目錄

論文摘要

第一章我們提出一套提昇自格函數與凌波函數逼近能力的方法, 利用此法可以將 Daubechies 正交自格函數與正交凌波函數提升爲一套雙正交的自格函數與凌波函數, 其中自格函數與其自己的平移幾乎正交, 凌波函數的導函數與其自己平移正交, 而且與自格函數的導函數也正交. 這種微分後正交的特性對於微分方程的數值解特別有幫助. 此基底下所得到的剛度矩陣可藉由微分正交以及凌波轉換的特性, 使得矩陣享有稀疏 (sparse) 與降低條件數 (condition number) 的性質.

另外, 在探討雙正交凌波理論時, 我們獲得一個有趣的小結果. 令自格函數 Φ, $\widetilde{\Phi}$ 在雙正交系統下, 假設 M_n, $\widetilde{M_n}$ 分別爲爲 Φ 與 $\widetilde{\Phi}$ 的 n 次動量, 則有下面的結果

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} M_k \widetilde{M}_{n-k} \quad n = 1, \ldots, m, \ m = \max(N, \tilde{N})$$

其中 $N, \widetilde{N}$ 分別代表 Φ 與 $\widetilde{\Phi}$ 能包含 N 與 $\widetilde{N}$ 階多項式. 如此我們若以知 Φ 的對量 M_n, 則可以較快算出對偶自格函數的動量 $\widetilde{M_n}$.

第二章我們以 Helmholtz 與 Poisson 方程爲例, 利用傳統的有限元素法, 將微分方程化微弱解型式, 再以分片 1 階基底函數 $\phi(x)$ 將它轉變爲線性聯立方程式 $Au = F$, 然後求出逼近解 $u_h(x) = \sum u_i \phi_i(x)$. 從一些文獻中, 我們知道矩陣 A 的條件數 $\kappa(A)$ 與逼近解 u_h 的誤差都會與網格的尺度有關, 而且兩者有其對應的性質.

第三章將介紹另一種 Galerkin 方法的基底: 提昇後的自格函數, 它不但具有一般有限元基底的良好性質 (連續性, 可微性與局部性), 並且具有導函數平移後幾乎正交與多重解析的能力. 我們先從較簡單的 Poisson 方程下手, 討論其對應的剛度矩陣 (stiffness matrix); 接著按照同樣的步驟, 應用在 Helmholtz 方程, 再推導出質量矩陣 (mass matrix). 並且使用 Wavelet-Galerkin 方法與 (1.19) 的性質, 使得剛度矩陣的條件數降低. 爲了與第二章比較, 我們選用相同的問題.

第四章爲了比較分片線性有限元的差異, 我們計算與第二章相同的問題, 同樣的我們也給定週期性的附加條件, 利用提昇後的自格函數 $\Phi(x)$ 爲基底的 Scaling-Galerkin 法來逼近真解, 分別計算誤差與條件數的大小, 並且觀察他們與網格粗密的關係, 而且條件數與逼近解的誤差有密不分的關係. 並且利用 Wavelet-Galerkin 方法, 降低剛度矩陣的條件數, 並且在真解與逼近解得到更小的誤差. 這在求解規模較大的矩陣方程相當有用.

第一章 提昇後的凌波函數

第一章我們介紹一套提昇自格函數與凌波函數逼近能力的方法, 利用此法可以將 Daubechies 正交自格函數與正交凌波函數提升爲一套雙正交的自格函數與凌波函數, 其中自格函數的導函數與其自己的平移幾乎正交, 凌波函數的導函數與其自己平移正交, 而且與自格函數的導函數也正交. 這種微分後正交的特性對於微分方程的數值解特別有幫助. 此基底下所得到的剛度矩陣可藉由微分正交以及凌波轉換的特性, 使得矩陣享有稀疏 (sparse) 與降低條件數 (condition number) 的性質.

另外, 在探討雙正交凌波理論時, 我們獲得一個有趣的小結果. 令自格函數 Φ, $\widetilde{\Phi}$ 在雙正交系統下, 假設 M_n, $\widetilde{M}_n$ 分別爲爲 Φ 與 $\widetilde{\Phi}$ 的 n 次動量, 則有下面的結果

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} M_k \widetilde{M}_{n-k} \quad n = 1, \ldots, m, \ m = \max(N, \tilde{N})$$

其中 $N, \widetilde{N}$ 分別代表 Φ 與 $\widetilde{\Phi}$ 能包含 N 與 $\widetilde{N}$ 階多項式. 如此我們若以知 Φ 的對量 M_n, 則可以較快算出對偶自格函數的動量 $\widetilde{M}_n$.

1-1 雙正交凌波函數理論概論

在介紹提昇凌波函數之前, 讓我們先了解雙正交凌波系統的基本架構與性質.

令 $\phi(x)$ 與 $\tilde{\phi}(x)$ 兩個自格係數,

$$\phi(x) = \sum_{n} c_n \phi(2x - n), \quad \tilde{\phi}(x) = \sum_{n} \tilde{c}_n \tilde{\phi}(2x - n) \tag{1.1}$$

皆可展爲多重解析空間的自格函數, 及其對應的凌波函數

$$\psi(x) = \sum_{n} d_n \phi(2x - n) \quad \tilde{\psi}(x) = \sum_{n} \tilde{d}_n \phi(2x - n) \tag{1.2}$$

若 $\{\phi(x), \psi(x), \tilde{\phi}(x), \tilde{\psi}(x)\}$ 爲一組雙正交系統, 則

$$\langle \tilde{\phi}(x), \phi(x - n) \rangle = \langle \tilde{\psi}(x), \psi(x - n) \rangle = \delta_{0,n} \tag{1.3}$$

$$\langle \tilde{\phi}(x), \psi(x) \rangle = \langle \tilde{\psi}(x), \phi(x) \rangle = 0 \tag{1.4}$$

令 $\hat{\phi}(\omega)$, $\hat{\psi}(\omega)$ 分別爲 $\phi(x)$, $\psi(x)$ 的傅立葉轉換. 則根據等式 (1.1) 以及傅立葉轉換, 可得到

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\omega) &= \sum_{n} c_n \mathcal{F}[\phi(2x - k)](\omega) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n} c_n e^{-i\frac{k}{2}\omega} \hat{\phi}(\frac{\omega}{2})\end{aligned}$$

同樣的

$$\hat{\psi}(\omega)=\frac{1}{2}\sum_n d_n e^{-in\frac{\omega}{2}}\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$$

令

$$m_0(\omega)=\frac{1}{2}\sum_n c_n e^{-in\omega},\quad m_1(\omega)=\frac{1}{2}\sum_n d_n e^{-in\omega} \tag{1.5}$$

顯然 $m_0(\omega)$ 與 $m_1(\omega)$ 是 2π 週期函數, 而 $\frac{1}{2}c_n, \frac{1}{2}d_n$ 分別是 m_0 與 m_1 的傅立葉係數. 稱 $m_0(\omega)$ 與 $m_1(\omega)$ 分別是 $\phi(x)$ 與 $\psi(x)$ 的特徵函數. 則

$$\hat{\phi}(\omega)=m_0(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}),\quad \hat{\psi}(\omega)=m_1(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \tag{1.6}$$

按照上述的步驟,我們一樣有 $\tilde{m}_0(\omega), \tilde{m}_1(\omega)$ 使得

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega)=\widetilde{m}_0(\frac{\omega}{2})\hat{\tilde{\phi}}(\frac{\omega}{2}),\quad \hat{\tilde{\psi}}(\omega)=\widetilde{m}_1(\frac{\omega}{2})\hat{\tilde{\phi}}(\frac{\omega}{2}) \tag{1.7}$$

因此, 根據 Parseval 等式得到

$$\begin{aligned}\delta_{0,k}&=\langle\tilde{\phi}(x),\phi(x-n)\rangle\\&=\frac{1}{2\pi}\int\widehat{\tilde{\phi}}(\omega)\overline{\hat{\phi}(\omega)}e^{i\omega n}\,d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i\omega n}\sum_n\hat{\tilde{\phi}}(\omega+2\pi n)\overline{\hat{\phi}(\omega+2\pi n)}\,d\omega\end{aligned} \tag{1.8}$$

令

$$\mathrm{F}_\phi(\omega)=\sum_n\hat{\tilde{\phi}}(\omega+2\pi n)\overline{\hat{\phi}(\omega+2\pi n)} \tag{1.9}$$

由於 $e^{in\omega}$ 是 2π 週期函數, 因此 (1.8) 可以表示成

$$\delta_{0n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{F}_\phi(\omega)e^{in\omega}\,d\omega$$

