		三角函數值的定義	216	70%
4		象限角與函數的增減關係	140	45%
5		反三角函數	164	53%
6			130	42%
填充題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
題號	小題	三角函數的定義與倒數關係	77	25%
1	1			
	2			

2		三角函數的定義應用	162	52%
3	1	廣義角求值	208	67%
	2		180	58%
	3		150	48%
4		角度與弧度	218	70%
5	1	三角函數的定義與和角公式	107	35%
	2		66	21%
6	1	平方關係	231	75%
	2	商數關係	227	73%
簡答題		測驗目標	答對總人數	答對百分比
1		三角函數的圖形	49	16%
2		平方關係	121	39%
3		和差化積公式	120	39%

從低分組的後測答對率中，整理出答對率未達 60%的題型如下：

表 4-1-21 錯誤題型-低分組

百分比（低於 60%）	題號	測驗目標
11%~20%	填充題 1(2)	三角函數的定義與倒數關係
	簡答題 1	三角函數的圖形
21%~30%	填充題 1(1)	三角函數的定義與倒數關係
	填充題 5(2)	三角函數的定義與和角公式
31%~40%	選擇題 2	基本三角測量
	填充題 5(1)	三角函數的定義與和角公式
	簡答題 2	平方關係
	簡答題 3	和差化積公式

41%~50%	選擇題 4 選擇題 6 填充題 3(3)	象限角與函數的增減關係 反三角函數 廣義角求值
51%~60%	選擇題 5 填充題 2 填充 3(2)	反三角函數 三角函數的定義應用 廣義角求值

所以低分組未達 60%的錯誤題數總共有十四題，涵蓋十個測驗目標。

將上述的高、低分組的錯誤類型表示為下表，以便可以更清晰的看出高、低分組的錯誤類型差異：

表 4-1-22 錯誤類型-高、低分組綜合比較

題號	測驗目標	高低分組
選擇題 2	基本三角測量	高分組、低分組
選擇題 4	象限角與函數的增減關係	高分組、低分組
選擇題 5	反三角函數	低分組
選擇題 6	反三角函數	低分組
填充題 1(1)	三角函數的定義與倒數關係	高分組、低分組
填充題 1(2)	三角函數的定義與倒數關係	高分組、低分組
填充題 2	三角函數的定義應用	低分組
填充 3(2)	廣義角求值	低分組
填充題 3(3)	廣義角求值	低分組
填充題 5(1)	三角函數的定義與和角公式	高分組、低分組
填充題 5(2)	三角函數的定義與和角公式	高分組、低分組
簡答題 1	三角函數的圖形	高分組、低分組
簡答題 2	平方關係	低分組
簡答題 3	和差化積公式	低分組

從上述的整理可以清楚的看出，在後測的錯誤題型表現中，高分組的學生明顯的表現比低分組的學生好，僅有錯誤題數僅有七題，較低分組的十四題少，且高分組的錯誤類型均涵蓋在低分組的錯誤類型當中，所以可以明顯看到高分組的學生表現的較低分組的學生好。

高分組較低分組表現較好的題型有：選擇題的第五、六題，屬於反三角函數系列的題目；填充題第二題，屬於三角函數的定義應用題型；填充題的第三題，屬於廣義角求值的題型；簡答題第二題，屬於平方關係的題型；簡答題第三題，屬於和差化積公式應用的題型。上述所有題目皆被涵蓋於全體的錯誤題型當中，所以在此不再贅述。

4.1.4 高、低分組的學習成效

在 4.1.3 高、低分組的錯誤題型中，可以清楚的看出高分組的學生在學期末的表現比低分組的學生較好，在此，以另外的三個方式來看高、低分組的學生在學期末時的學習成效是否真的有所差異。三個方式分述如下。

● 高、低分組在後測答對題數之比較

在這一部分中，主要是將後測總共 20 格的試卷中，一一計算高、低分組的學生在這 20 格中各自答對了幾格，來作為判別高、低分組學習差異的方法。之後再將高、低分組學生依各校區分，探討各校高、低分組學生在後測答對數上的表現。所以以下分成以全體學生以及各校學生來探討。

• 全體學生

在全體學生中，高分組學生佔了 263 人，低分組學生佔了 310 人。在後測共有 20 格的試卷中，答對的題數與百分比四捨五入至整數位後分別表列如下：

表 4-1-23 後測答對題數-高分組

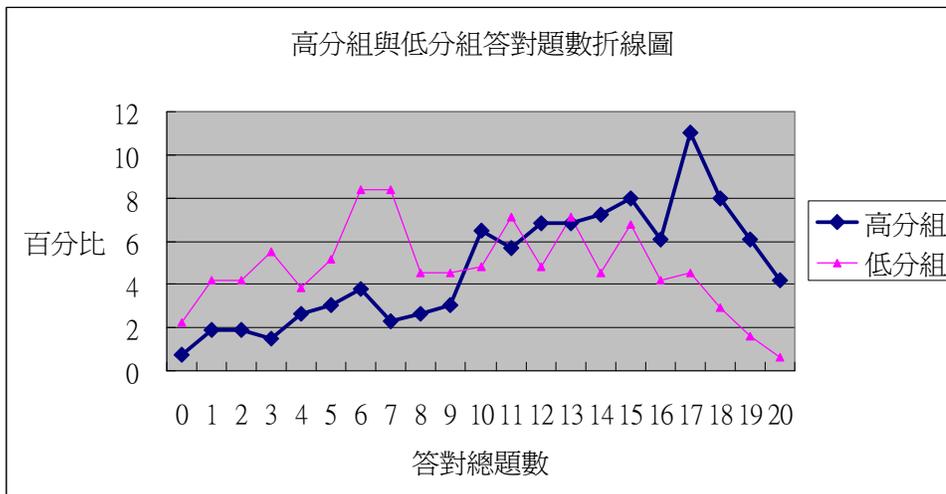
答對題數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人數	2	5	5	4	7	8	10	6	7	8	17
百分比 (%)	1	2	2	2	3	3	4	2	3	3	6
答對題數	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	總計
人數	15	18	18	19	21	16	29	21	16	11	263
百分比 (%)	6	7	7	7	8	6	11	8	6	4	

表 4-1-24 後測答對題數-低分組

答對題數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人數	7	13	13	17	12	16	26	26	14	14	15
百分比 (%)	2	4	4	5	4	5	8	8	5	5	5
答對題數	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	總計
人數	22	15	22	14	21	13	14	9	5	2	310
百分比 (%)	7	5	7	5	7	4	5	3	2	1	

並將上述百分比繪成折線圖，看看兩組答對題數是否有明顯的差異。

圖 4-1-1 高、低分組後測答對題數折線圖-全體



在上圖中，因為中間部分可能會有猜測等不確定因素影響，所以避開中間部分不看，僅看左端（答對總題數較少）與右端（答對總題數較多）的圖形，可以看出高分組學生在後測答對題數上，答對九題以下的人數百分比明顯比低分組的低，但是在答對題數十三題以上的人數明顯比低分組的多，此圖亦可說明出高分組的學生在後測的表現上明顯比低分組的學生較好。

• 各校學生

在高、低分組裡，各校所佔人數如下表：

表 4-1-25 高、低分組-各校人數表

	大直	成功	萬芳	徐匯	六和	香山	總計
高分組	38	85	45	45	22	28	263
低分組	34	50	76	6	122	22	310

依照上表中的各校人數，與計算全體後測答對題數相同之方法，整理出各校之答對題數的人數與百分比，並將其繪成折線圖；在此僅列出各校之折線圖來作為比較的依據。各校之折線圖如下。