根據傅立葉級數的合成公式, 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_\phi(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\sum_n e^{in\omega}\int_{-\pi}^{\pi}F_\phi(\omega)e^{-in\omega}\,d\omega\\&=\sum_n\delta_{0n}e^{in\omega}\\&=1\end{aligned}$$

更進一步, 由雙正交的性質 (1.3) 與 (1.4), 推衍出特徵函數 $m_0(\omega), \tilde{m_0}(\omega), m_1(\omega), \tilde{m_1}(\omega)$ 的關係. 由於F_ϕ是常數函數, 我們可以將它縮窄:

$$1 = \mathrm{F}_\phi(\omega) = \mathrm{F}_\phi(2\omega)$$

代入 (1.6), 得到

$$\mathrm{F}_\phi(2\omega) = \sum_n \tilde{m}_0(\omega + \pi n)\overline{m_0(\omega + \pi n)} = 1$$

現在, 我們將奇數項和偶數項拆開並配合 (1.10)和 $m_0, \tilde{m_0}$ 是 2π 週期函數. 故可將上式簡化爲

$$\tilde{m}_0(\omega)\overline{m_0(\omega)} + \tilde{m}_0(\omega + \pi)\overline{m_0(\omega + \pi)} = 1$$

仿照上述的方法, 根據 (1.3) 和 (1.4) 我們可以得到

$$\tilde{m}_0(\omega)\overline{m_1(\omega)} + \tilde{m}_0(\omega + \pi)\overline{m_1(\omega + \pi)} = 0$$

$$\tilde{m}_1(\omega)\overline{m_0(\omega)} + \tilde{m}_1(\omega + \pi)\overline{m_0(\omega + \pi)} = 0$$

$$\tilde{m}_1(\omega)\overline{m_1(\omega)} + \tilde{m}_1(\omega + \pi)\overline{m_1(\omega + \pi)} = 1$$

這四條式子是雙正交凌波函數最重要的式子. 只要有兩組自格函數與凌波函數的特徵函數 $m_0, m_1, \tilde{m}_0, \tilde{m}_1$ 滿足上述的式子, 則此兩組函數自動形成一套對偶的雙正交基底. 綜合以上的結果, 我們定義

$$M(\omega) = \begin{bmatrix} m_0(\omega) & m_0(\omega + \pi) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega + \pi) \end{bmatrix}, \quad \tilde{M}(\omega) = \begin{bmatrix} \tilde{m}_0(\omega) & \tilde{m}_0(\omega + \pi) \\ \tilde{m}_1(\omega) & \tilde{m}_1(\omega + \pi) \end{bmatrix}$$

若

$$\tilde{M}(\omega)\overline{M^t(\omega)} = 1 \tag{1.10}$$

則對應的兩套自格函數自動形成一組對偶的雙正交基底.

由 (1.10) 得知, 雙正交系統的凌波函數不是唯一決定的. 滿足 (1.10) 的 $m_1(\omega)$ 和 $\tilde{m}_1$ 的情況有:

$$\tilde{m}_1(\omega) = -e^{-i\omega}\overline{m_0(\omega + \pi)}s(2\omega), \; m_1(\omega) = -e^{-i\omega}\overline{\tilde{m}_0(\omega + \pi)}s(2\omega)$$

其中 $s(\omega)$ 是三角多項式. 在此論文中, 我們選用最簡單的方法 $s(\omega) = 1$, 即是

$$\psi(x) = \sum_k (-1)^k \tilde{c}_{1-k}\phi(2x - k), \; \tilde{\psi}(x) = \sum_k (-1)^k c_k \phi(2x - k) \tag{1.11}$$

1-2 雙正交下的多重解分析

在正式介紹提昇的淩波函數之前, 我們有必要了解多重解分析. 在雙正交系統下的多重解分析有兩組階梯函數空間 $V_j, \widetilde{V}_j$ 分別滿足:

$(A) \ldots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \ldots, \quad \ldots \subset \widetilde{V}_{-1} \subset \widetilde{V}_0 \subset \widetilde{V}_1 \subset \ldots$

$(B) \cup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$ 與 $\cup_{j=-\infty}^{\infty} \widetilde{V}_j$ 在 $L^2(R)$ 中稠密.

$(C) \cap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{\emptyset\}, \quad \cap_{j=-\infty}^{\infty} \widetilde{V}_j = \{\emptyset\}$

$(D) f(2^j x) \in V_j \Leftrightarrow f(x) \in V_0, \quad \tilde{f}(2^j x) \in \widetilde{V}_j \Leftrightarrow \tilde{f}(x) \in V_0$

假設 $\phi(x)$ 為自格函數且 $\{\phi(x-k)\}, \{\tilde{\phi}(x-k)\}$ 分別是 V_0 與 $\widetilde{V}_0$ 的一組 Riesz basis, 定義

$$\phi_{jk}(x) = \sqrt{2^j}\phi(2^j x - k) \tag{1.12}$$

由 (D) 得知 $\{\phi_{jk}\}, \{\tilde{\phi}_{jk}\}$ 也分別是 V_j 與 $\widetilde{V}_j$ 的 Riesz base, 即是

$$V_j = \mathrm{span}\{\phi_{jk}(x) | k \in Z\}, \quad \widetilde{V}_j = \mathrm{span}\{\tilde{\phi}_{jk} | k \in Z\}$$

我們定義 $W_j, \widetilde{W}_j$ 分別是 V_{j+1} 及 $\widetilde{V}_{j+1}$ 的補集, 由 (1) 得到下列兩條式子:

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}, \quad \widetilde{V}_j = \widetilde{V}_{j-1} \oplus \widetilde{W}_{j-1} \tag{1.12}$$

如果 W_j 與 $\widetilde{W}_j$ 分別由單一的淩波函數 $\psi_{jk}(x)$, $\tilde{\psi}_{jk}(,x)$ 平移縮窄所展成的, 即是

$$W_j = \mathrm{span}\{\psi_{jk}(x) \mid k \in Z\}, \quad \widetilde{W}_j = \mathrm{span}\{\tilde{\psi}_{jk} \mid k \in Z\}$$

上述的 (1.12) 式是淩波函數的分解及重建的鑰匙, 有關淩波分解及重建有較詳細的介紹.

對任意的 $f(x) \in L^2(R)$ 到 V_j 或 $\widetilde{V}_j$ 的投影算子 P_j,$\tilde{P}_j$ 則

$$P_j f(x) = \sum_k \langle f, \tilde{\phi}_{jk} \rangle \phi_{jk}(x), \ \tilde{P}_j f(x) = \sum_k \langle f, \phi_{jk} \rangle \tilde{\phi}_{jk}(x).$$

從 (2), (3) 的式子得知

$$\lim_{j\to\infty} P_j f = \lim_{j\to\infty} \tilde{P}_j f = f, \qquad f \in L^2(R)$$

與

$$\lim_{j\to-\infty} P_j f = \lim_{j\to-\infty} \tilde{P}_j f = 0 \qquad f \in L^2(R)$$

這裡得收斂是對 L^2 意義的收斂, 而不是點收斂. 在實際的運用上, 我們不刻意要求兩組基底都屬於$L^2(R)$. 只要其中一組基底屬於 $L^2(R)$ 並且與另一組都是有限涵蓋, 如此就能完成快速基底轉換.

1-3 提昇自格函數與凌波函數

在這一節我們介紹一種簡單的提昇 Daubechies 凌波函數逼近能力與平滑度的方法. 在我們介紹提昇凌波函數之前, 讓我們先粗略了解 Daubechies 凌波函數. 首先, 在沒有特別聲明的情況下, $\phi(x)$ 是指 Daubechies 的正交自格函數. 令 $\phi(x)$ 滿足自格等式

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x-n),$$

其中 $c_k = 0,\ k \notin \{0, \ldots, 2p-1\}$, 且滿足以下的條件

$$\begin{aligned}
&\sum_k c_k = 2, \\
&\sum_k (-1)^k k^m c_k = 0, \text{for } 0 \le m \le p-1, , \\
&\sum_k c_k c_{k-2m} = 2\delta_{0m}.
\end{aligned}$$

p 是一個正整數, 稱爲 Daubechies 的凌波函數的階數. 則在 $\phi(x)$ 組成的 V_0 的空間中包含了在有限區間內階數 $< p$ 的多項式. 令 $\psi(x)$ 是相對應於 $\phi(x)$ 的正交凌波函數, 則

$$\langle x^m, \psi(x) \rangle = 0,\ 0 \le m \le p-1.$$

定義

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t) - \phi(t-1) dt. \tag{1.13}$$

稱爲 $\Phi(x)$ 是 $\phi(x)$ 的的提昇. 我們將證明 $\Phi(x)$ 也是自格函數, 我們選取最簡單的方法來造凌波函數, 即

$$g_n = (-1)^n h_{1-n},$$

其中 (h_n) 是 $\Phi(x)$ 的自格係數, (g_n) 是 $\Psi(x)$ 的自格係數. 因爲提昇後的 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 不再具有正交性, 因此需要造出另一組對偶基底 $\{\tilde{\Phi}(x), \tilde{\Psi}(x)\}$, 形成雙正交系統, 以便於我們在 V_{j+1} 與 $V_j + W_j$ 間作快速凌波轉換.

上式其實就是 $\phi(x)$ 與方盒函數 $X_{[0,1]}$ 的疊積,

$$\Phi(x) = X_{[0,1]} * \phi(x) \tag{1.14}$$

因此我們有

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}(\omega) &= \widehat{X_{[0,1]}}(\omega)\phi(\omega) \\
&= \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} e^{-i\frac{\omega}{2}} \hat{\phi}(\omega) \\
&= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{\omega}{2}}) \widehat{X_{[0,1]}}(\frac{\omega}{2}) m_0^{\phi}(\frac{\omega}{2}) \hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \\
&= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{\omega}{2}}) m_0^{\phi}(\frac{\omega}{2}) \hat{\Phi}(\frac{\omega}{2})
\end{aligned}$$

令

$$m_0^{\Phi} = (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-i\omega})m_0^{\Phi}(\omega)$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-i\omega})\sum_n c_n e^{-in\omega} \tag{1.15}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_n h_n e^{-in\omega}$$

其中

$$h_k = \frac{(c_{k-1}+c_k)}{2}, \tag{1.16}$$

$c_{-1} = c_{2p} = 0$. 則

$$\hat{\Phi}(\omega) = m_0^{\Phi}(\frac{\omega}{2})\hat{\Phi}(\frac{\omega}{2})$$

作逆傅氏轉換得到

$$\Phi(x) = \sum_n h_n \Phi(2x-n).$$

所以 $\Phi(x)$ 是自格函數. 同樣的, $\Phi(x)$也可展出一多重解分析, 而且

$$\sum_{n=0}^{2p}(-1)^n n^m h_n = 0,\ m = 0,\ldots,p. \tag{1.17}$$

由於雙正交自格係數必須滿足 (1.3), 再由 h_k 與 c_k 的關係式(1.16),可得到

$$\tilde{h}_k = 2c_k - \tilde{h}_{k+1} \qquad k = 1,2,\ldots,2p-1$$

令

$$m_0^{\tilde{\Phi}} = \frac{1}{2}\sum_k \tilde{h}_k e^{-ik\omega} \tag{1.18}$$

將 $\tilde{h}_k$ 換成 c_k, 上式可得到與 m_0^{ϕ} 有關的式子:

$$m_0^{\tilde{\Phi}}(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{1+e^{i\omega}}m_0^{\phi}(\omega), & \text{if } \omega \neq (2n+1)\pi\ ; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1.19}$$

並選取

$$m_1^{\tilde{\Phi}}(\omega) = -e^{-i\omega}\overline{m_0^{\Phi}(\omega+\pi)}, \qquad m_1^{\Phi}(\omega) = -e^{-i\omega}\overline{m_0^{\tilde{\Phi}}(\omega+\pi)}.$$

經由這樣的選取, 可輕易的檢查出上式可滿足 (1.10). 相對於這些特徵函數, 凌波係數 (g_n) 及對偶凌波係數 $(\tilde{g}_m)$ 分別爲,

$$g_n = (-1)^n\tilde{h}_{1-n}, \qquad \tilde{g}_n = (-1)^n h_{1-n}.$$

也就是

$$\Psi(x)=\sum_{k=2-2p}^{2} g_k\Phi(2x-k), \qquad \tilde{\Psi}(x)=\sum_{k=1-2p}^{1} \tilde{g}_k\tilde{\Phi}(2x-k).$$

如此我們便造出新的雙正交系統 $\{\Phi,\Psi,\tilde{\Phi},\tilde{\Psi}\}$. 同樣的, $\tilde{\Phi}$ 可形成一多重解析, 並且有

$$\sum_{k=1}^{2p-1}(-1)^k k^m\tilde{h}_k, \qquad 0\le m\le p-2. \tag{1.20}$$

在這種特別的選取下, $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 喪失了正交性, 但 $\Phi^{'}(x)$ 和 $\Psi^{'}(x)$ 卻有幾乎正交的關係. 我們可由 Φ 之於 ϕ 與 Ψ 之於 ψ 間的關係得到這些性質. 由 (1.14), 我們很容易得到

$$\Phi^{'}(x)=\phi(x)-\phi(x-1) \tag{1.21}$$

至於 $\Psi^{'}(x)$, 因爲 $m_0^{\Phi}(\omega)$ 滿足 (1.15) 及 m_1^{Φ} 滿足 (1.19), 可得到

$$\begin{aligned} m_1^{\Phi}(\omega) &= e^{-i\frac{\omega}{2}}(\frac{1+e^{-i(\omega+\pi)}}{2})^{-1}\overline{m_0(\omega+\pi)} \\ &= m_1(\omega)(\frac{1+e^{-i(\omega+\pi)}}{2})^{-1} \end{aligned}$$

由 $\widehat{\Psi}^{'}(\omega)=i\omega\hat{\Psi}(\omega)$, 因此

$$\begin{aligned} i\omega\hat{\Psi}(\omega) &= i\omega m_1(\frac{\omega}{2})(\frac{1+e^{-i(\frac{\omega}{2}+\pi)}}{2})^{-1}\hat{\Phi}(\frac{\omega}{2}) \\ &= i\omega m_1(\frac{\omega}{2})(\frac{2}{1-e^{-i\frac{\omega}{2}}})\frac{2(1-e^{-i\frac{\omega}{2}})}{i\omega}\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \\ &= 4m_1(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \\ &= 4\hat{\psi}(\omega) \end{aligned}$$

將上式作逆傅立葉轉換得到

$$\Psi^{'}(x)=4\psi(x). \tag{1.22}$$

所以我們有下列的結果:

$$\langle\Psi^{'}(x),\Psi^{'}(x-k)\rangle=16\delta_{0k}, \qquad \langle\Psi(x),\Phi(x-k)\rangle=0 \qquad for \qquad k\in N \tag{1.23}$$

及

$$\langle\Phi^{'}(x),\Phi^{'}(x-k)\rangle=\begin{cases}2, & \text{if } k=0,\\ -1, & \text{if } k=-1 \text{ or } -1,\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \qquad for \qquad k\in N \tag{1.24}$$

當使用廣義的 Galerkin 方法求微分方程的數値解時, 若我們能解決邊界條件的問題,在此基底下所得到的剛度矩陣, 可藉由微分後正交以及凌波函數轉換的性質, 同時享有稀疏矩陣 (sparse) 及降低條件數 (condition number) 的性質.

1-4 雙正交凌波函數的分解與轉換

在應用雙正交凌波轉換之前, 我們必須引進對偶基底. 給定一組基底 $\{v_1,\ldots,v_n\}$, 對任意的 $v\in\mathcal{V}$, 存在唯一的未知純量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 使得

$$v=\alpha_1v_1+\alpha_2v2+\ldots+\alpha_nv_n \tag{1.25}$$

所謂對偶基底是存在令一組特別的基底 $\{\widetilde{v_1},\ldots,\widetilde{v}_n\}$, 使得 v_k和 $\widetilde{v_k}$ 之間存在互相正交的關係:

$$\langle v_i,\widetilde{v_j}\rangle=\delta_{ij}$$

可見所謂的對偶基底關係是平等相對的. 也可以說 v_k 是 $\widetilde{v}_k$ 的對偶基底. 因此如果找到對偶基底, 則 (1.25) 的係數既可得:

$$\alpha_i=\langle v,\widetilde{v_i}\rangle$$

若是正交凌波基底, 本身就是自己的對偶基底, 只需一組凌波基底既可完成凌波轉換. 但是在某些非正交類的凌波函數, 就必須造出另一組適當的對偶基底. 但不是每一組凌波基底都適合當作凌波轉換基底. 一般來講, 每組凌波函數都有不相同的平滑度和消散速度. 以本論文的雙正交凌波系統 $\{\Phi(x),\Psi(x),\widetilde{\Phi}(x),\widetilde{\Psi}(x)\}$ 而言, $\Phi(x),\Psi(x)$ 擁有較高的平滑度, 適合作爲基底; 而 $\widetilde{\Psi}(x)$ 有較強的消散性, 可增加轉換時的逼近速度. 如果本末倒置, 不僅事倍功半, 還可能賠上精確度.