圖 4-1-2 高、低分組後測答對題數折線圖-大直

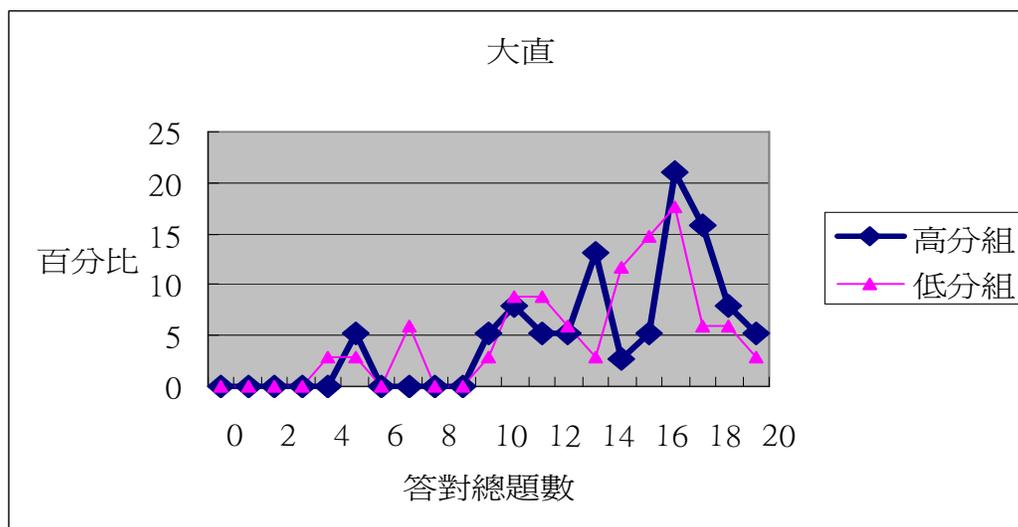


圖 4-1-3 高、低分組後測答對題數折線圖-成功

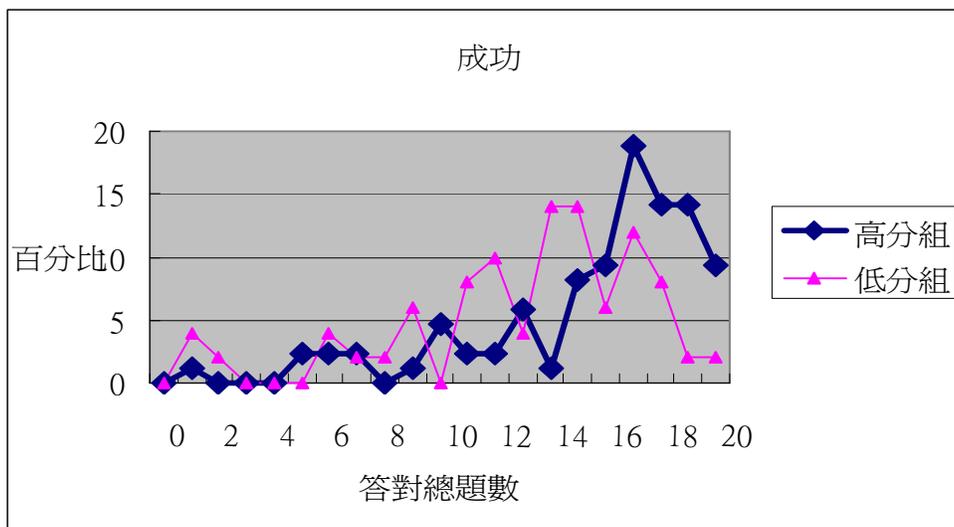


圖 4-1-4 高、低分組後測答對題數折線圖-萬芳

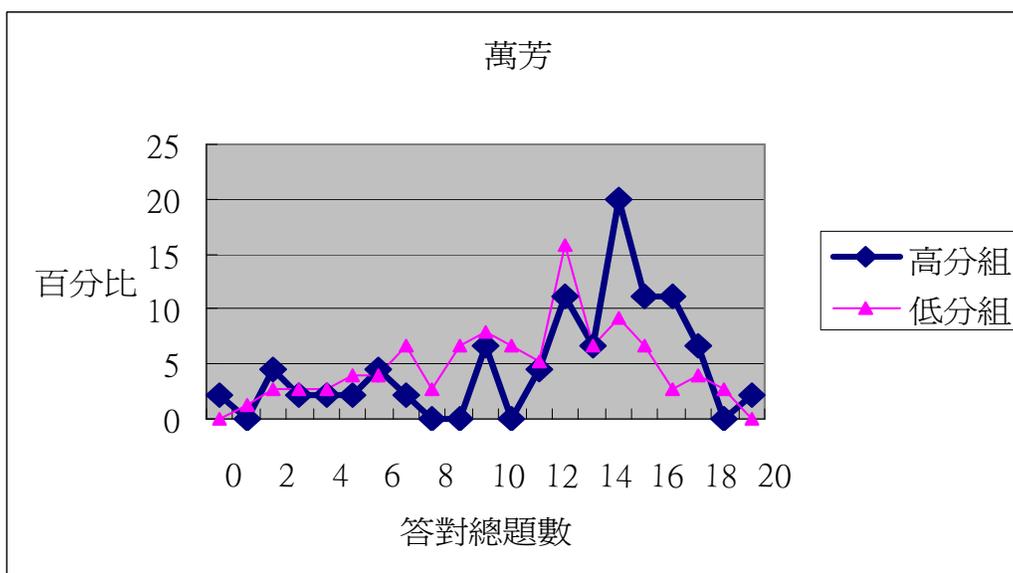


圖 4-1-5 高、低分組後測答對題數折線圖-徐匯

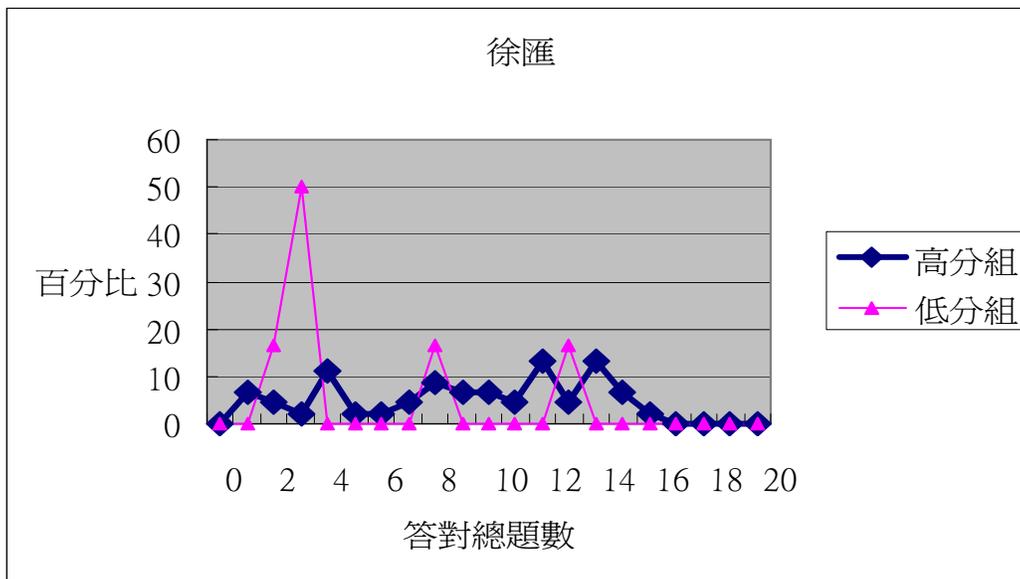


圖 4-1-6 高、低分組後測答對題數折線圖-六和

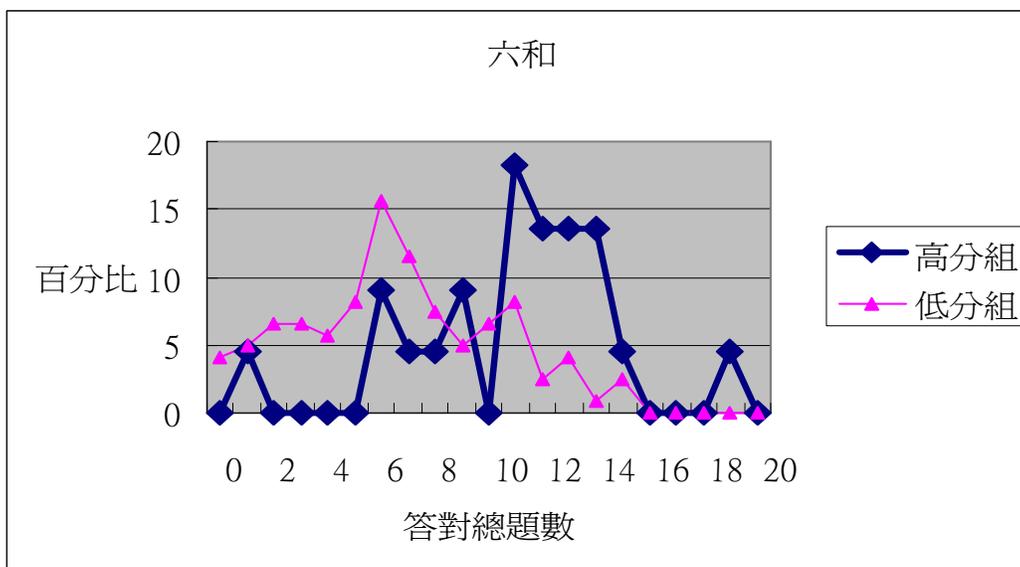
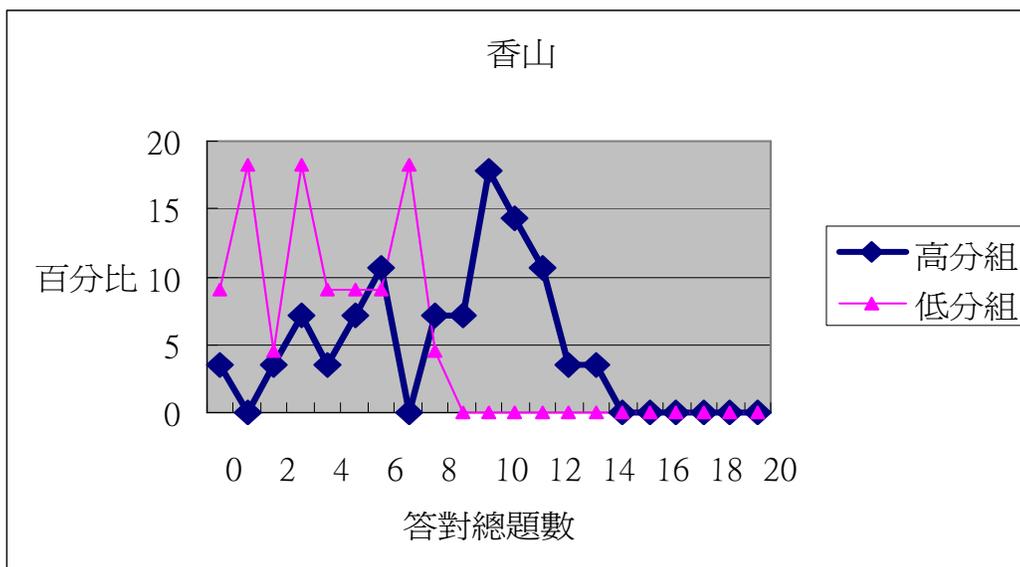


圖 4-1-7 高、低分組後測答對題數折線圖-香山



依照上面的六個折線圖，可以看出下列幾個現象：

1. 以六校來說，呈現的都是高分組學生比低分組學生的學習成效較好的狀況。所以可以說提早接觸三角函數課題的學生，學習狀況比跟著學校進度的學生好。
2. 比較特別的是大直高中，在經過教學之後，不管高、低分組的學生，在後測的答對題數中，答對九題以下的學生佔總人數中的少數。而在全教會的資料中，大直高中非當年度前三志願的明星學校，但是在經過教學後，均有明顯的進步，所以可以知道雖然學生對數學的學習性向會影響其學習成效，但是教學亦是另一重大影響。另一個比較特別的例子是徐匯高中，高、低分組的學生在後測的答對題數中，答對十六題以上的學生都趨於少數。

●前測的高、低分組與後測的高、低分組之比較

再以另一個方式，來看看高、低分組的學生在學期末的學習成效是否有所差異。在前述中，本研究利用前測中，學生的答對題數為 0~4 題者，為前測的低分組，

答對題數為 13~17 題者，為前測的高分組，並利用前測所分出之高、低分組的學號，來探討在後測的表現。

現在我們同樣以上述的方法，將前測的學生分為前測的高、低分組，但是不同的是，將這些前測的高、低分組的學生，再以後測的答對題數分為後測的高、低分組；後測中以答對題數為 0~5 題者為後測的低分組，答對題數為 15~20 題者為後測的高分組。例如：某校某班的 35 號同學，在前測時，答對題數為 3 題，則該生屬於前測的低分組；但該生在後測的答對題數為 18 題，則該生隸屬於後測的高分組。

依前測來分，得到高分組有 263 人，低分組有 310 人。而這前測的高、低分組學生，在後測時的變化，敘述如下。

• 前測之高分組：

在前測中，高分組的學生有 263 人，這 263 人當中，有 114 人依然居於後測的高分組中，佔前測高分組學生的 43%；而這 263 人當中，有 31 人居於後測的低分組中，佔前測高分組學生的 12%。

• 前測之低分組：

在前測中，低分組的學生有 310 人，這 310 人當中，有 64 人躍居為後測的高分組中，佔前測低分組學生的 21%；而這 310 人當中，有 78 人依然居於後測的低分組中，佔前測低分組學生的 25%。

將上面的敘述做成一個 3×4 的矩陣表格，表示如下：

表 4-1-26 前測高、低分組與後測高、低分組之矩陣表

	高分組（後測）	持平（後測）	低分組（後測）
高分組（前測）263 人	43%	45%	12%
低分組（前測）310 人	21%	54%	25%

所以可以看出，前測高分組的學生之學習成效較前測低分組的學生好。因為仍然有 43% 的學生，在學期末的表現是依然維持在後測高分組；但是前測之低分組的學生在經過教學之後，有 21% 的學生可以躍居為後測之高分組，所以經過教學之後，即使是跟著學校進度學習的學生，仍然有進步的空間。大體上來說，事先接觸三角函數的學生在學期末的學習成效是比跟著學校進度學習的學生稍好。

●前測高、低分組在後測為高分組者之差異

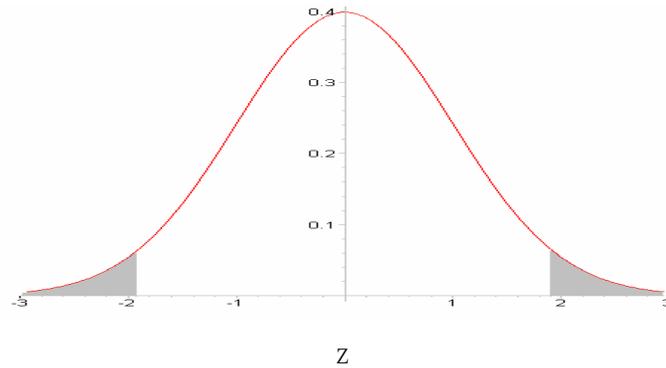
第三個方法是利用統計上的方法來計算兩組數據是否有顯著差異。分組的方式與上一個方法一致，先將前測分出高、低分組學生，再將這些前測的高、低分組的學生，以後測的答對題數分為後測的高、低分組。

在林清山老師的著作《心理與教育統計學》一書中，有提到利用兩個百分比來計算彼此的差異顯著性試驗，其中在獨立樣本中，計算顯著差異的公式為

$$z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right)}}$$

，其中的 N_1 = 第一個樣本的母群體個數， N_2 = 第二個樣本的母群體個數，且 p_1 = 第一個樣本的百分比， p_2 = 第二個樣本的百分比；在假設 $H_0: p_1 = p_2$ 的情況下，可將兩組資料合併以估計 p ，所以 p 就是全部受試者的百分比，而 $q = 1 - p$ ，且 $pq\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right) = \sigma^2_{p_1 - p_2}$ 是 $p_1 - p_2$ 抽樣分配的變異誤差。而在 Normal 的雙側試驗中，在圖 4-1-1 中的灰色區域，即為拒絕 H_0 的拒絕域。在 z 值比 +1.96 多或者比 -1.96 少時，均為拒絕 H_0 的拒絕域；所以拒絕 H_0 的拒絕域為 $[1.96, +\infty) \cup (-\infty, -1.96]$ ，在拒絕域中，則拒絕 H_0 ，接受 H_1 。

圖 4-1-8 Normal 分佈雙側試驗的拒絕域



而在本研究中，以前測的高、低分組學生，來作為探討後測高分組顯著差異的樣本，兩組學生並無交集，所以可視為獨立樣本。在前測高分組中共有 263 人，其中依然在後測高分組者有 114 人，得 $N_1 = 263$ ， $p_1 = 0.43$ ；且在前測低分組的學生共有 310 人，其中在後測屬於高分組的學生有 64 人，所以得 $N_2 = 310$ ， $p_2 = 0.21$ 。在假設 $H_0: p_1 = p_2$ 的情況下，總樣本數為 573 人，其中在後測高分組者有 178 人，所以得 $p = 0.31$ ，可推得 $q = 0.70$ ；將所有的數據代入公式中，得 $z = 5.85$ 。求出的 z 落入右側的灰色區域中，所以屬於拒絕 H_0 的狀況，亦即 $p_1 \neq p_2$ ，也就是兩樣本在後測的高分組中有顯著差異存在，亦即高、低分組學生在後測的學習成效上是不同的。

4.2 各校段考試題結果之分析

在這一章中，主要是以收回影印的各校第二次段考與期末考考卷，來作為探討資料。本章要探討的主要分為兩部分，第一部份是利用這些試卷的分析，來確保後測的信度；第二部分是利用這些試卷來探討後測中並沒有出現的題型，是否亦為答對率較低的錯誤題型。詳細的各校試卷可見附錄五。

4.2.1 後測試卷的信度

本節主要是探討後測的信度，經由多次複本測驗測量所得結果間的一致性或穩定性或測量誤差，以反映出真實量數程度的一種指標。一般而言信度的測量方法有重測信度、複本信度、內部一致性信度（折半方法、K-R 方法以及 α 係數），而本研究所採用的即為內部一致性信度當中的 α 係數。而在余民寧（1997）書中第 257 頁中，有說到「一份優良的教育測驗至少應該劇有 0.80 以上的信度係數值，才比較具有使用的價值」。