以下我們以本論文的雙正交凌波函數爲例, 來介紹凌波分解與重建. $\{\Phi_{jk}(x)\mid k\in\mathrm{Z}\}$ 與 $\{\widetilde{\Phi}_{ik}(x)\mid k\in\mathrm{Z}\}$ 分別形成 V_j 和 $\widetilde{V_j}$ 空間的基底, 而且 $\{V_j\},\{\widetilde{V_j}\}$ 分別形成 $L^2(\mathrm{R})$ 的兩組多重解析空間. 從 $\Phi(2x-k)$ 和 $\widetilde{\Phi}(2x-k)$ 可以製造出 $\Psi(x)$ 和 $\widetilde{\Psi}(x)$, 並且分別形成 W_j 和 $\widetilde{W_j}$ 的基底. 而所謂的分解既是考慮

$$V_j=V_{j-1}\oplus W_{j-1}$$

$$\widetilde{V}_j=\widetilde{V}_{j-1}\oplus\widetilde{W}_{j-1}$$

對任意的$j\in N$. 考慮以 $\Phi(x)$ 爲基底. 若 $v(x)$ 在 V_j 的投影 v_k, 在 V_j 與 $V_{j-1}\oplus W_{j-1}$ 之間作基底轉換, 則

$$\{\Phi(2^j-k)\mid k\in Z\}\mapsto\{\Phi(2^{j-1}x-k),\Psi(2^{j-1}x-k)\mid k\in Z\}$$

的轉換稱爲分解 (decomposition); 而

$$\{\Phi(2^{j-1}x-k),\Psi(2^{j-1}x-k)\mid k\in Z\}\mapsto\{\Phi(2^j-k)\mid k\in Z\}$$

的轉換稱爲合成 (reconstruction). 不論如何, 都是在處理以下等式:

$$\sum_k v_k \Phi(2^j x-k)=\sum_k u_k \Phi(2^{j-1}x-k)+\sum_k w_k \Psi(2^{j-1}x-k)$$

經過變數變換, 只需考慮 V_1 與 $V_0 \oplus W_0$ 的凌波轉換, 也就是 $j=1$ 的情形:

$$\sum_k v_k \Phi(2x-k)=\sum_k u_k \Phi(x-k)+\sum_k w_k \Psi(x-k) \tag{1.25}$$

先看分解的步驟. 已知 v_k, 要求 u_k 與 w_k. 將 (1.25) 同時對 $\widetilde{\Phi}(x-k)$ 作內積, 則

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_k v_k \langle \Phi(2x-k), \widetilde{\Phi}(x-n)\rangle \\ &= \sum_k v_k \sum_l \widetilde{h}_l \langle \Phi(2x-k), \widetilde{\Phi}(2x-(2n+l))\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sum_k \widetilde{h}_k v_{k+2n} \end{aligned} \tag{1.26}$$

同樣的步驟, 可得到

$$w_n = \frac{1}{2}\sum_k \widetilde{g}_k v_{k+2n} \tag{1.27}$$

以上就是分解的步驟.

再看合成的步驟. 假設 (1.25) 中已知 u_k 和 w_k, 要求 v_k. 將 (1.25) 同時對 $\widetilde{\Phi}(2x-n)$ 作內積, 則

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_n &= \sum_k u_k \langle \Phi(x-k), \widetilde{\Phi}(2x-n)\rangle \\ &\quad + \sum_k w_k \langle \Psi(x-k), \widetilde{\Phi}(2x-n)\rangle \end{aligned} \tag{2.28}$$

先作右端的第一項,

$$\begin{aligned} \sum_k u_k \langle \Phi(x-k), \widetilde{\Phi}(2x-n)\rangle &= \sum_k u_k \langle \sum_m h_m \Phi(2x-2k-m), \widetilde{\Phi}(2x-n)\rangle \\ &= \sum_k \sum_m u_k h_m u_k \langle \Phi(2x-2k-m), \Phi(2x-n)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sum_k u_k h_{n-2k} \end{aligned}$$

同理 (1.28) 的右邊第二項經過整理後

$$\sum_k w_k \langle \Psi(x-k), \widetilde{\Phi}(2x-n)\rangle = \frac{1}{2}\sum_k w_k g_{n-2k}$$

因此

$$v_n = \sum_k u_k h_{n-2k} + w_k g_{n-2k} \tag{1.28}$$

觀察 (1.26), (1.27) 和 (1.30) 的到一個結論: 我們不可能控制資料量 v_k 的多寡, 只要 $\widetilde{h}_k$ 與 h_k 的非零項是有限的, 上式中的級數就是有限多項是的和, 這也就是我們爲甚麼希望凌波函數的是有限涵蓋的原因, 如此在快速基底轉換上才會有幫助.

1-5 自格函數與多項式

在這一節中, 我們探討自格函數 $\Phi, \widetilde{\Phi}$ 與多項式的關係, 我們想知道 $\Phi(x)$ 與 $\tilde{\Phi}(x)$ 到底包含幾階的多項式, 即

$$x^\ell = \sum_k \langle x^\ell, \tilde{\Phi}(x-k)\rangle \Phi(x-k) \tag{1.28}$$

的等式中的 ℓ 何時成立, 並從中獲得 Φ 與 $\tilde{\Phi}$ 之間動量 (moment) 的關係, 而且我們也將這種關係推廣到一般的雙正交凌波函數.

首先, 我們定義 f 的 m 次動量 (m-th moment)

$$M_m := \int_R x^m f(x)\,dx. \tag{1.29}$$

假設 $p \geq 2$, 由於 $\sum \phi(x-k) = 1$, 對於所有 $x \in R$, 因此我們有

$$\begin{aligned}
\sum_k \Phi(x-k) &= \sum_k \phi * X_{[0,1]}(x-k) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k \phi(x-k-t) X_{[0,1]}(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} X_{[0,1]}(t)\,dt \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

(1.30) 式的意義是 $\{\Phi(x-k)\}$ 可以組成常數函數. 以下我們應用 m_0^Φ 來討論自格函數與多項式的關係, 以表明 V_0 的確包含了階數 $\leq p$ 的多項式. 爲了方便, 我令 $m_0 = m_0^\Phi$. 考慮 $m_0 = m_0^\Phi$, 給定一非負整數 s,

$$m_0^{(s)}(\omega) = \frac{(-i)^s}{2} \sum_k k^s h_k e^{-ik\omega}$$

由(1.17), 可見

$$m_0^{(s)}(\pi) = \frac{(-i)^s}{2} \sum_k (-1)^k k^s h_k = 0, \qquad 0 \leq s \leq p. \tag{1.31}$$

根據 (1.6)

$$\Phi'(\omega) = \frac{1}{2}m_0'(\frac{\omega}{2})\hat{\Phi}(\frac{\omega}{2}) + \frac{1}{2}m_0(\frac{\omega}{2})\hat{\Phi}'(\frac{\omega}{2})$$

給定 $n \in N$, 代入 $\omega = 2n\pi$ 得

$$\Phi'(2n\pi) = \frac{1}{2}m_0'(n\pi)\hat{\Phi}(n\pi) + \frac{1}{2}m_0(n\pi)\hat{\Phi}'(n\pi)$$

將 n 分爲基數與偶數討論, 並根據 (1.16) 與 (1.31), 整理後

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}'(2n\pi) &= \frac{1}{2}m_0(n\pi)\hat{\Phi}'(n\pi) \\ &= \frac{1}{2}\begin{cases} m_0(0)\hat{\Phi}'(n\pi) = \frac{1}{2}\hat{\Phi}'(n\pi) & \text{若n爲偶數} \\ m_0(\pi)\hat{\Phi}'(n\pi) = 0 & \text{若n爲奇數} \end{cases}\end{aligned}$$

若 n 爲偶數, 則繼續上面的步驟, 最後得到

$$\hat{\Phi}'(2n\pi) = 0, \qquad \forall 0 \neq n \in Z$$

依此類推, 我們有

$$\hat{\Phi}^{(m)}(2n\pi) = 0, \quad \forall 0 \neq n \in Z, \quad 0 \leq m \leq p. \tag{1.32}$$

令

$$f(x) = x\Phi(x), \quad g(x) = \sum_k f(x-k)$$

則 $g(x)$ 是 1 週期函數. 它的傅立葉展開式爲

$$g(x) = \sum_n a_n e^{i2n\pi x}$$

其中

$$a_n = \int f(x)e^{-i2n\pi x}\,dx$$

若 n 爲一非零整數, 則

$$\begin{aligned}a_n &= \int x\Phi(x)e^{-i2n\pi x}\,dx \\ &= i\hat{\Phi}'(2n\pi) \\ &= 0\end{aligned}$$

若 $n = 0$, 則

$$a_0 = \int x\Phi(x)\,dx = M_1$$

可見只要 $p \geq 1$ 就有

$$\sum_k (x-k)\Phi(x-k) = M_1$$

由於 $\sum \Phi(x-k) = 1$, 故得

$$x - \sum_k k\Phi(x-k) = M_1, \text{ or } \sum_k k\Phi(x-k) = x - M_1$$

重複上面的步驟, 我們可推導出

$$\sum_k (x-k)^m \Phi(x-k) = M_m, \quad \text{for } 0 \leq m \leq p.$$

同樣的, $\tilde{\Phi}$ 也有類式的關係式

$$\sum_k (x-k)^m \tilde{\Phi}(x-k) = \widetilde{M}_m, \quad \text{for } 0 \leq m \leq p-2.$$

因此我們有以下的定理,

Theorem 1.1 給定參數 $p \geq 1$. 若 $h_k, \tilde{h}_k$ 分別滿足 (1.17) 與 (1.20), 而 $\Phi, \tilde{\Phi}$ 分別是以 h_k 與 $\tilde{h}_k$ 爲係數的自格函數, 則

$$\sum k^m \Phi(x-k) = x^m + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} M_k x^{m-k},$$

$$\sum k^{\tilde{m}} \tilde{\Phi}(x-k) = x^{\tilde{m}} \sum_{k=1}^{\tilde{m}} (-1)^k \binom{\tilde{m}}{k} \widetilde{M}_k x^{\tilde{m}-k} \tag{1.33}$$

其中 M_k, $\widetilde{M}_k$ 分別是 Φ 和 $\widetilde{\Phi}$ 的 k 次動量, $0 \leq m \leq p, 0 \leq \tilde{m} \leq p-2$.

由上面的觀察, 提昇後的自格函數 Φ 所建構的空間比原來 Daubechies 自格函數 ϕ 所建構的空間包含的多項式多 1, 然而在 $\widetilde{\Phi}$ 方面則少 1, 這也對應到凌波函數上, 在平滑度上, Ψ 優於 ψ; 在消散速度方面, $\tilde{\Phi}$ 優於 ψ . 事實上, 在一般的雙的交凌波系統中, 都有類似上面的性質, 因此我們希望將下面的性質推廣到一般的雙正交凌波系統中.

首先, 定義一組雙正交自格函數

$$\{\Phi_{(N,\widetilde{N})}, \widetilde{\Phi}_{(N,\widetilde{N})}\}, \quad \text{for } N + \widetilde{N} = 2p, \ p = 1, 2, \ldots$$

其中 $N, \widetilde{N}$ 分別代表 $V_0, \widetilde{V_0}$ 包含了 $N-1$ 階多項式與 $\widetilde{N}-1$ 階多項式.

Theorem 1.2 若 $p \geq 2$, $\Phi_{(N,\tilde{N})}$ 與 $\tilde{\Phi}_{(N,\tilde{N})}$ 爲雙正交系統下 p 階自格函數, 則

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} M_k \widetilde{M}_{n-k} \quad n = 1, \ldots, m,\ m = \max(N, \tilde{N}) \tag{1.34}$$

在證明定理 (1.2) 之前, 我們先介紹下面的引理,

Lemma 1.1 假設 $0 \leq l \leq n-1,\ n \in \mathrm{N}$ 則

$$\sum_{i=l}^{n-1} (-1)^{i-l} \binom{n}{i} \binom{i}{l} = (-1)^{n-l+1} \binom{n}{n-l} \quad .$$

proof:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=l}^{n-1} (-1)^{i-l} \binom{n}{i} \binom{i}{l} = \sum_{i=l}^{n-1} (-1)^{i-l} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{i!}{l!(i-l)!} \\
&= \sum_{i=l}^{n-1} (-1)^{i-l} \frac{(n-l)!}{(n-i)(i-l)!} \frac{n!}{l!(n-l)!} = \left[\sum_{i=l}^{n-1} (-1)^{i-l} \binom{n-l}{n-i} \right] \binom{n}{n-l} \\
&= \left[\sum_{i=0}^{n-l-1} (-1)^{i} \binom{n-l}{i} \right] \binom{n}{n-l} = \left[\sum_{i=0}^{n-l} (-1)^{i} \binom{n-l}{i} - (-1)^{n-l} \binom{n-l}{n-l} \right] \binom{n}{n-l} \\
&= (-1)^{n-l+1} \binom{n}{n-l}
\end{aligned} .$$

現在來證明 Theorem 1.2

proof: 爲了方便, 我們令 $\Phi = \Phi_{(N,\tilde{N})}, \tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_{N,\tilde{N}}$, 並且假設 $N \geq \tilde{N}$. 對任意 $k \in Z$, 考慮以下的積分

$$\int x^n \Phi(x) \Phi(x-k)\, dx, \qquad n = 1 \ldots m$$

則

$$\begin{aligned}
&\int x^n \Phi(x) \tilde{\Phi}(x+k)\, dx \\
&= \int (x+k)^n \Phi(x-k) \tilde{\Phi}(x)\, dx \\
&= \int \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} x^{n-i} k^i \right) \Phi(x-k) \tilde{\Phi}(x)\, dx + (-1)^n k \int \Phi(x-k) \tilde{\Phi}(x)\, dx \\
&= \int \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} x^{n-i} k^i \right) \Phi(x-k) \tilde{\Phi}(x)\, dx
\end{aligned}$$

其中最後一個等式是因爲 $\{\Phi(x), \tilde{\Phi}(x-k)\}$ 互相正交的性質. 因此

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int x^n \Phi(x) \tilde{\Phi}(x+k)\, dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} x^{n-i} k^i \right) \Phi(x-k) \tilde{\Phi}(x)\, dx$$

整理後得到

$$\int x^n \Phi(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(x+k)\, dx = \int \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} x^{n-i} \tilde{\Phi}(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^i \Phi(x-k)\, dx$$

利用 Theorem1.1, 則

$$\begin{aligned} \int x^n \Phi(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} \int (-1)^i \binom{n}{i} x^{n-i} \tilde{\Phi}(x) \left(\sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{i}{k} M_k x^{i-k} \right) dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{i} (-1)^{k+i} \binom{i}{k} \binom{n}{i} M_k \int x^{n-k} \tilde{\Phi}(x)\, dx \end{aligned}$$

再由動量的定義, 並展開

$$M_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=k}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{i}{k} \right) \widetilde{M}_{n-k} M_k$$

利用 Lemma1.3, 即得

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} M_k \widetilde{M}_{n-k}$$

利用同樣的步驟,一樣可以在$N \le \tilde{N}$得到同樣的結果. 則 Theorem 1.2 得証.

如此我們若以知 $\Phi(x)$ 的對量 M_n, 則可以較快算出對偶自格函數 $\widetilde{\Phi}(x)$ 的動量 $\widetilde{M}_n$.

第二章 有限元素法

第二章我們以 Poisson 與 Helmholtz 方程爲例, 利用傳統的有限元素法, 將微分方程化微弱解型式, 再以分片 1 階基底函數 $\phi(x)$ 將它轉變爲線性聯立方程式 $Au = F$, 然後求出逼近解 $u_h(x) = \sum u_i \phi_i(x)$. 從一些文獻中, 我們知道矩陣 A 的條件數 $\kappa(A)$ 與逼近解 u_h 的誤差都會與網格的尺度有關, 而且兩者有其對應的性質.

2-1 矩陣條件

在我們介紹 Galerkin 方法之前, 需對矩陣所生成的誤差有所了解, 基本上利用有限元素法把一微分方程轉換爲解線性聯立方程 $Au = b$ 的問題, 理論上, 只要方陣 A 是可逆矩陣 (invertible), 則對於任意的 b, 我們有唯一解 u. 然而在實際的運用上, 我們必須考慮更深一層的因素. 例如解數值近似解的過程中, $\tilde{u}$ 是 $Au = b$ 的近似解, 通常殘量 (residue) $r = b - A\tilde{u}$ 很小, 則似乎 $u - \tilde{u}$ 也會很小, 但是在某些矩陣系統卻沒有這種性質, 以致近似解會出現嚴重的誤差. 而這些因素中, 最重要的課題就是條件數, 因此在介紹數值方法之前需對條件數有所認識.