隨機挑選了市立大直高中 101 班級作為信度的測驗對象，將其後測的對錯資料一一輸入形成 0 或 1（0 代表錯誤、1 代表正確）型態的 Excel 檔，101 這個班級總計 36 份試卷。將這筆資料用 SPSS 作一信度的測試，採用的方法為內部一致性信度 α 係數，得到了 $\alpha = 0.8105$ ，且刪題後信度大多使得信度降低，可見每一題都設計得當。將刪題後信度整理如下表：

表 4-2-1 刪題後信度

題號	刪題後信度	題號	刪題後信度
選擇題 1	0.7877	填充題 3 (2)	0.7851
選擇題 2	0.7971	填充題 3 (3)	0.7911
選擇題 3	0.8098	填充題 4	0.7982
選擇題 4	0.7783	填充題 5 (1)	0.7705
選擇題 5	0.7810	填充題 5 (2)	0.7823
選擇題 6	0.7900	填充題 6 (1)	0.7898
填充題 1 (1)	0.8113	填充題 6 (2)	0.7898
填充題 1 (2)	0.7950	簡答題 1	0.7964
填充題 2	0.7890	簡答題 2	0.7857
填充題 3 (1)	0.7898	簡答題 3	0.7853

綜合上述的 $\alpha = 0.8105$ ，可以得知後測是具有足夠的信度，所以未刪題，採用原題讓其他的各班學生施測。

4.2.2 各校段考之錯誤題型

在後測中，我們探討了「銳角角度比較大小」、「三角函數的基本測量」、「三角函數數值的定義」、「象限角與函數的增減關係」、「反三角函數」、「三角函數的定義與導數關係」、「廣義角求值」、「角度與弧度」、「三角函數的定義與和角公式」、「平方關係」、「商數關係」、「三角函數的圖形」與「和差化積公式」，所以我們大膽假設三角函數的基礎在後測的測驗中已經可以看出端倪。例如：「積化和差公式」的結果應和「和差化積的公式」相差不遠。

但由於後測在出題時，範圍（以翰林課本為例）只延伸到反三角函數，後面的範圍尚未有所涉獵，例如：「複數的極式」。而在反三角函數之前也有幾個單元是跳過的，例如：「正弦函數」、「餘弦函數」、「倍角與半角關係」與「正餘弦函數的疊合」。其中我們挑出「餘弦定理」、「正餘弦函數的疊合」與「複數的極式」比較在學校期中考與期末考考卷中學生的學習效果。

在挑題中，我們僅考慮出題題型單一性的題目，避免在綜合性的考題中，增加變數。並且在多選題中，以錯兩個或兩個以上選項的學生為錯，而全對與單錯一個選項的學生為正確；在計算題中，若老師有部分給分，則以學生得到該題分 $\frac{2}{3}$ 以上分數者為正確，反之為錯誤。所有的百分比都四捨五入至整數位。

●餘弦定理

- 大直、期中、填充題 9、10、12

9. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{BC} = 7$ ，求 $\angle BAC$ 的度數 = _____

10. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ ， $\overline{AC} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ，求 $\overline{BC} =$ _____

12. 在 $\triangle ABC$ 中，若D在 \overline{BC} 邊上， $\overline{AC}=5$ ， $\overline{AB}=5$ ， $\overline{AD}=4$ ， $\overline{BD}=2$ ，求 $\overline{DC}=\underline{\hspace{2cm}}$

• 成功、期中、計算題 2 (3)，期末、填充題 16

2. 在梯形 ABCD 中，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{AB}=11$ ， $\overline{BC}=15$ ， $\overline{CD}=25$ ， $\overline{AD}=13$ （如下圖）。請回答下列問題：

(1) 在 \overline{CD} 邊上取一點E使得 $\overline{BE} \parallel \overline{AD}$ ，試求 $\triangle BCE$ 的面積。

(2) 在 \overline{CD} 邊上取一點F使得 $\overline{BF} \perp \overline{CD}$ ，試求 \overline{BF} 的值。

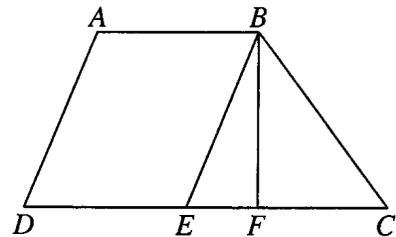
(3) 試求梯形 ABCD 的對角線 \overline{BD} 的長。

(4) 試求梯形 ABCD 的對角線 \overline{AC} 的長。[提示：

利用 $\overline{BE} \parallel \overline{AD}$]

(5) 另兩對角線 \overline{BD} 和 \overline{AC} 的銳角交角為 θ ，試求

$\sin \theta$ 的值。[提示：利用梯形面積]



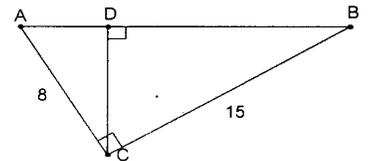
16. 坐標平面上，O 表原點，A (2, -5)，B (3, 4)，求 $\sin(\angle AOB) = \underline{\hspace{2cm}}$

• 萬芳、期中、填充題 4、9、11(K)

4. 如右圖所示， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC}=8$ ， $\overline{BC}=15$ ， $\angle C=90^\circ$ ，且

$\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ，求 $\cos \angle BCD = \underline{\hspace{2cm}}$ (D)

(以數字表示，不可用線段。)



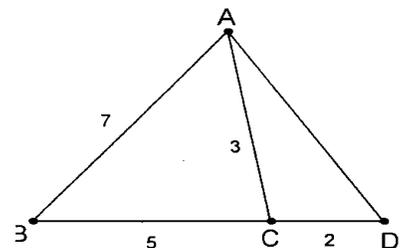
9. 已知 $\triangle ABC$ 三邊長分別為 $\overline{AB}=7$ cm， $\overline{BC}=5$ cm，

$\overline{AC}=3$ cm，延長 \overline{BC} 至D，如右圖所示，使得 $\overline{CD}=2$ ，

則 $\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$ (I) cm

11. 平行四邊形 ABCD 中， $\overline{AB}=1$ ，對角線 $\overline{AC} = \sqrt{3}$ ，

$\angle B=60^\circ$ ，則 $\angle ACB = \underline{\hspace{2cm}}$ (K) ；



$\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 _____ (L) ;另一對角線 \overline{BD} 長= _____ (M)

• 徐匯、期中、填充題 11 (第 13 格)、12 (第 14 格)

11. 設 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} = 4$, $\overline{CA} = 2 + 2\sqrt{3}$, $\angle A = 30^\circ$, 則 \overline{BC} 的長度為 _____ (13)。

12. 設 $\triangle ABC$ 之三邊長分別為 $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{AC} = 7$, 則

(1) $\triangle ABC$ 最小內角之餘弦的函數值為 _____ (14)。

(2) $\triangle ABC$ 的面積為= _____ (15)。

(3) $\triangle ABC$ 的內切圓半徑 r 為 _____ (16)。

(4) \overline{AB} 邊上的中線長= _____ (17)。

• 香山、期中、填充題 11(P)(Q), 期末、填充題 10

11. 圓之內接四邊形 $ABCD$ 中, 若 $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{CD} = 8$, $\angle B = 120^\circ$,

則 $\overline{AD} =$ _____ (P), $\overline{AC} =$ _____ (Q), 四邊形 $ABCD$ 的面積= _____ (R)。

10. 坐標平面上, $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(-4,3)$, $\theta = \angle AOB$, 則 $\cos \theta =$ _____。

餘弦定理的答對率綜合以以下表格表示：

表 4-2-2 餘弦定理答對率

(大直, 期中、99 人)	填充題 9	填充題 10	填充題 12
答對人數	87	67	56
答對率	88%	68%	57%

(成功, 期中、159 人)	計算題 2(3)	(成功、期末、169)	填充題 16
答對人數	116		54
答對率	73%		34%

(萬芳, 期中, 139 人)	填充題 4	填充題 9	填充題 11(K)
答對人數	75	70	112
答對率	54%	50%	81%

(徐匯, 期中, 99 人)	填充題 11 (第 13 格)	填充題 12 (第 14 格)
答對人數	20	20
答對率	20%	20%

(香山, 期中, 104 人)	填充題 11(P)(Q)		(香山, 期末, 103 人)	填充題 10
答對人數	25	34		8
答對率	24%	33%		8%

綜合而論, 各校至少有一題的答對率未達到 60%。若將各校的題型視為難度一樣, 而將各校的答對率再總和平均後, 得到的總平均率為 47%, 依此數據我們可以說餘弦定理的應用對學生來說是稍微艱深的, 屬於所要探討的錯誤題型之一。

當中比較特別的是成功高中與香山高中, 在期中考與期末考都有屬於餘弦定理的考題出現, 但是兩校期中考答對率卻都比期末考答對率來的高。所以可以推測餘弦定理對學生而言難以內化, 剛學到時, 因為對它記憶猶新, 遇到題目知道如何應變, 但是過了一陣子之後, 再遇到類型的考題, 因為並沒有內化所以卻不知道如何應變。可見學生在學習像餘弦定理這樣的定理公式時大多流於死記、背誦, 而沒有真正的瞭解並加以內化。

●三角函數的疊合

- 大直、期末、計算題 14

14. 若 $0 \leq x \leq \pi$ ， $f(x) = 1 + \cos x - \sin x$ ，求此函數的最大值與最小值，並求最大值與最小值發生時所對應的 x 值。(提示：利用正餘弦的疊合)

- 成功、期末、選擇題 2，填充題 9

2. 設 $n \in \mathbb{N}$ ， z_1, z_2 均為複數， $a, b \in \mathbb{R}$ ，下列敘述何者正確？(A) $\text{Arg}(-100i) = \frac{3\pi}{2}$

(B) $|a + bi| = \sqrt{a^2 + (bi)^2}$ (C) $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

(D) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (E) $\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$

9. $f(x) = 1 + \sin 2x + 4(\sin x + \cos x)$ ，則 $f(x)$ 之最小值為_____

- 萬芳、期末、填充題 6、7、8，綜合題 3

6. $y = 2\sqrt{3} \sin(x + \frac{1}{6}\pi) - 4 \sin x = a \sin(x + \alpha)$ ， $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ， $a > 0$ ，則 $(a, \alpha) =$ _____。

7. $y = 4 \sin x + 3 \cos x$ ，若 $0 \leq x \leq \pi$ ， y 的最大值 M ，最小值 m ，則 $(M, m) =$ _____。

8. $0^\circ < A < 360^\circ$ ，且 $\sqrt{3} \sin A + \cos A = 2 \cos 2006^\circ$ ，則 $A =$ _____。

3. 設 $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 6(\sin x + \cos x)$ ， $0 \leq x \leq 2\pi$ ，求 $f(x)$ 的最小值及此時的 x 值。

- 六和、期末、選擇題 2，填充題 10

2. 若 $(4 + 3i)(\cos \theta + i \sin \theta)$ 為小於 0 的實數，則 θ 是第幾象限角？(A) 第一象限角 (B) 第二象限角 (C) 第三象限角 () 第四象限角 (E) 條件不足，無法判斷。

10. (1) $(\cos 130^\circ + i \sin 50^\circ)(\cos 40^\circ + i \sin 220^\circ) = [\quad]$ 。

(2) $\frac{3(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)}{\sqrt{2}(\sin 60^\circ - i \cos 60^\circ)} = [\quad]$ 。

• 香山、期末、選擇題 2，填充題 11，計算題 1

2. $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 2\cos x$ ， $x \in R$ ，則 $f(x)$ 的最大值為

(A)2 (B)1 (C) $2\sqrt{2}$ (D)-1 (E) $-2\sqrt{2}$

11. 設 $0 \leq x \leq 2\pi$ ，則滿足 $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$ 的 x 值為_____。

1. 比較 $p = \sin 21^\circ + \cos 21^\circ$ 及 $q = \sin 67^\circ + \cos 67^\circ$ 的大小。

三角函數的疊合答對率綜合以下表格表示：

表 4-2-3 三角函數的疊合之答對率

(大直，期末、98 人)	計算題 14	
答對人數	13	
答對率	13%	

(成功，期末、169 人)	選擇題 2	填充題 9
答對人數	118	60
答對率	70%	36%

(萬芳，期末、155 人)	填充題 6	填充題 7	填充題 8	綜合題 3
答對人數	68	23	14	41
答對率	44%	15%	9%	26%

(六和，期末、170 人)	選擇題 2	填充題 10	
答對人數	49	25	18
答對率	29%	15%	11%

(香山, 期末, 103 人)	選擇題 2	填充題 11	計算題 1
答對人數	33	0	30
答對率	32%	0%	29%

綜合而論，除了成功的選擇題 2 以外，各題的答對率均未達 40%，甚至達 40% 者，只有萬芳的填充題 6，有六組數據甚至未達到 20%。若將各校的題型視為難度一樣，而將各校的答對率再總和平均後，得到的總平均率為 25%。依此數據我們可以說三角函數的疊合對學生來說是太過於艱深的，屬於難以內化的題型，亦屬於所要探討的錯誤題型之一。