Definition 2.1 假設 $\|\cdot\|$ 是 n 維向量的一種範數, 矩陣 A 的維度是 $n \times n$. 定義矩陣範數 $\|A\|$ 爲

$$\|A\| = \sup \frac{\|Az\|}{\|z\|}, \tag{2.1}$$

其中 z 爲非零 n 維向量.

因此由上面的定義, 若 A 的範數存在, 則可知 Az 是有界的,

$$\|Az\| \leq \|A\| \, \|z\|. \tag{2.2}$$

Definition 2.2 可逆矩陣 A 相對於範數 $\|\cdot\|$ 的條件數 (condition number) 爲

$$\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|. \tag{2.3}$$

我們不難去證明條件數常數不變性, 也就是 $\kappa(cA) = \kappa(A)$ 對於 $c \neq 0$. 並且有

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| = \kappa(A).$$

Theorem 2.3 假設 A 爲 $n \times n$ 的正規可逆矩陣 (也就是$AA^T = A^T A$), 令

$$|\delta|_{\max} = \max\{|\delta| : \delta \text{ is an eigenvalue of } A\}$$

與

$$|\delta|_{\min} = \min\{|\delta| : \delta \text{ is an eigenvalue of } A\}$$

則

$$\kappa(A) = \frac{|\delta|_{\max}}{|\delta|_{\min}}.$$

proof:(參見 Frazier [11]).

接下來, 我們介紹一個重要的定理, 可了解條件數與誤差間的關係.

Theorem 2.4 假設 $\tilde{u}$ 是 $Au = b$ 的一近似解, A 爲可逆矩陣, 且 r 爲 $\tilde{u}$ 的殘量. 經過整理, 則對任一範數有相對誤差,

$$\frac{\|u - \tilde{u}\|}{\|u\|} \leq \kappa(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}, \quad u \neq 0 \text{ and } b \neq 0. \tag{2.4}$$

proof: 因爲 $b = Au$, 由 (2.2) 式我們有

$$\|b\| \leq \|A\|\,\|u\| \tag{2.5}$$

同樣的, 因爲 $u - \tilde{u} = A^{-1}r$,

$$\|u - \tilde{u}\| \leq \|A^{-1}\|\,\|r\|. \tag{2.6}$$

將 (2.5) 與 (2.6) 相乘,

$$\|b\|\,\|u - \tilde{u}\| \leq \kappa(A)(A)\|u\|\,\|r\|,$$

再經過移項整整理即可得証.

上面定理提供我們相對誤差與殘量之間的關聯指標. 由不等式 (2.4) 知道此相對誤差與相對剩餘 $\|r|/\|b\|$ 之間的倍數就是 $\kappa(A)$, 並且可藉由條件數的分析判斷矩陣系統是否穩定, 尤其在條件數很小時 (i.e near 1), 會有較精確的近似解, 則我們稱爲良好矩陣 (well-condition matrix); 當矩陣條件數很大時, 爲了要使近似解更準確, 我們通常會找有較小條件數的矩陣系統來取代原來的矩陣系統 $Au = b$, 其中一種方法爲預條件處理, 也就是乘上一個預條件矩陣 (preconditioning matrix) B, 我們會得到一等價的系統 $BAu = Bb$, 使得條件數會有 $\kappa(BA) < \kappa(A)(A)$ 的關係. 但是, 若原來的矩陣 A 是對稱矩陣, 通常乘上 B 所得到的新矩陣 BA 會喪失對稱矩陣的良好性質, 因此我們通常會將預處理的方法轉變爲

$$\tilde{A}\tilde{u} = \tilde{b},$$

其中 $\tilde{A} = BAB^T, \tilde{u} = B^{-T}u, \tilde{b} = Bb$, 則矩陣 $\tilde{A}$ 還是對稱矩陣, 只要滿足 $\kappa(\tilde{A}) < \kappa(A)$, 可由上式求得 $\tilde{u}$, 即可得到較精確的近似解 $u = B^T\tilde{u}$.

2-2 Galerkin 方法

這一節, 我們以 Helmholtz 方程爲例, 選取週期化的邊界條件, 利用傳統的 Galerkin 方法, 將微分方程轉變爲線性聯立方程.

我們選取

$$\begin{aligned} &u''(x) + k^2 u(x) = -f(x), \qquad x \in \Omega \\ &u(x) \text{ 是 } 1 \text{ 週期函數} \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中 $f(x) = 0$, $k = 2n\pi$, $n \in N$, 則 方程式的通解爲 $u = a\cos(kx) + b\sin(kx)$, $a, b \in C$, 爲確保有唯一解 $u = \sin(kx)$, 必須再加入附加條件

$$\int_0^1 xu\,dx = -\frac{1}{k}, \tag{2.8}$$

$$\int_0^1 x^2 u\,dx = -\frac{1}{k}, \tag{2.9}$$

現在, 我們將一維的區間 $\Omega = [0,1]$ 上用 $n+1$ 個點等分成 n 份,

$$X_h = \{x_j = \frac{j}{n} \mid j = 0, 1, \ldots, n\} \subset [0,1]$$

每一等份的寬度 $h = \frac{1}{n}$, x_i 稱爲節點. 令基底函數 $\phi_i \in H^1(0,1), i = 0, 1, \ldots, n$, 是階數小於等於 p 的多項式, 則 $S_h^p(\Omega) = \text{span}\{\phi_0, \phi_2, \ldots, \phi_n\} \subset H^1(\Omega)$ 稱爲有限元子空間. 令

$$V_h^p := \{v \in S_h^p(0,1) \mid v(x) \text{ 符合週期化的邊界條件}\}$$

定義在 V_h^p 上的函數稱爲網格函數 (mesh function). 如果考慮網格空間 V_h^p, 則 (2.7) 可以和以下敘述等價：求 $u \in V_h^p$ 使得

$$\begin{aligned} B(u,v) &= \int_0^1 (u'(x)\bar{v}'(x) - k^2 u(x)\bar{v}(x)dx = F(v), \\ F(v) &= \int_0^1 f(x)\bar{v}(x)dx, \qquad \forall v \in V_h^p, v(0) = v(1). \end{aligned} \tag{2.10}$$

想法上是用 Galerkin 法解 (2.7). 現在, 我們以 p 階網格空間 V_h^p 爲基底空間, 則對於 $u_h \in V_h^p$ 即有 u_i, 對於 $i = 0, \ldots, N-1$ 使得

$$u_h = \sum u_i \phi_i \tag{2.11}$$

則我們可以把 (2.10) 改寫成：求 $u_h \in V_h^p$ 使得

$$\int_0^1 (u_h' \bar{v_h}' - k^2 u_h \bar{v_h})\,dx = \int_0^1 f\bar{v_h}\,dx, \quad \forall v_h \in V_h^p$$

因爲 $\dim V_h^p = N$, 所以上式又等價於

$$\int_0^1 (u_h' \bar{\phi_n}' - k^2 u_h \bar{\phi_n} \, dx) = \int_0^1 f \bar{\phi_n} \, dx, \quad \forall n = 0, \ldots, N-1$$

現在將 (2.11) 代入可得

$$\sum_{i=0}^{N-1} u_i (\int_0^1 \phi_i' \phi_j' \, dx - k^2 \int_0^1 \phi_i \phi_j \, dx) = \int_0^1 f \phi_j \, dx, \quad \forall j = 0, \ldots, N-1$$

令質量陣的元素

$$M_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j \, dx \quad 0 \le i, j \le N-1,$$

剛度矩陣的元素

$$S_{ij} = \int_0^1 \phi_i' \phi_j' \, dx \quad 0 \le i, j \le N-1,$$

負載向量的元素

$$F_j = \int_0^1 f \phi_j dx \quad 0 \le j \le N-1.$$

即可將方程式轉變爲矩陣系統

$$A = ([S] - k^2 [M])$$

$$Au = F$$

其中 u 爲 u_i 組成的未知向量, A 是一個 $N \times N$ 的矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 2S_p(k) & T_p(k) & & & T_p(k) \\ T_p(k) & S_p(k) & T_p(k) & & \\ & & \ddots & & \\ & & T_p(k) & S_p(k) & T_p(k) \\ T_p(k) & & & T_p(k) & 2S_p(k) \end{bmatrix}$$

$S_p(k)$ 與 $T_p(k)$ 是 k 的實值有理 (rational) 多項式函數, 其中矩陣 A 的元素 $A_{1,N}$ 與 $A_{N,1}$ 是因爲基底週期化所造成的. 但爲了確保有唯一解, 必須將條件 (2.8) 與 (2.9) 離散化分別取代 A 與 F 的最後兩列.

2-3 條件數分析

這一節我們以一階分片多項式爲基底函數的 Galerkin 法. 並給定週期性的附加條件, 我們選擇 1-norm 的條件數定義

$$\kappa(A)(S) = \|S\|_1 \|S^{-1}\|_1.$$

以較簡單的 Poisson 方程下手, 根據 Fried[4] 中提到有關剛度矩陣的條件數與網格大小有一關係存在, 也就是

$$c_1 h^{-p} \le \kappa(S) \le c_2 h^{-p}, \tag{2.14}$$

p 是與多項式的階數有關的固定的常數, c_1, c_2 是常數. 我們更一步發現 Helmholtz 方程所組成的矩陣方程 $Au = b$, 也有類似的性質.

現在我討論區間 $\Omega = (0,1)$. 令 $N = 2^l$, 其中 l 是正整數. 我們將 Ω 切成 N 等份, 每一等分的寬度爲 $h = 1/N$, 則有節點 $x_0 = 0, x_1, \ldots, x_N = 1$. 我們以一階分片多項式爲基底 $\phi_i, i = 0, \ldots, N-1$, 採用週期性邊界條件 (因爲週期性的關係, ϕ_0 與 ϕ_N 兩個基底函數首尾相連, 視爲同一個函數). 此時 $\phi_0(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_{N-1}$ 爲基底函數.

首先, 我們先由較簡單的 Poisson 方程下手, 我們考慮

$$-u''(x) = f(x), \qquad x \in \Omega,$$

爲確保唯一解, 我們通常加入配合週期化的附加條件

$$\int_0^1 u\,dx = 1 \tag*{(2.15),}$$

假如 $f(x) = 1$, 則真解爲

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{11}{12}.$$

令

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \phi_i(x)$$

爲有限元解. 則剛度矩陣的元素是

$$S_{ij} = \int_0^1 \phi_i' \phi_j'\,dx, \qquad 1 \le i, j \le N. \tag{2.16}$$

經過簡單的計算, 我們得到 $S = \frac{1}{h}\mathrm{diag}(-1, 2, -1), S_{1,N} = -\frac{1}{h}, S_{N,1} = -\frac{1}{h}$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & S_{1,N} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & S_{32} & S_{33} & S_{34} & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ S_{N,1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & S_{N,N-1} & S_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_0 \\ \tilde{F}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \tilde{F}_{N-1} \end{pmatrix}$$

但是, 這樣的 S 顯然是不可逆的 (S 的每一列之和爲 0 向量.). 原因是週期性邊界條件本身不能決定唯一解, 很顯然的, 如果 $u_1(x)$ 是一個符合 $-u''(x) = f(x)$ 的週期解, 那麼

$u = u_1 + c$ 也必然是一個符合 $-u''(x) = f(x)$ 的週期解. 所以我們必須將 (2.15) 的條件, 由 (2.15) 這個矩陣推導出

$$\sum_{i=1}^{N-1} u_i \int_0^1 \phi_i dx = \sum_{i=1}^{N-1} h u_i = 1$$

並取代 S 與 F 的最後一列, 則矩陣 S 最後一列的元素爲 $S(N,:) = (h, h, \ldots, h)$, 很顯然, 這樣的矩陣非常不平衡, 因爲它的最後一列幾乎是 0 向量 (當網格越切越小時). 則以下是我們的實驗結果:

N	8	16	32	64	128	256	512
$\kappa(S)$	257	1025	4097	16385	262145	1048577	4194305
$\kappa(S)/N^2$	4.0625	4.0039	4.0010	4.0002	4.0001	4.0000	4.0000

由上面的觀察, 我們發現網格大小與條件數之間的關係爲

$$c_1 h^{-2} \leq \kappa(S) \leq c_2 h^{-2},$$

c_1, c_2 是常數. 也由於矩陣不平衡, 會使得條件數變大, 因此我們可以加最後一列的 h^2 移除到右邊, 則最後一列變爲 $\frac{1}{h}(1, 1, \ldots, 1)$. 這樣矩陣就平衡多了. 則我們得到以下的實驗結果:

N	8	16	32	64	128	256	512
$\kappa(S)$	20	80	320	1280	5120	20480	327680
$\kappa(S)/N^2$	0.3125	0.3125	0.3125	0.3125	0.3125	0.3125	0.3125

雖然結果已經改善不少了, 但是還是以 N^2 的速度成長.

現在回到 Helmholtz 方程方面的問題, 我們考慮問題 (2.7), 一樣選用週期性邊界條件, 令

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \phi_i(x)$$

爲有限元解. 利用 (2.10) 式, 我們得到了剛度矩陣 S 與質量矩陣 M, 其中 S 的形式如同 (2.16) 式, 在質量矩陣方面, 其元素爲

$$M_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j dx, \qquad 1 \leq i, j \leq N-1.$$

經過簡單的計算, 我們得到 $M = \mathrm{diag}(\frac{h}{6}, \frac{2h}{3}, \frac{h}{6}), M_{1,N} = \frac{h}{6}, M_{N,1} = \frac{h}{6}$,

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & M_{1N} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & \\ M_{N1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & M_{NN-1} & M_{NN} \end{pmatrix}$$

則 Helmholtz 的矩陣方程爲

$$(-S + k^2 M)u = F$$

爲了確保唯一解 $u = \sin(kx)$, 我們必須再加入條件 (2.8) 及 (2.9), 經過離散化與整理之後我們得到下列兩式:

$$\sum_{i=1}^{N-1} u_i \frac{h}{2}(x_{i-1} + x_{i+1}) = -\frac{1}{k}$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} u_i (\frac{1}{2}h^3 - \frac{2}{3}h^2(x_{i-1} + x_{i+1}) + \frac{1}{2}h(x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2)) = -\frac{1}{k}$$

其中 x_i 爲區間 $[0, 1]$ 之間的節點. 利用這兩條等式取代原聯立方程式的最後兩列.

由上面的定義, 我們得到條件數 $\kappa(A)$ 的實驗結果,

$k = 4\pi$

N	8	16	32	64	128	256	512
$\kappa(A)$	2.3688E4	5.2005E4	2.0364E5	8.2005E5	3.2996E6	1.3271E7	5.3233E7
$\kappa(A)/N^2$	370	203	198	200	201	203	203

$k = 8\pi$

N	8	16	32	64	128	256	512
$\kappa(A)$	4.5738E5	2.0208E6	9.0219E5	3.2842E6	1.3132E7	5.2647E7	2.1091E8
$\kappa(A)/N^2$	7.156E3	7.90E3	881	801	801	803	804

由上面的實驗, 我們觀察到條件數 $\kappa(A)$ 以 N^2 的速度穩定成長是大概在 $kh < 1$ 後才發生的. 在這之前, 也就是當 $kh > 1$ 時, 條件數並不穩定成長, 這剛好也對應了有限元解與真解真間誤差的關係 (我們在下一節有詳細的介紹), 可能是因爲真解的震盪次數多於基底元素的個數, 無法探測到解震盪的次數, 通常有限元解會與真解的差異甚大, 也直接影響到矩陣 A 的穩定性.

底下我們表現在 k 是 4π、6π、8π 時, 條件數與基底個數的關係圖 :