●複數的極式

在複數的極式中，我們分討論了「複數的極式」、「複數的 n 次方根」以及「隸美弗定理」，因為有些題目是必須要綜合用到這些觀念，所以將他們綜合在一起討論。

- 大直、期末、選擇題 3，填充題 8，計算題 13

3. 如右圖，複數平面上 $P(z_1)$ ， $Q(z_2)$

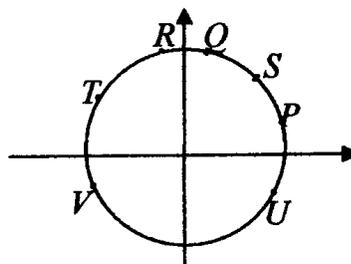
為單位圓（以原點為圓心）上的兩點，

且點 R, S, T, U, V 均在同一單位

圓上，則下列複數與點的對應，何者

必定不為真？_____

- (A) $R(z_1 + z_2)$ (B) $S\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ (C) $T(z_2^2)$
 (D) $U\left(\frac{1}{z_1}\right)$ (E) $V(z_1 \times z_2)$



8. 若複數 $z = \frac{(1+i)^{10}}{(\sqrt{3}-i)^6}$ ，則複數 z 的極坐標 $[r, \theta] =$ _____。

13. 求方程式 $x^4 = 8 + 8\sqrt{3}i$ 的四個根。(提示：利用複數的極式)

• 成功、期末、選擇題 1、2，填充題 1、2、3

1. 方程式 $x^5 = \cos 25^\circ + i \sin 25^\circ$ 的五個根的主幅角為 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ 且

$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < \theta_5$ 則

(A) $\theta_2 = 72^\circ$ (B) $\theta_4 = 216^\circ$ (C) $\sin \theta_j \neq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5$

(D) $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 + \cos \theta_4 + \cos \theta_5 = 1$ (E) $\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3 + \sin \theta_4 + \sin \theta_5 = 0$

2. 設 $n \in \mathbb{N}$ ， z_1, z_2 均為複數， $a, b \in \mathbb{R}$ ，下列敘述何者正確？(A) $\text{Arg}(-100i) = \frac{3\pi}{2}$

(B) $|a + bi| = \sqrt{a^2 + (bi)^2}$ (C) $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

(D) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (E) $\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$

1. 化簡 $\left(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} =$ _____

2. $x^2 = 3 - 12\sqrt{5}i$ 有 6 個根，此六個根在複數平面上對應的六個點所圍成的六邊形，其面積為 _____

3. 將 $\frac{(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)^7 (\cos 14^\circ + i \sin 14^\circ)^4}{\cos 61^\circ + i \sin 61^\circ}$ 化為標準式 _____

• 萬芳、期末、填充題 12、13、14，綜合題 2(1)

12. 求 $-3(\sin 27^\circ + i \cos 27^\circ)$ 的主幅角 = _____。

13. $w = \cos \frac{2}{5}\pi + i \sin \frac{2}{5}\pi$ ，則 $(1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4) =$ _____。

14. $\frac{1+i \tan \frac{\pi}{8}}{1-i \tan \frac{\pi}{8}}$ 之值 = _____。

2. (1) 求 64 的六次方根

(2) 將此六個根畫在複數平面上，連接成一個六邊形求此六邊形的面積。

• 徐匯、期末、4、8、9

4. 求 $\frac{(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)^4}{(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)^5}$ 之值

8. 設 $Z = -\sqrt{3} + i$ ，求 Z^{12}

9. 設 $\omega = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ ，求下列各值：

(a) $\omega^{30} + \omega^{31} + \omega^{32} + \dots + \omega^{135}$

(b) $(1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^3)(1 + \omega^4)$

• 六和、期末、選擇題 3，填充題 9、13、14

3. 設方程式 $x^5 = 1$ 的五個根為 $1, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ ，則 $(3 - \omega_1)(3 - \omega_2)(3 - \omega_3)(3 - \omega_4)$

之值為 (A) 81 (B) 162 (C) 121 (D) 242。

9. 試求下列各複數之極式：

(1) $-2\sqrt{3} + 2i = [\quad]$ 。(2) $4 - 4i = [\quad]$ 。

(3) $\sin 40^\circ - i \cos 40^\circ = [\quad]$ 。

13. 試求 $\frac{8}{i}$ 的立方根 [\quad]。

14. 若 $z + \frac{1}{z} = 1$ ，則 $z^{60} = [\quad]$ 。

複數的極式之答對率綜合以下表格表示：

表 4-2-4 複數的極式之答對率

(大直，期末、98 人)	選擇題 3	填充題 8	計算題 13
答對人數	31	30	35
答對率	32%	31%	36%

(成功，期末、169 人)	選擇題 1	選擇題 2	填充題 1	填充題 2	填充題 3
答對人數	109	118	57	26	132
答對率	64%	70%	34%	15%	78%

(萬芳，期末、155 人)	填充題 12	填充題 13	填充題 14	綜合題 2(1)
答對人數	23	38	28	63
答對率	15%	25%	18%	41%

(徐匯，期末、97 人)	4	8	9	
答對人數	40	35	19	10
答對率	41%	36%	20%	10%

(六和，期末、170 人)	選擇題 3	填充題 9			填充題 13	填充題 14
答對人數	82	79	87	38	3	56
答對率	48%	46%	51%	22%	2%	33%

綜合而論，除了成功的選擇題 1、選擇題 2 以及填充題 3 以外，各題的答對率均未超過 50%，甚至達 50%者，只有六和的填充題 9(2)，其餘的十八組數據均未達到 50%。若將各校的題型視為難度一樣，而將各校的答對率再總和平均後，得到的總平均率為 35%，依此數據我們可以說複數的極式對學生來說是稍微艱深

的，屬於所要探討的錯誤題型之一。

若依此三個題型的平均率來說，三角函數的疊合的平均答對率較低，所以可以說三角函數的疊合對學生來說較餘弦定理及複數的極式都更難以內化，教師在教授該課題時，應多注意學生的學習情況，並多著墨些時間。

4.3 其他問卷之結果分析

在上兩節分析完學生的所有試卷後，這一節所要探討的是高中教師訪談稿、大學教授問卷與大學用書的分析，分別敘述如下：

4.3.1 高中教師訪談稿

本小節中僅將二十位教師的訪談大綱，針對九年一貫實施前後的差異性大致整理如下：

- 九年一貫實施後之意見

高中教師普遍認為在九年一貫實施後，學生在三角函數的學習成效普遍降低，原因包括：思考能力下滑，無法靈活運用數學知識；語文能力薄弱，無法正確解讀題目中的文字敘述；圖形概念缺乏，無法根據題意做出正確圖形；學習態度被動；課後練習意願降低，遇到瓶頸容易自行放棄。

在課程綱要與教材的編寫上的意見：高中教師認為應適當刪除不必要的部分，如：部分較為複雜的公式、反三角函數與複數的極式。而在大學入學考試試題中，也應杜絕需要特殊技巧來解答的題型，以避免學生在學習上花費太多的時間鑽研難題。

對九五暫綱的意見方面：對於九五暫綱所制訂的授課時數，高中教師普遍認為太少，雖然內容已經簡化，但是三角函數課題仍需要在課堂上以多方面引導使得學生理解其概念，並帶領學生做相當程度的練習，所以希望可以增加授課時數，以達課程改革之效。

- 實施困難與策略方面

教學過程中，高中教師普遍認為學生時，並未建立對三角函數性質的基本知識，延宕了高中三角函數學習的進度，也嚴重影響學生的學習成就。且相望教育各單位針對課程實施所發生的問題，可以提出「整體」的改進措施，而不是以「補救教學」來作為一個學習落差的修正。九年一貫的學生已出現程度的大幅落差，希望可以恢復部分國、中小課程，以維持學生的數學能力。

4.3.2 大學教授問卷

本小節將中央大學六大系所-生科、化學、企管、資管、財金與經濟教授的問卷（關於大學教授的詳細資料可參閱 3-2 小節），依照題號綜合統計各選項中的人數，並依照五等第的算法，將非常同意記為 2 分，同意記為 1 分，普通記為 0 分，不同意記為-1 分與非常不同意記為-2 分，將所有的分數加總後，再除以總人數，以得到一個數據，以此數據來判別各題中，所有教授的意見較偏向哪部分，是同意、不同意或是普通。並將開放性問題中各教授提到的回答做綜合的整理：

表 4-3-1 大學教授問卷統計表

1. 本系學生所須修習的課程中，除了微積分以外，還有其他科目需要運用到三角函數的知識。 得分：-0.2
1. 本系學生在畢業之後所從事的職業中，有許多人在工作上需要運用到三角函數的知識。 得分：-0.6
2. 不論是在學校講授課程，或者是實際從事研究工作，我自己時常要運用到三角函數的知識。 得分：-0.5

<p>3. 我認爲如果學生在高中時期三角函數學習成績良好，則他們在本科目的成績也會相對的較好。</p> <p>得分：0</p>
<p>4. 我覺得學生在高中時代所學習的三角函數的知識是足夠的。</p> <p>得分：0.7</p>

在各題開放性問題中，以系所爲區分，將教授們的回答整理如下：

1. 本系學生所須修習的課程中，除了微積分以外，還有其他科目需要運用到三角函數的知識。

生科：生物統計遺傳學、植物生理學、蛋白質體學與基因體學等。

經濟：數理經濟學、經濟數學、總體經濟學 (有關景氣循環的 cycle)與區域經濟學 (三端市場)等。

財金：財務理論 II --- 博士班、線性代數與財務工程等。

化學：普通物理、化學、quantum chemistry, spectroscopy 與核磁共振等。

比較特別的是，經濟系郭樂平教授提到：「我在中大曾教授初級會計學.成本會計.財報分析.理財規劃.管理學.管理會計,學生其實並不需要三角函數的知識即可銜接這些科目的學習哦！」

2. 本系學生在畢業之後所從事的職業中，有許多人在工作上需要運用到三角函數的知識。

化學：各類領域都會用到。

資管：在寫程式時，可能會用到。

財金：財金系畢業的學生要運用到三角函數的機會不高。

經濟：倘若從事總體經濟分析，便有使用動態模型的需要，微分方程的相關知識中即用得上三角函數；學術研究者亦有可能會使用到。

3. 不論是在學校講授課程，或者是實際從事研究工作，我自己時常要運用到三角函數的知識。

生科：毒理—藥物、毒物之動力學、植物細胞呼吸速率與細胞面積等。

經濟：微分方程、部分有關區域經濟學的研究會運用到。

財金：電機工程中的調變(modulation)技術會用到三角函數。

化學：三角是基本數學，像幾何、代數，核磁共振也會有運用到。

資管：這是屬於一般常識。

4. 我認為如果學生在高中時期三角函數學習成績良好，則他們在本科目的成績也會相對的較好。

財金：三角函數是數學的一部分，跟其他科目成正相關並不意外。

化學：與實驗化學無相關。

資管：邏輯好的人，表現好。

化學：學生對幾何、空間的概念及抽象代數運算得到訓練。

財金：年代有點久遠，不記得了。

經濟：那是一種邏輯與推理能力的訓練與表徵。

5. 我覺得學生在高中時代所學習的三角函數的知識是足夠的。

財金：以大學課程而言是足夠的，研究所以上則看個人領域。

資管：不知道現在高中教多少。

財金：年代有點久遠，不記得了。

經濟：一般同學在高中時期所學的知識應是足夠，但多淪為死記，而不能融會貫通並加以活用。

4.3.3 大學用書分析

在本節中，欲以微積分、統計學與線性代數三大領域用書來探討大學生在學習上所需用到的三角函數知識。三大領域用書如下：

- 微積分

Thomas' Calculus (11E) (新月圖書、東華代理)。

Instructor's Solutions Manual Part 1 & Part 2 (根據 Thomas' Calculus (11E) 推出的習題詳解)。

Larson and Edwards, Calculus (6E)。

- 統計

D. D. Wackerly, W. Mendenhall III and R. L. Scheaffer, Mathematical Statistics with Applications (6E)。

- 線性代數

B. Kolman and D. R. Hill, Elementary Linear Algebra (7E)。

以下就三大領域的書籍中，一一詳述其與三角函數有關的內容。

- 微積分

THOMAS' (11E)

THOMAS' 的第一章為學習微積分前的先備知識總複習，而在第六節安排三角函數的概括內容，分為以下主題做簡要說明：

- 角度與弧度
- 基本三角函數：正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割
- 三角函數的圖形與週期性
- 三角函數的性質：平方關係、加法公式、倍角公式、半角公式
- 餘弦定理

- 三角函數變數變化與圖形的關係

此外，在第七章第七節剛開始的部分，有對反三角函數作詳盡的介紹。

關於以上有關三角函數的複習內容，與高中課程作比較，我們發現在高中課程有教授而在此未提及到的有「三角函數的近似值與簡易測量」、「正弦定理」、「三角測量」、「積與和差的互化」、「正餘弦函數之疊合」、「複數的極式」。在第二章-極限與連續的內容裡，應用三角函數的圖形講解夾擠定理、極限值是否存在的情形、函數圖形與漸近線的交會情形以及函數的連續情形。到了第三章第四節利用正弦、餘弦函數的和角公式以及倒數關係求出三角函數的導數後，則直接利用這些結果在爾後的章節中。學生在學習第三章到第十章有關微分、積分的原理、技巧、應用、圓錐曲線及極坐標的過程裡，除了能夠懂得直接使用三角函數的導數與反導數公式以外，三角函數的基本定義、平方關係、半角公式以及函數圖形也需要相當熟練。

LARSON and EDWARDS (6E)

LARSON & EDWARDS 內容著重於微積分在商務、管理、生物、化學方面的應用，從先備知識總複習、極限與連續至微分、積分的原理和應用以及多變數函數，皆未曾提及三角函數，唯在第八章前面五小節整個獨立介紹三角函數的相關基本內容，並始說明三角函數的微分、積分，章節標題如下：

第八章 三角函數

第一節 角度與弧度

第二節 基本三角函數

第三節 三角函數的圖形

第四節 三角函數的微分

第五節 三角函數的積分

其中所應用的三角函數大多為簡單的型態，習題中亦甚少出現複雜的三角函數。而與高中課程作比較，我們發現在高中課程有教授而在此未提及到的有「三

角函數的近似值與簡易測量」、「正、餘弦定理」、「三角測量」、「積與和差的互化」、「正餘弦函數之疊合」、「反三角函數」、「複數的極式」。

Instructor' s Solutions Manual Part 1 & Part 2

依照表 3-5-4 的檢核表，本研究做了兩份比較，一份是依照章節來分，看每一個章節裡所提到的三角函數的部份到底分布在檢核表的哪些地方，這樣可以看出每一個章節裡大概著重在三角函數的哪些部份；另外一份比較是以跨章節來做比較，看看整本微積分習題中哪些定義、公式或是觀念最常被使用到，甚至可以看到同一個觀念中，有哪些章節同時有提到。

因為探討的是習題詳解本，它裡面並沒有題目的闡述，所以將其解題過程中，運用到三角函數的每一題都挑出來，然後細看它用到哪些觀念再記載在檢核表中。在討論的過程中以檢核表中「非其他」的部份為主要的探討，因為其他（三角函數的微分與積分）的部份未涉及高中所教授的內容，所以下面的探討暫時不探討其他的部份。

- 依章節比較

- 第一章，第一章的內容主要是複習，開始出現有三角函數的題目是在第六節，第六節皆是在復習高中學過的三角函數的觀念，所以幾乎涵蓋的所有高中教過的三角函數觀念，但是反三角的觀念在這一章並未被提及。
- 第二章，第二章的內容是極限與連續，這一章的習題運用到三角函數的觀念以圖形及其特性居多，有一題運用到餘弦與正弦的和角公式，將函數簡化以利找到極限。
- 第三章，第三章是討論微分，習題中僅有 4 題運用到平方關係，4 題運用到圖形及其特性的觀念。

- 第四章，第四章是討論導函數的運用，運用到的有商數關係、三角形面積公式、圖形及其特性、正弦的和角公式、正切函數的和差角公式與二倍角公式，但題數都不多，運用這些觀念主要是在簡化解題過程。
- 第五章，積分，運用到平方關係、圖形及其特性、正弦的差角公式與半角公式。
- 第六章，定積分的應用，運用到的觀念有倒數關係、平方關係、商數關係、 90° 和 θ 的關係、三角形面積公式、二倍角公式與半角公式。
- 第七章，超越函數，運用了倒數關係、商數關係、餘弦的差角公式、二倍角公式、反正弦函數、反餘弦函數與反正切函數；反三角函數在這正式出現。
- 第八章，積分的技巧，運用了倒數關係、商數關係、平方關係、餘角關係、正弦的和差角公式、二倍角公式、半角公式、積化和差公式、反正弦函數與反正切函數。
- 第九章，積分的應用，這一章未提到任何高中所使用過的觀念，這一章的三角函數題目也是相對的少。
- 第十章，圓錐與極坐標，運用了銳角三角函數值的定義、倒數關係、平方關係、餘角關係、廣義角的三角函數值、化 $(-\theta)$ 為 θ 的三角函數、 180° 和 θ 的角度關係、 360° 和 θ 的角度關係、餘弦函數的和差角公式、正弦函數的和差角公式、二倍角公式與半角公式。
- 第十一章，無窮數列與級數，運用了商數關係、化 $(-\theta)$ 為 θ 的三角函數、半角公式與積化和差公式，最特別的是這一章還應用到了高中三角函數的最後一個單元複數的極式。
- 第十二章，向量與空間中的解析幾何，這一章習題中出現的三角函數，在解題的過程中沒有用到其他的三角函數觀念，反倒是應用了內積的定義，這也是這本書裡面所有三角函數中唯一用到內積定義的部份。

- 第十三章，運用到了商數關係、平方關係、扇型的弧長與面積、正弦函數的差角公式與二倍角公式。
- 第十四章，部份積分，運用到了平方關係、商數關係、正弦定理、餘弦定理與二倍角公式。
- 第十五章，重積分，倒數關係、商數關係、平方關係、正弦函數的和角公式與半角公式。
- 第十六章，向量場積分，平方關係、餘角關係、餘弦函數的差角公式、正弦函數的差角公式、二倍角公式與半角公式。

所有的內容除了第一章第六節著重在三角函數公式的證明，以及三角函數的應用外，剩下的章節大部分都是著重於三角函數的微分與積分，而高中所教授的觀念，主要是在幫助題目的化簡以及答案的化簡。

• 跨章節比較

以跨章節來看，檢核表所列出了 42 個部份幾乎在微積分習題中都有應用到。而應用最多的以「倒數關係」、「商數關係」、「平方關係」、「餘弦函數的差角公式」、「三角函數的圖形及其特性」、「正弦函數的差角公式」、「正弦函數的和角公式」、「二倍角公式」、「半角公式」與「反正切函數」。而未用到的單元有「利用作圖法求三角函數值」、「如何使用三角函數值表」、「正弦定理與外接圓半徑」、「和差化積公式」與「正餘弦函數的疊合」這五個部分。

所以可以看出如果在高中時期對三角函數很熟練的人，可以在解題的過程中，比較容易得到理想的答案，對計算和解題的過程可以比較得心應手。

• 統計學

D. D. Wackerly and W. Mendenhall III & R. L. Scheaffer (6E)

在這一本統計課本裡，唯一跟三角函數有關係的，只有一題習題，其他的內文部分都未提及三角函數，這一題主要是在闡述統計裡 Beta 函數，在變數是

$\sin^2 \theta$ 下的變化。

- 線性代數

Bernard Kolman and David R. Hill (7E)

在這本線性代數教科書中，運用到三角函數的地方主要為推導內積時所根據的餘弦定理，介紹正交基底時所須參考的積化和差公式，以及旋轉矩陣所代入的和角公式，習題部份偶有出現須要利用簡單的平方關係及倍角公式。所有用到的觀念有：三角函數的定義、倍角關係、平方關係、餘弦定理、積化和差的公式與和角公式等。

第5章 結論與建議

本章主要是以配合待答問題做出以下結論，並且對九年一貫提出建議，讓未來在實施「九八課綱」與「十二年國教」時，可做為參考之意見，也希望可以當作高中教師教授三角函數時的一項參考。

5.1 結論

在此節中，欲將上章中的分析結果，做一簡單扼要的統整。

- 學生的錯誤類型：

九十四學年度的高一學生是九年一貫實施之後的第一屆高中生，在三角函數方面的錯誤類型有：「三角函數的定義與倒數關係」、「三角函數的圖形」、「基本三角測量」、「三角函數的定義與和角公式」、「象限角與函數的增減關係」、「平方關係」、「和差化積公式」、「反三角函數」、「三角函數的定義應用」、「廣義角求值」、「餘弦定理」、「三角函數的疊合」與「複數的極式」等。

在第二章中所探討的以往文獻錯誤類型中，是以黃純杏、陳忠雄、簡志明、賴潔芳、林依伊與黃見益，這六篇論文為主，因為施盈蘭的主要探討對象為五專生，與本研就研究對象相差甚多，所以以後五篇論文為主。在這五篇論文中，探討區域皆在中、南部地區（嘉義、台南與高雄），且探討人數最多者為黃純杏的311位學生。而在以往文獻探討中的錯誤類型有：「三角函數的定義」（包括定義域、值域、各象限角正負值、三角函數奇偶性等）；「平方關係」、「倒數關係」等恆等式的轉換；「同界角」；「廣義角的定義」；「角度關係」（包含餘角關係、角度與弧度、角度與邊長關係）；「特殊三角形的三角函數值」；「代數觀念太過於薄弱」；「反三角函數」；「誤以為三角函數有線性關係」；「角度比較大小」（三角函數的遞增與遞減）；「三角函數的疊合」；「三角函數的圖形」（包含振幅、週期、平移、對稱）；「運算錯誤」；「角度範圍不會以不等式表示」與「查閱三角函數表」等。

幾乎在大方向中，經本研究分析而得的錯誤類型與以往文獻上的錯誤類型大致相同。以往文獻有而本研究沒有的為：「代數觀念過於薄弱」、「運算錯誤」、「誤以為三角函數有線性關係」與「查閱三角函數表」等，但因本研究在錯誤類型方面僅以試卷來作為分析資料，不像以往的研究，有對學生一對一的面談，所以在運算方面並非本研究所探討的重點。本研究有而以往文獻沒有的錯誤類型有：「基本三角測量」、「和積化差公式」、「三角函數的定義與和角公式」、「餘弦定理」與「複數的極式」。

以下就本研究與以往論文作一概括整理。其中，賴潔芳的論文有實驗組與控制組，最後再以不同學校的學生當成錯誤類型的樣本，本研究僅討論其錯誤類型樣本的地區與人數。

表 5-1-1 與以往文獻錯誤類型之比較

		本研究	黃純杏	陳忠雄	簡志明	賴潔芳	林依伊	黃見益
地區		大台北地區、桃園、新竹	台南	嘉義	高雄	台南	台南	中部
學校數		6	2	1	1	1	1	1
年級		高一	高二	高二 高三	高一	高三	高一	高二
施測時間		95	90	92	93	93	94	94
人數		738	311	78	113	37	210	95
錯誤類型	相同	「三角函數的定義」(包括定義域、值域、各象限角正負值、三角函數奇偶性等);「平方關係」、「倒數關係」等恆等式的轉換;「同界角」;「廣義角的定義」;「角度關係」(包含餘角關係、角度與弧度、角度與邊長關係);「特殊三角形的三角函數值」;「反三角函數」;「角度比較大小」(三角函數的遞增與遞減);「三角函數的疊合」;「三角函						

		數的圖形」(包含振幅、週期、平移、對稱)、「角度範圍不會以不等式表示」與「複數的極式」等。
相 異	「基本三角測量」、「和差化積公式」、「三角函數的定義與和角公式」與「餘弦定理」等。	「代數觀念過於薄弱」、「運算錯誤」、「誤以為三角函數有線性關係」與「查閱三角函數表」

從上表可知，從 90 年至本研究，經歷了五年的時間，且地區散佈在北台灣與南台灣皆有，但是所探討的錯誤類型皆相似，所以可知經過了環境、教材以及教育的改革下，對高一學生來說，三角函數的困難點卻幾乎都沒有改變，甚至在九年一貫實施之後有越來越多的傾向。

而高分組的錯誤類型有：「三角函數的定義與倒數關係」、「三角函數的圖形」、「三角函數的定義與和角公式」、「基本三角測量」與「象限角與函數的增減關係」等；而低分組的錯誤類型有：「三角函數的定義與倒數關係」、「三角函數的圖形」、「三角函數的定義與和角公式」、「基本三角測量」、「平方關係」、「和差化積公式」、「象限角與函數的增減關係」、「反三角函數」、「廣義角求值」與「三角函數的定義與應用」等。可以看出高分組的錯誤題型在低分組中全部都出現了，低分組中甚至多了「三角函數的定義應用」、「平方關係」、「廣義角求值」、「和差化積公式」與「反三角函數」，從錯誤類型中可得知，低分組的學生在恆等式上的應用較弱，且在進入廣義角之後，觀念不甚清楚，所以在廣義角之後的單元，都顯得吃力。依南一版與翰林版中的課程編排來看，在 2-4 廣義角的三角函數之後，每個單元學生幾乎都有錯誤類型的存在，可知學生在進入廣義角之後的學習是較為薄弱的。

- 學習成效

經本研究以四種不同方法研究後，可以得知提早接觸三角函數的學生在學期末之學習成效會比稍晚接觸三角函數者較好。

- 高中教師

高中教師普遍認為雖然經過課程簡化，但是高中數學時數仍太少，希望可以增加時數；並且在三角函數單元中，因為國中沒有基礎的認識，所以在高中學習時易造成學生無法習慣，與學習完銳角三角函數之後，無法銜接廣義角的問題，所以希望可以恢復國中課程；並且在考試時，應避免過於複雜的計算題型。

- 中央大學商管、生科及化學系教授

在這五個封閉性問卷中，普遍認為該系的學生畢業後工作上不太需要用到三角函數，而教授本身在研究上也不太需要三角函數；且在大學生學習大學課程中，除了微積分以外需要用到三角函數者並不太多；而教授們對於高中三角函數成績是否與他們在大學時的成績有關，則沒有意見，覺得會比較好與不會比較好者恰好各有一半的教授；但是多數教授認為高中時代所學習的三角函數知識是已經足夠的，而且三角函數最大的用處在於基本邏輯的訓練。

- 大學用書

綜合而言，在三個領域中應用較多的部分為：三角函數的基本定義、平方關係、半角公式、函數圖形、倒數關係、商數關係、餘弦函數的差角公式、正弦函數的差角公式、正弦函數的和角公式、倍角公式、反正切函數與積化和差公式。而在三個領域中應用較少或未曾出現過的部分有：利用做圖法求三角函數值、三角函數的近似值、如何使用三角函數值表、基本三角測量、正弦定理與外接圓半徑、和差化機公式、反三角函數、三角函數的疊合與複數的極式；其中三角函數

的疊合與和差化積公式在這四本書中都未提到過，而複數的極式也僅在微積分習題該書第十一章中的解題過程中提過，而積化和差雖在各書中皆有提到，但大多為積分技巧中的應用。

5.2 在數學授課時數與課程上的建議

本小節希望提出一些建議，可以做為未來教師教學以及教育部在教育改革時的一些參考。

- 數學授課時數— 增加授課時數、將三角函數拆成兩部分

雖然高中的課程已經簡化不少，但是三角函數相關課題，是一個需要教師在課堂上帶領學生多做練習與舉例，讓學生可以對三角函數有較深的認識，學習也會更加透徹。在高低分組的試卷分析中，可以到看先接觸三角函數且學會三角函數者（高分組），在期末評量的表現上，是較為優異的。所以我們可以說拉長學習時數者的學習成效的確比較好；而且高中教師們也覺得，九年一貫實施之後，學生對三角函數的學習意願、學習成效與學習態度有明顯下降的趨勢，所以希望可以增加數學課程的授課時數，有更多的時間來建立學生對於三角函數的相關知識，而不是流於讓學生記憶、背誦三角函數的計算方法；所以在時數上，希望可以增加數學的授課時數。

也希望可以將三角函數拆成兩部分來學習，從高、低分組的表現上來看，高分組的學生明顯優於低分組的學生，但是無論高、低分組在廣義角之後的每個單元卻都有其錯誤類型的存在，可見學生再從銳角三角函數跨越到廣義角三角函數，是有其障礙存在的。所以希望可以讓學生更熟練銳角三角函數之後，再進入廣義角的部份；而且在廣義角三角函數的部分也是常常需要將角度換算為第一象限角，也就是銳角三角函數後再作計算；從這些理由中可以清楚的看到，學生有其必要對銳角三角函數具備極高的熟悉度。所以希望可以將三角函數拆成兩部分，不要在同一個時段內，倉促地將所有三角函數的知識加深、加廣教授給學生，

學生容易會有囫圇吞棗、吸收不良的情況。且在銜接教材的編排中，可以看出在九十四學年度之後，編排人員有感於學生對三角函數相關概念的薄弱，所以在九十五暨九十六學年度增加了三倍的教材。所以，希望可以讓學生對銳角三角函數的關係有更進一步的認識之後，再推廣到廣義角中。在本研究中的錯誤類型也可以看出，廣義角是學生學習三角函數的一個障礙，學生無法在短時間之內，調適好對銳角與廣義角的三角函數學習。所以希望可以增加其時數讓學生可以對銳角三角函數的學習有更深入的認識，或者讓三角函數切割為兩個區塊，比較不會對學生的學習造成銳角與廣義角的混淆與衝突。

- 數學課程—延後複數的極式、避免過度複雜與技巧性的題目

希望在數學課程的編排上，複數的極式延後，不要在高一的數學課程上教授，因為複數的極式牽涉較廣。複數對高一學生也較為困難，在黃見益的論文中，很清楚的提到，高一學生在複數的建立相當薄弱；而且複數的極式雖然有運用到三角函數，但是與三角函數卻是截然不同的觀念，在三角函數的單元中同時教授複數的極式，往往容易造成學生的混淆，反而得到反效果，所以建議將複數的極式延後教授。

希望可以簡化繁雜的計算與太過於技巧性的題目，讓學生真正的學習三角函數的課題，而不是僅只有學習過於技巧性的東西。畢竟在大學教育中，所會用到的三角函數課題，較多為三角函數的定義與恆等式的應用等，並不會再度提及過於艱澀的計算技巧，所以希望重點在於教導學生更加了解三角函數的定義與應用。在本研究中，曾提及「餘弦定理」在期中考與期末考同時出現，但兩校之學生在期中考的表現遠比期末考好，這顯示了學生對於餘弦定理的應用並不清晰，所以造成剛學的時候會，但是過一段時間之後，容易忘記該定理的應用。所以希望在數學課程上不要有太過於技巧性的東西，讓學生可以更了解其基本的應用。

參考書目

- 黃偉鵬 (1994)。小學生數學運算錯誤類型研究。國立政治大學教育研究所碩士論文。[全國博碩士論文資訊網](#)，082NCCU0332028。
- 張立群 (2003)。台南地區國一學生整數的加減法單元錯誤類型之分析研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。[全國博碩士論文資訊網](#)，091NKNU0479028。
- 李浩然 (2003)。高雄市國一學生分數乘除法運算錯誤類型之分析研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。[全國博碩士論文資訊網](#)，091NKNU0479031。
- 劉天民 (1993)。高雄地區國一學生整數與分數四則運算錯誤類型之分析研究。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文。[全國博碩士論文資訊網](#)，081NKNU0480005。
- 簡芳怡 (2000)。台北地區國二學生的因式分解錯誤類型之研究。國立台灣師範大學數學研究所碩士論文。[全國博碩士論文資訊網](#)，088NTNU0479010。
- 蘇慧娟 (1998)。高雄地區國二學生方根概念及運算錯誤類型之分析研究。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文。[全國博碩士論文資訊網](#)，086NKNU1480004。
- 郭正仁 (2001)。高雄市國二生多項式四則運算錯誤類型之研究。國立高雄師範大學數學系碩士論文。[全國博碩士論文資訊網](#)，089NKNU0479014。
- 陳姿妍 (1996)。中學生處理有輔助線需求之幾何證明的錯誤分析。國立台灣師範大學數學系碩士論文。[全國博碩士論文資訊網](#)，084NTNU0479010。
- 林明哲 (1990)。國中學生數學解題型爲之分析研究。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士論文。[全國博碩士論文資訊網](#)，078NCNE2231010。
- 張景媛 (1994)。國中生數學學習歷程統整模式的驗證及應用：學生建構數學概念的分析及數學文字題教學策略的研究。國立台灣師範大學教育心理學系博士論文。[全國博碩士論文資訊網](#)，082NTNU3328002。

吳佳起（2003）。函數單元學習前後的概念成長探討。國立台灣師範大學數學研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，091NTNU0479017。

林清岳（2001）。高中學生無窮等比級數概念與運算錯誤類型之研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，090NKNU0479011。

黃漢淳（2001）。高中生指數概念及運算錯誤類型分析之研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，090NKNU0479012。

黃振乾（2005）。高一學生解反函數問題之研究。國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，093NCYU0480002。

陳美卿（2002）。高雄市高中生複數絕對值概念及運算錯誤類型之分析研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，090NKNU0479014。

陳聖雄（2006）。高一學生解一元二次不等式的主要錯誤類型及其補救教學之研究。國立台灣師範大學數學系在職進修碩士班碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，094NTNU5479002。

葉翠珍（2001）。高一學生數學歸納法瞭解狀況之研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，090NKNU0479001。

姚如芬（1993）。高雄地區高中一年級學生數學學習態度與其數學學習成就之相關研究。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，081NKNU0480002。

吳季鴻（2001）。高雄地區高三學生一元二次不等式運算錯誤類型之研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，090NKNU0479003。

劉宏輝（1995）。高雄地區高三學生解排列組合問題錯誤類型之分析研究。國立高雄師範大學數學教育研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，083NKNU4480007。

曾淑鑾（1990）。高中生線性內插法瞭解的研究。國立台灣師範大學數學研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，078NTNU2479006。

施盈蘭 (1995)。五專生的三角函數學習現象。國立台灣師範大學數學研究所碩士論文。全國博碩士論文資訊網，083NTNU0479010。

黃純杏 (2001)。高中學生廣義角的三角函數運算錯誤概念類型之研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。全國博碩士論文資訊網，090NKNU0479005。

陳忠雄 (2003)。高中學生三角函數概念學習錯誤類型研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。全國博碩士論文資訊網，091NKNU0479017。

簡志明 (2004)。高一學生銳角及廣義角三角函數基本概念應用運算錯誤類型之研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。全國博碩士論文資訊網，092NKNU0479042。

賴潔芳 (2004)。二階段評量應用在高中生三角函數學習成效之研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。全國博碩士論文資訊網，092NKNU0479049。

林依伊 (2006)。反三角函數錯誤類型分析之研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。全國博碩士論文資訊網，094NKNU0479036。

張琇涵 (2006)。台灣與新加坡三角函數課程之教科書比較。國立中央大學數學研究所碩士論文。全國博碩士論文資訊網，094NCU05479020。

鄧錦程 (2006)。《台灣與英國三角函數課程之教科書比較》。國立中央大學數學研究所碩士論文。未開放。

陳建丞 (2002)。融入數學史教學對高一學生數學學習成效-以「和角公式」單元為例。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。全國博碩士論文資訊網，091NKNU0479008。

蔡佳燕 (2004)。數學史融入教學對高一學生數學學習成效影響之研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。全國博碩士論文資訊網，092NKNU0479039。

宋永耀 (2003)。融入數學史教學對高一學生數學。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。全國博碩士論文資訊網，091NKNU0479010。

鄭志明 (2003)。高中廣義角三角函數課程使用 GSP 電腦輔助教學成效之研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。全國博碩士論文資訊網，

092NKNU0479015。

陳裕亮（2003）。高職廣義角三角函數單元 GSP 電腦輔助教材之設計與教學成效研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，

092NKNU0479012。

祝仰濤（2003）。高職生數學解題歷程運算錯誤類型之研究—以圓為例。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，092NKNU0479004。

孫鵬宗（1998）。一個網路化的數學解題系統-國中數學之「三角函數」單元。國立師範大學資訊教育研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，

086NTNU0395012。

吳玟瑤（2001）。教學對高中生學習函數概念的影響。國立台灣師範大學數學研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，089NTNU0479001。

陳建蒼（2001）。高一學生對數函數概念層次教學成效研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，089NKNU0479009。

余麗惠（2003）。高雄市高職學生運用 GSP 軟體學習三角函數成效之研究。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，031NKNU0479029。

余民寧（1997）。**教育測驗與評量-成就測驗與教學評量**。台北市：心裡。

葉重新（2004）。**教育研究法-第二版**。台北市：心理。

黃光雄、簡茂發（1991）。**教育研究法**。台北市：師苑。

林重新（2001）。**教育研究法**。台北市：揚智。

黃見益（2005）。中部地區高二學生複數極式之錯誤類型。國立高雄師範大學數學研究所碩士論文。**全國博碩士論文資訊網**，093NKNU0479011。

國立中正大學數學系（2005）。**九年一貫數學學習領域九十四學年度銜接高中課程教材**。

普通高級中學課程綱要資訊網（2007）。<http://140.116.223.225/98course/>

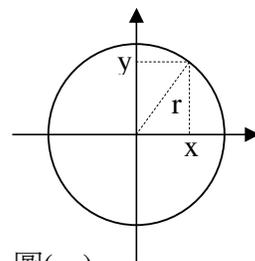
附錄一

中央大學數研所三角函數學習現況調查研究試卷(前測)

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

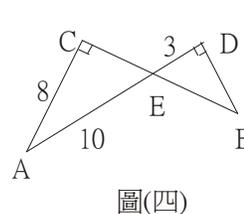
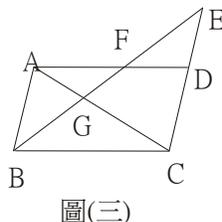
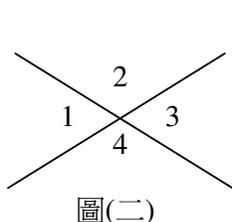
三角函數先備知識

- () 1. 若有一任意三角形 ABC ，則下列敘述何者錯誤？(A) $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$
(B) $\overline{AC} - \overline{AB} < \overline{BC}$ (C) 若 $\overline{AC} > \overline{AB}$ ，則 $\angle B > \angle C$ (D) 若 $\angle B > \angle C$ ，則 $\overline{AC} < \overline{AB}$ 。
- () 2. 若 $\angle 1 = 120^\circ$ ， $\angle 1$ 與 $\angle 2$ 互補， $\angle 2$ 與 $\angle 3$ 互餘，則 $\angle 1$ 與 $\angle 3$ 是(A)互補 (B)相等 (C)和為 90° (D)差為 90° 。
- () 3. 將三角形 abc 用影印機放大 150% 得三角形 ABC ，已知 $\angle a = 40^\circ$ ，則 $\angle a$ 的對應角 $\angle A =$ (A) 20° (B) 40° (C) 60° (D) 100° 。
- () 4. 若 $\triangle abc \sim \triangle ABC$ ，則(A) $\angle c = \angle C$ (B) $\overline{ab} = \overline{AB}$ (C) $\overline{ac} = \overline{AB}$ (D) $\angle a = \angle B$ 。
- () 5. 若有一三角形，三邊的長度比 $1:1:\sqrt{2}$ ，則下列何者正確？(A)此三角形為銳角三角形 (B)此三角形為鈍角三角形 (C)此三角形為直角三角形 (D)有兩內角和為 140° 。
- () 6. 如右圖(一)，坐標平面上有一以原點為圓心，以 r 為半徑的圓，圓上一點的坐標為 (x, y) ，則 $x^2 + y^2 =$ (A) r (B) r^2 (C) \sqrt{r} (D) $2r$ 。



- () 7. 若 $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ 、 $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ ，則 $a^2 + b^2 =$ (A) 18 (B) $8\sqrt{3}$ (C) 16 (D) $6\sqrt{6}$ 圖(一)
- () 8. 若直角三角形的兩股為 3 與 $\sqrt{6}$ ，則斜邊長為 (A) 9 (B) 15 (C) 3 (D) $\sqrt{15}$ 。
- () 9. $\triangle ABC$ 中， $\angle A = (2X + 3)^\circ$ ， $\angle B = (3X - 5)^\circ$ ，若 $\angle C = 82^\circ$ ，則 $X =$ (A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22。

- ()10. 如下圖(二)，兩直線相交於一點，形成的四個角依序為 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ ，若 $\angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 300^\circ$ ，則 $\angle 1 =$ (A) 50° (B) 60° (C) 70° (D) 80° 。
- ()11. 如下圖(三)之平行四邊形 ABCD，則下列哪一個三角形與 $\triangle DEF$ 相似？
(A) $\triangle ABF$ (B) $\triangle AGF$ (C) $\triangle ABG$ (D) $\triangle ABC$ 。
- ()12. 如下圖(四)， \overline{AD} 與 \overline{BC} 交於一點E，若 $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ，且 $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{AE} = 10$ ， $\overline{DE} = 3$ ，則 $\overline{BC} = ?$ (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12。



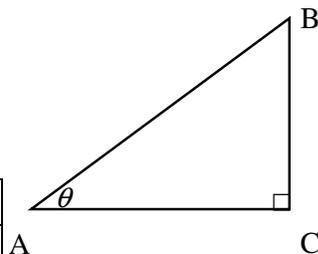
三角函數基本性質

13. 直角三角形 ABC 中，若 $\angle C = 90^\circ$ ，請以三角形的邊長表示 $\angle A$ 的六個三角函數：

數：
 正弦函數 $\sin \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ 。 餘弦函數 $\cos \theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ 。
 正切函數 $\tan \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ 。 餘切函數 $\cot \theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ 。
 正割函數 $\sec \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ 。 餘割函數 $\csc \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ 。

14. 請填入下列常用特殊角之三角函數值：

θ	30°	45°	60°	15°
$\sin \theta$				$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
$\cos \theta$				$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
$\tan \theta$				$2 - \sqrt{3}$



15. 比較下列三角函數值大小 (請填入 $>$ 或 $<$ 符號)：
 (A) $\sin 40^\circ$ _____ $\sin 80^\circ$ (B) $\cos 40^\circ$ _____ $\cos 80^\circ$ (C) $\tan 40^\circ$ _____ $\tan 80^\circ$
- ()16. 請問以上有關『三角函數基本性質』的知識，你是從哪裡第一次學到的呢？
 (A) 學校的數學課 (B) 學校的輔導課或銜接課程 (C) 補習班或家教
 (D) 父母兄姊或其他親友。

附錄二

中央大學數研所三角函數學習現況調查研究試卷(後測)

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

一、 選擇題，每題五分(第1~5題為單選題，第6題為複選題)

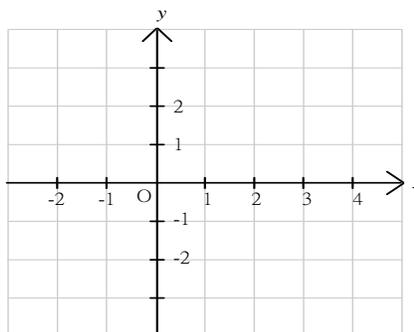
- () 1. 設 $a = \sin 50^\circ$, $b = \cos 50^\circ$, $c = \tan 50^\circ$, 其大小順序為 (A) $a > b > c$ (B) $c > a > b$
(C) $a > c > b$ (D) $b > c > a$ 。
- () 2. 在兩塔的塔腳所連之線段的中點，測得兩塔的塔頂之仰角各為 60° 與 30° ，則一塔高為另一塔的 (A) 3 倍 (B) 2 倍 (C) $\sqrt{3}$ 倍 (D) $\sqrt{2}$ 倍。
- () 3. 若 $\tan \theta > 0$, $\sec \theta < 0$ ，則 θ 在下列哪一個範圍內？(A) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
(B) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ (C) $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ (D) $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ 。
- () 4. 設 $a = \sin 1$, $b = \sin 2$, $c = \sin 3$, $d = \sin \frac{\pi}{2}$ ，則(A) $d > a > b > c$ (B) $d > a > c > b$
(C) $d > b > a > c$ (D) $d > b > c > a$ 。
- () 5. $\sin(\cos^{-1} \frac{3}{5}) =$ (A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{6}{5}$ 。
- () 6. 下列何者有意義？(複選) (A) $\sin^{-1}(-2)$ (B) $\sin^{-1} \frac{3}{4}$ (C) $\sin^{-1} \pi$
(D) $\sin^{-1} \frac{\pi}{4}$ (E) $\sin^{-1}(-\frac{2}{5})$ 。

二、 填充題，每格五分

1. 若 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，請問餘弦函數值 $\cos \theta$ 的範圍為何？_____。
正割函數值 $\sec \theta$ 的範圍又為何？_____。
2. 設 θ 是銳角，且 $\cot \theta = \frac{12}{5}$ ，則 $\sin \theta - \cos \theta$ 之值為_____。
3. 寫出下列各三角函數的值：(1) $\sin(-90^\circ) =$ _____。(2) $\cos 900^\circ =$ _____。
(3) $\sec 540^\circ =$ _____。
4. 150° 為多少弧度？_____。
5. 設 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ ， $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ， $\tan \beta = \frac{12}{5}$ ，則 $\sin \beta =$ _____，
 $\sin(\alpha + \beta) =$ _____。
6. 已知 θ 為銳角且 $\sin \theta = \frac{5}{6}$ ，試求 $\cos \theta =$ _____， $\tan \theta =$ _____。

三、簡答題，每題五分

1. 試草繪 $\frac{3}{2}\sin(\pi\theta)$ 的圖形。



2. 試求 $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ$ 之值。

3. 試求 $\sin 100^\circ + \sin 150^\circ + \sin 210^\circ + \sin 260^\circ$ 之值。

				非
				常
				不
			不	同
			同	意
			普	
			通	
			不	
			同	
			意	
			非	
			常	

1. 我在三角函數這個單元的考試得到不錯的成績。
2. 比起其他同學，我在學習三角函數的時候理解力較強。
3. 學校課堂上的講解，讓我能清楚認識三角函數每一小節的內容意義。
4. 上完學校課程，我只要自行複習、演練，就能充分理解並靈活運用三角函數。
5. 我認為上補習班或家教，對於學習三角函數幫助很大。
6. 如果給我更多時間學習三角函數，我一定會學得更好。
7. 比起數學的其他單元，我認為三角函數比較困難。
8. 我希望學到更多有關三角函數的知識。
9. 不管學習三角函數是不是很辛苦，但學成之後讓我覺得收穫良多。
10. 我認為學習三角函數有助於解決日常生活中的一些問題。
11. 我認為學好三角函數對於我未來**升學**很有幫助。
12. 我認為學好三角函數對於我未來**就業**很有幫助。

附錄三

瞭解 94 學年度高一學生，在學習三角函數的過程中，是否和以往的學生具備相同的先備知識，和相同的學習經驗、情況。

1. 請問在三角函數這個單元，您大概花了多少時間來闡述所有內容讓學生瞭解呢？學校所排定的課程時間表可以讓學生有足夠的時間學習嗎？這些時間和前幾屆相比是否有些許差異呢？
2. 您覺得學生沒有三角函數的先備知識，會不會讓您教起來比較吃力？需要花比較多的時間建立學生的基礎嗎？
3. 若以細目分為下列幾種，您覺得學生在大概哪幾點的學習狀況比較不佳？和以往的學生狀況有差異嗎？
 - (1) 角度與弧度
 - (2) 廣義角
 - (3) 正、餘弦定理
 - (4) 三角函數之圖形問題、週期
 - (5) 應用問題（測量問題）
 - (6) 反三角函數
4. 現在很多學生都會參加課後輔導（如補習班、家教），這種情形會給您怎樣的幫助或障礙嗎？在三角函數這個單元的情形會特別嚴重嗎？
5. 廣泛來說，您覺得這一屆的學生和以往的學生在學習三角函數上最大的差異在哪裡？
6. 您覺得在這麼短的時間內，讓學生學習目前教材提供的三角函數內容，學生會不會有難以吸收的問題？是否有什麼方法可以幫助學生改善這個狀況呢？
7. 請問老師您贊成將三角函數適當的切割成兩個學期的內容嗎？
8. 請問您贊成將指數、對數與三角函數挪到二年級再教嗎？

感謝您撥冗接受我們的訪談，謝謝！

附錄四

您好，我們是數學研究所單維彰教授的碩士班研究生江佳玲和黃鈺芸。為研擬 98 高中數學綱要，我們想要瞭解生科、化學與商管學院的學生需要在高中時期學習多少三角函數，才足以銜接上大學之後的課程。

爰此，我們列了以下的問卷，希望在各個領域有傑出表現的您，撥冗幫我們填寫以下的問卷。非常謝謝您的辛勞！

	非	非	非	非	非
	常	常	常	常	常
	同	同	同	同	同
	意	意	意	意	意
1. 本系學生所須修習的課程中，除了微積分以外，還 有其他科目需要運用到三角函數的知識。 如果方便，請舉例： _____ _____	<input type="checkbox"/>				
2. 本系學生在畢業之後所從事的職業中，有許多人在工 作上需要運用到三角函數的知識。 如果方便，請舉例： _____ _____	<input type="checkbox"/>				
3. 不論是在學校講授課程，或者是實際從事研究工作， 我自己時常要運用到三角函數的知識。 如果方便，請舉例： _____ _____	<input type="checkbox"/>				
4. 我認為如果學生在高中時期三角函數學習成績良好， 則他們在本科目的成績也會相對的較好。 如果有需要，請在此附加說明： _____ _____	<input type="checkbox"/>				
5. 我覺得學生在高中時代所學習的三角函數的知識是足 夠的。 如果不足的話，缺少的是： _____ _____	<input type="checkbox"/>				

如果老師方便的話，麻煩老師在 9 月 30 號回擲。

附錄五

附錄五是蒐集各校的期中考與期末考試卷與各高中教師的訪談稿。然而因為試卷與訪談稿過多，為避免造成檔案太過於龐大，所以將各校的第二次段考與期末考試題掃描，與各高中老師的訪談稿並放置於網址中。網址如下：

<http://libai.math.ncu.edu.tw/~shann/Teach/mathedu/yuyun>

附錄六

在這個部分中，整理出研究者找到的所有有關數學相關概念與錯誤類型的研究，依其國小、國中、高中順序排列，其中並非每篇與三角函數有關，整理在此希望可以提供探討代數觀念運算錯誤類型的研究者，作一參考資料。

黃偉鵬（1994）「小學生數學運算錯誤類型研究」中指出，錯誤類型分別為：

1. 加法的基本運算中，以「相加時未加上進位數」、「個位數為進位至十位」、「不對稱相加」為學生最容易出錯的類型，原因是因為學生對進位概念還有對其相加的概念不夠深刻而導致。
2. 減法的基本運算中，常見的錯誤類型為「大數減小數」、「0 減任何數為 0」，錯誤原因為兒童自行建構錯誤算則及對 0 的概念不清楚有關。
3. 乘法的基本運算中，「進位數直接與十位相乘」、「個位數直接相乘，十位數往左乘」及「未乘十位數」最常見。
4. 除法的運算中，以「商數未補 0」、及「商數多加 0」最為常見，其原因是學生的位值概念不清楚所致。

黃建興（2004）「國小教師數學單元教學之探討—以圓周率教學為例」中發現，學生學習圓周率困難的原因有二：一是對於圓心、直徑、半徑和圓周長相關概念的知識不足；二是缺少長度測量的能力，不會測量圓周長。

張立群（2003）「台南地區國一學生整數的加減法單元錯誤類型之分析研究」，研究結果指出學生發生錯誤的八點原因為：不瞭解負號的意義、受學習經驗影響做出錯誤推論、錯誤的使用運算規則、先備知識的不足、新舊學習經驗的互相干擾、由題目所給數字產生答案、不清楚題目設計或文字敘述、忽略題目所給條件或答案的完整性。

李浩然（2003）「高雄市國一學生分數乘除法運算錯誤類型之分析研究」，學生的錯誤類型主要有：分數的乘法運算過程的錯誤、分數的除法運算過程錯誤、計算上的錯誤分數乘法文字情境題上的錯誤、分數除法文字情境題上的錯誤。而在錯誤原因有：概念的過度類化、學生自行建構的錯誤、概念的不瞭解、文字語意的影響、運算法則的錯誤。

劉天民（1993）「高雄地區國一學生整數與分數四則運算錯誤類型之分析研究」，有以下的錯誤類型：

1. 學生在進行加減法運算時，誤用乘法運算性質。
2. 學生在進行分數的四則運算時，各自對分子、分母及整數分開進行計算。
3. 學生在處理帶分數化成假分數的問題時，常將分子計算錯誤。
4. 學生在處理通分的問題時，常將分子計算錯誤。
5. 學生將乘方問題當作乘法問題來計算。
6. 學生處理乘方問題時，分不清何數為底數。
7. 學生對四則運算的規則，運用的不太恰當，忽略了先乘除後加減的規則。
8. 學生在含括號的運算式中，並未考慮括號前後的運算情形。
9. 學生在含零運算式中，誤用任何數乘以零等於任何數或使用任何數乘以零等於任何數的錯誤運算規則。
10. 學生在處理負數運算時，沒有負數乘以負數等於正數的概念。
11. 學生在處理負數運算時，有主動去掉負號的情形。
12. 學生在處理負數乘以負數的問題時，會誤用提公因數的作法。
13. 學生在處理某數除以自己本身的運算時，常將值計算成零。

簡芳怡（2000）「台北地區國二學生的因式分解錯誤類型之研究」，國二學生因式分解的錯誤類型主要有：

1. 負號所在的位置、排列方式會影響二項式、三項式題目的答對率。

2. 有無括號會影響因式分解題目（不包含四項式）的答對率。
3. 第一項係數之正負號、有無括號對四項式因式分解題目的答對率影響並不大。
4. 項數的多寡會影響各項之間有公因式的因式分解題目之答對率。
5. 學生學習因式分解時，將先前學習過的知識做錯誤的類推、受相似的線索所引發，而形成運算上的錯誤、受本單元學習經驗的影響、括號的影響、教學、口訣的影響、使用部分的十字交乘法運算規則、缺乏先備知識。

蘇慧娟（1998）「高雄地區國二學生方根概念及運算錯誤類型之分析研究」，方根概念及運算為國中生應具備的數學基本能力之一，但是國中生學習方根的主要錯誤原因為：

1. 學生初學方根時，無法接受有理數形式以外的數。
2. 學生學習方根時，受原有的數學知識影響。
3. 學生學習方根時，同時學習的內容會互相干擾。

郭正仁（2001）「高雄市國二生多項式四則運算錯誤類型之研究」，多項式四則運算為代數的基礎，學生常犯的錯誤有：類推、括號、移項、遺漏、定義認知的錯誤、明顯的計算錯誤、粗心筆誤、運算不完全、隨意寫、空白等。而綜觀這些可以達到以下的結論：

1. 係數方面仍會延續「整數與分數四則運算」的運算錯誤。
2. 係數與文字分開獨立處理，數字與數字運算，文字與文字運算，同一項的係數與文字採取不同的運算方式，例如：係數用除法而文字用乘法。
3. 學生會以最容易獲最簡單的方法來解決問題，不管其方法是對或錯，都由簡單的部分先算而不會遵守一些運算規則（先乘除後加減、由左至右）；不管問題性質為何，都固定用他們習慣的知識來解決問題，而且對於條件的認知不甚清楚，以為將題目中所有的條件直接算一算就是答案。
4. 式子一定要化成最簡單的形式，尤其係數一定要把公因數約分且領導係數要

保持正數。

5. 求多項式加（減乘除）法運算的次數就直接將次數做加（減乘除）法運算。
6. 在除法運算中，缺項未補零，而且習慣寫成分式的形式以約分來處理。
7. 不知括號的使用意義及位置認為有無括號是一樣的，在乘方問題上學生更難體會有無的括號的差異性。對於沒有括號的題目，採取有括號的計算方式，在去括號時，分配不完全，若括號前面是負號，去括號時卻沒變號，只有將括號直接去掉而對於多項式文字題，學生經常沒給予式子括號。
8. 對於位值的改變，學生經常犯錯，尤其係數為分數的乘（除）法逆運算較不會，而對於多項式除法逆運算則經常忽略餘式。
9. 對於多項式文字題有語文知識上的錯誤，不管題意，看到和就用加法，差就用減法而且不知到該如何去檢驗答案，甚至認為答案必為數字。
10. 在長除法的運算過程中，常常會與直式乘法運算混淆，使用上式「加」下式的運算方式。
11. 對於多項式、因式分解、解方程式三者在定義上、解題上經常會混淆。
12. 分離係數法會產生係數與次項無法連結的錯誤。
13. 遺漏未知數、次方、符號的錯誤。
14. 學生不懂移項法則，對於移項的對象會顛倒。不管問題的性質，認為移項就一定得變號且忽略將整個式子括號。
15. 圖形表徵轉換成文字表徵時，因為圖形合併的直覺印象讓學生忽略代數上一些連接性的符號，如「+」號。另外面積的計算，學生認為是邊長相乘，而對於不規則形則採取分割法、填補法、平移法，但常造成邊長的計算錯誤或遺漏。
16. 所有錯誤類型中以圖形題錯誤率最高，單項式計算題錯誤率最低，概括來說：圖形題 > 文字題 > 多項式計算題 > 單項式計算題，而以文字題空白率最高，單項式計算題空白率最低，顯示學生對於圖形題在計算上最常犯錯，對於文字題在認知上最難，尤其在除法逆運算方面。另外也發現學生在文字

題與計算題上常有語言、基模、策略、程序知識的錯誤產生，對於同類型的文字題比計算題在錯誤率上相差不多但在空白率上卻相去甚遠，追究其因大部份屬於基模、策略知識不足者居多。

陳姿妍（1996）「中學生處理有輔助線需求之幾何證明的錯誤分析」，在處理有輔助線需求的幾何問題證明時，常常有以下幾種錯誤與原因：

1. 歐氏幾何知識對許多中學生而言不是結構性的連接。
2. 圖形外的輔助線對中學生而言較困難。
3. 學生有針對問題附圖解題的傾向。
4. 學生所學的是一個相關組集，並沒有邏輯序列。
5. 直覺支持所引用的性質為合法。

研究結果與 Senk（1985）所題的「許多學生在證明當中，引用了要證明的定理」及「學生使用輔助線的困難，說明教學上應注意如何、為什麼及何時可以轉換證明中要的圖形」相印證。

林明哲（1990）「國中學生數學解題型為之分析研究」，研究中結果中指出學生數學概念的模糊、數學知識的支離破碎、解題策略的僵化、題意理解品質的粗略、控制力的薄弱而無法有效的差遣或選擇這些可用的知識與策略，及具有錯誤數學信仰，是造成他們解題失敗的主要因素。

張景媛（1994）「國中生數學學習歷程統整模式的驗證及應用：學生建構數學概念的分析及數學文字題教學策略的研究」，分析國中學生在數學文字的錯誤概念，其中基模知識的錯誤概念包含：學生常憑直覺或關鍵字作反應，或思考模式和基模知識有功能固著的現象，而使用了錯誤的基模知識。

吳佳起（2003）「函數單元學習前後的概念成長探討」，國中二年級學生在函數方面存在許多錯誤類型，以及對於函數的迷思概念：

- (1) 在學生初次學習函數的概念前後，其函數概念有顯著的不同。
- (2) 函數單元的學習，最有助於「壓縮」層次的學生進階到「物化」層次。
- (3) 學生存在著許多錯誤類型。如：自變數與應變數的角色混淆顛倒。

林清岳（2001）「高中學生無窮等比級數概念與運算錯誤類型之研究」，學生的錯誤原因為：因概念不清產生的錯誤、受先前學習過的知識或本單元學習經驗的影響作錯誤的推論、受錯誤的舊經驗干擾，使用錯誤的運算規則、相似概念原則混淆、缺乏先備知識、粗心計算或書寫的錯誤。

黃漢淳（2001）「高中生指數概念及運算錯誤類型分析之研究」，研究中指出：

1. 學生前階段指數概念錯誤，導致以後指數概念發展錯誤。
2. 學生因平方根、根式運算、因式分解、文字符號及乘法概念模糊，影響指數概念的學習。
3. 學生對其他學科概念不清楚，影響指數應用問題的作答。
4. 學生對指數律誤用情形不少，尤以一個題目運算中若運用到二個或二個以上指數律時，誤用情形更嚴重。
5. 不同學業成就的學生在「正整數指數」、「零指數」及「實數指數」三類概念的理解上，不完全有顯著的差異。
6. 不同學業成就的學生在「負整數指數」、「正實數的 n 次方根的存在性與唯一性」及「有理指數」三類概念的理解上，均有顯著的差異。
7. 對於各試題的答對率，多依學業成就的高低漸次下降。顯示學業成就高的學生仍然較少有學習困難。
8. 對於指數應用問題，學業成就高的學生會盡量作答，學業成就中、低等的學生，空白人數明顯增加。

黃振乾（2005）「高一學生解反函數問題之研究」，研究結果指出，學生普遍在非映成函數的概念發生錯誤，此外對於以合成函數定義反函數的定義，存在一些迷思。在個案方面顯示將函數的對應域、值域混淆，導致判斷非映成函數其反函數是否存在上發生錯誤。但學生可以使用變數變換的方式求變數表徵函數之反函數，以合成函數的方式驗證。此外，學生誤解反函數的定義，使其解題過程中發生部分錯誤。

陳美卿（2002）「高雄市高中生複數絕對值概念及運算錯誤類型之分析研究」，學生的錯誤原因主要有：對定義不清楚、錯誤的運算規則、誤用線性基模（ $f(a+b) = f(a) + f(b)$ ）、複數絕對值未能與距離概念結合、由實數到複數時性質常做過度推論、粗心計算錯誤。

陳聖雄（2006）「高一學生解一元二次不等式的主要錯誤類型及其補救教學之研究」，學生在一元二次不等式解題上的主要誤類型有下列九種：任意開方、變號處理錯誤、任意平方、將領導係數當成正數來處理、產生虛數比大小的謬誤、過度使用「無解」的概念、不會由二次函數圖形直接看出一元二次不等式的解、無法判斷恆為正數或恆為負數的充要條件、認為不等式的解只包含整數的情形。造成這些主要錯誤類型的原因可分為下列六類：將先前學習過的知識作錯誤的類推；受到老師教學口訣、教材編排、及不當記憶公式的影響；先備知識不足；無法將一元二次不等式和二次函數的圖形作正確的聯結；對不等式的運算邏輯不清楚；受到直觀的影響。

葉翠珍（2001）「高一學生數學歸納法瞭解狀況之研究」，其中有提到學生解數學歸納法的困難。學生在解數學歸納法的問題時，雖有部份學生對證明格式不甚瞭解，但在反覆練習後，還是能使用如此的證明格式。依資料分析的結果來看，在

解題過程中，學生最感困難的要屬 $P(k) \rightarrow P(k+1)$ 的過程，數學式的化簡及處理能力，成了學生解題的關鍵，而且學生經常不知道使用數學歸納法的時機。

姚如芬（1993）「高雄地區高中一年級學生數學學習態度與其數學學習成就之相關研究」，研究中提到影響學生數學學習態度的五項因素依序是：數學教師、學生個人動機、家庭學習環境、數學課外活動及數學教材。

吳季鴻（2001）「高雄地區高三學生一元二次不等式運算錯誤類型之研究」，錯誤類型為：因式分解錯誤、錯誤的運算規則、同號、異號的處理錯誤、變號的處理錯誤、恆正、恆負的判斷錯誤、將領導係數當作正數處理、將「無解」及「無限多解」概念做過度推廣。

劉宏輝（1995）「高雄地區高三學生解排列組合問題錯誤類型之分析研究」，研究中指出：

1. 學生計算時錯誤的主要原因是，學生對於各種不同的計數方法所使用的時機混淆不清，造成使用錯誤的計數公式。例如組合問題用排列的方法計算，相異物的重複排列用相同物的重複選取計算。
2. 學生解重複排列問題，常將不可重複的東西作重複計數。
3. 對於相同物的重複選取問題，學生普遍感到困擾，原因是學生不知道符號 $H(m, n)$ 中 m 與 n 要怎麼判斷。
4. 學生計算環狀排列問題時，由於不了解該種排列的特性，往往無法與環狀排列的實際變化配合，造成排列計數時，沒有考慮環狀排列或過度考慮環狀排列。
5. 學生的分類能力不佳，對於需要分成好幾類計算的問題，學生容易犯的錯誤：
(1) 分類不完全的錯誤；(2) 重複分類；(3) 正確分類後分類項計數錯誤。
6. 關於綜合問題，學生的主要錯誤是不知道要用什麼計數方法計算，造成學生用猜測、找關鍵字等方法來決定自己的解題策略。

7. 對於類似的問題，學生往往未注意問題條件的變化，將不恰當的計數方法類推到類似問題作計算。
8. 對於排列組合這種實際生活問題，學生解題時往往未考慮組合時的實際情況，造成答案與實際的情況不合。

曾淑鑾（1990）「高中生線性內插法瞭解的研究」，內插法概念知識方面發現約六成學生對內插法表徵系統圖形到數學式的轉換能力不夠好；在過程知識方面發現，計算錯誤為可線性估算函數值問題的錯誤主因之一；解題方面發現，有規律的非局部線性圖形，會因其規律性使學生認為可以使用內插法，且估算函數值時，不管函數是否局部線性，似乎線性內插法是學生主要的估測策略。