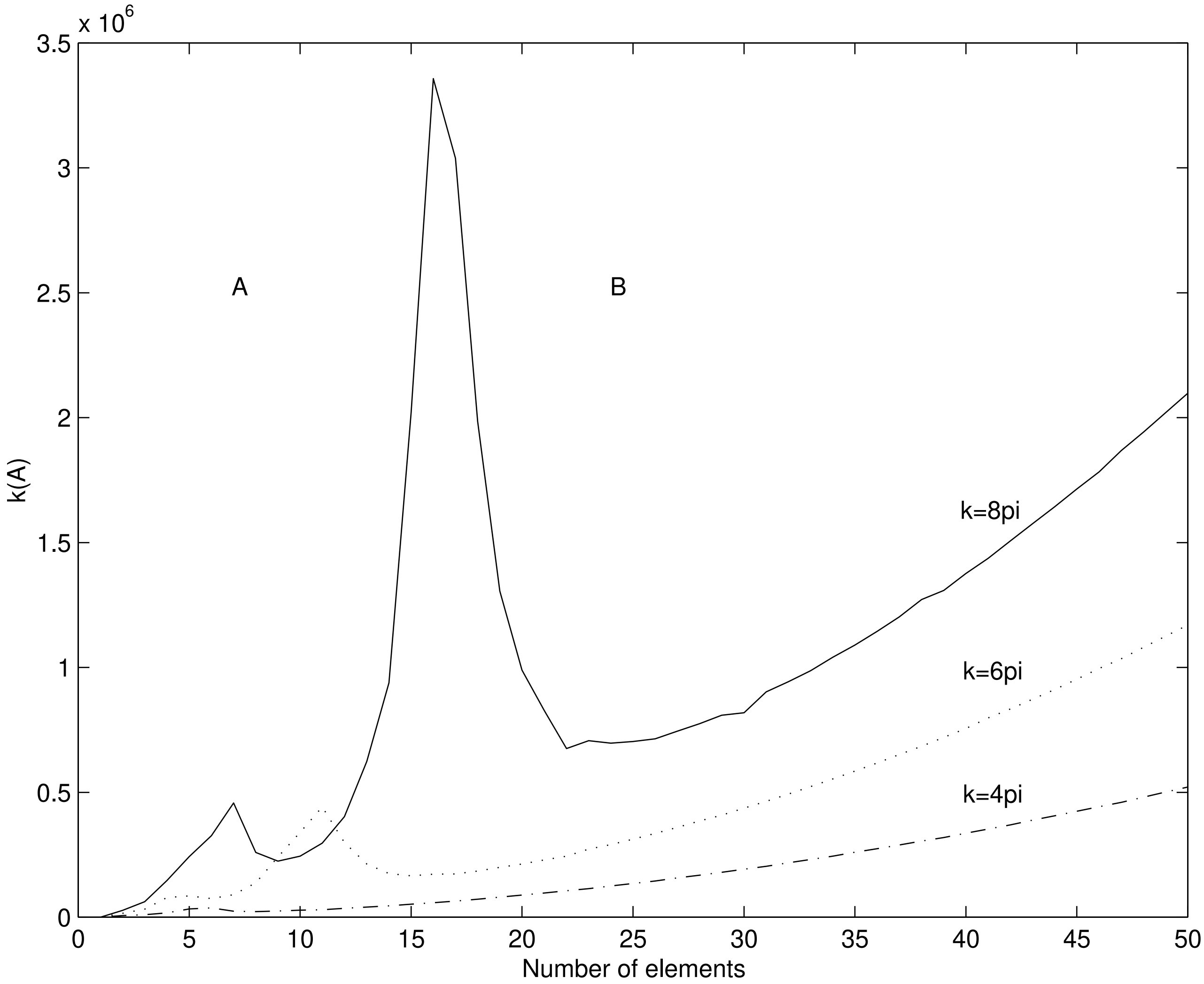

Fig 1

由圖一可以看出當 $kh > 1$ 時條件數震盪的情形, 並與有限元解的誤差有某種對應的關係存在. 以 $k = 8\pi$ 爲例, 我們大概可以將圖一分爲三個部分, 其中 $N < A$ 時剛好對應有限元解是衰退波 (decaying) 的情況, 當 $A < N < B$ 時, 是對應在有限元解是前進波的時候 ; 有限元素解的誤差已超過 100% 做震盪, 此時的條件數的震盪相當大; 當 $N < B$ 時, 條件數已逐漸成 N^2 的速度成長, 此時矩陣材忠實的反應了微分算子的性質, 並且誤差以一定數的數度收斂. 因此, 我們可藉由條件數的分析, 判斷有限元解誤差收斂的情況.

另外, 我們亦發現條件數總會有兩個較大的峰值.

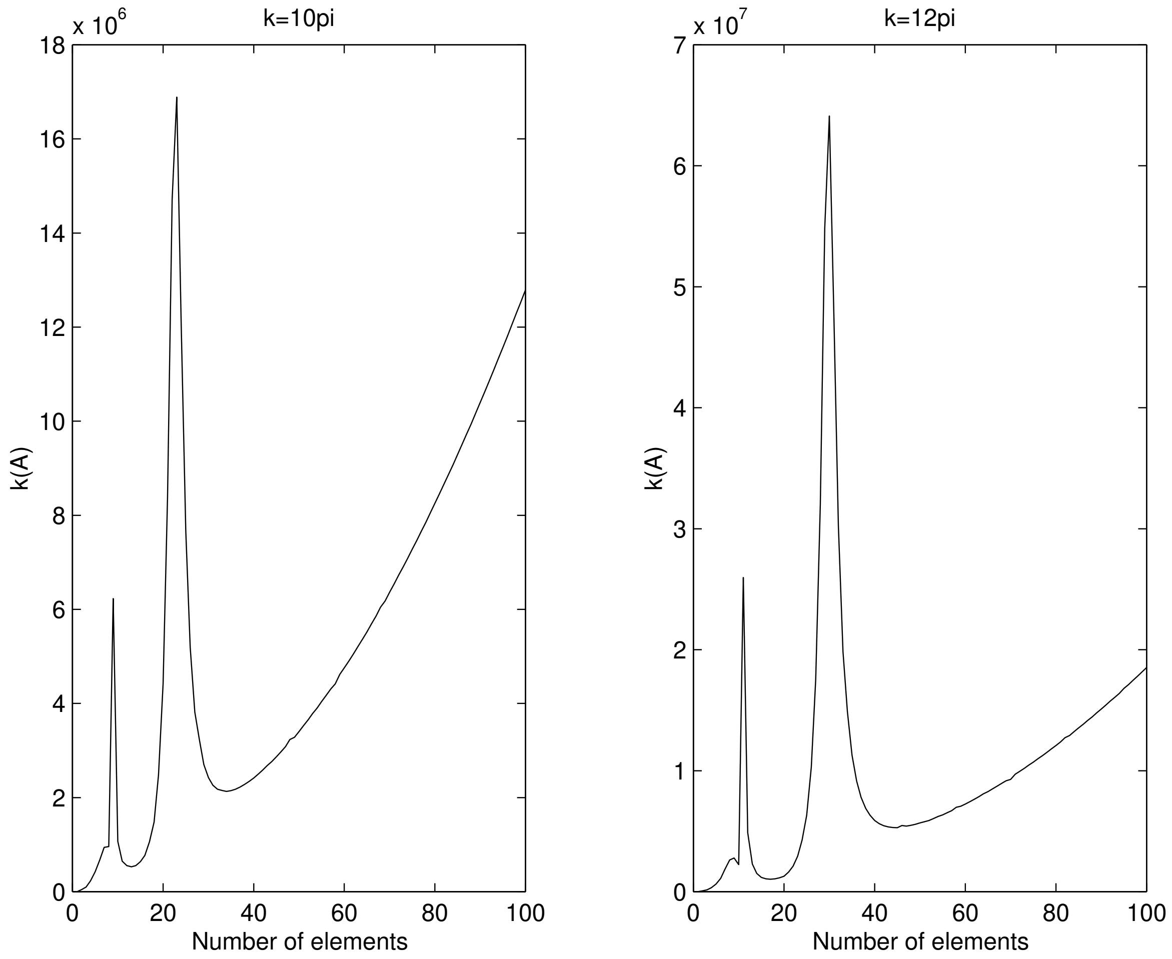

Fig 2

在圖二中, 我們多舉兩個例子, 條件數之於元素個數總會有兩個較大的峰值.

2-4 誤差分析

這一節我們以 Helmholtz 爲例子, 實驗有限元素法的誤差分析. 在有限元解的誤差分析方面, 我們通常會去考慮 L^2 與 H^1 空間的誤差分析.

首先, 在 H^1 空間方面. 我們定義

$$|u_h|_1^2 := \int_0^1 (u_h')^2 dx$$

爲 H^1-seminorm. 由 Douglas [12] 中提到的 quasioptimal 的誤差估計.

Theorem 2.5 (*Asympotic estimate on* V_h^1) 對 (2.7) 式. 令 $f \in L^2(0,1)$, $u \in H^2(0,1)$ 是真解, $u_h \in V_h$ 式有限元解, 假設 h 和 k 滿足下述常數中的分母都是正的, 則

$$|u-u_h|_1 \leq C_s|u|_2.$$

其中

$$C_s := \frac{2(1+(\frac{hk}{2\pi}^2)^{1/2}}{(\frac{1}{2}-6C_1^2k^2h^2(1+k)^2)^{1/2}},$$

和

$$C_1 := \frac{2}{(1-2(1+k)\frac{k^2h^2}{\pi^2})\pi}.$$

在上面的定理中, 必須 h^2k^2, h^2k^3 和 h^2k^4 夠小, C_s 的分母才會是正的. 因此必須滿足

$$hk^2 < c^* = \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

如果 h 和 k 滿足定理中的假設, 那麼有限於解會以最佳逼近解的速度收斂, 也就是說, 在數值實驗中要 hk^2 夠小才會出現 quasioptimal 的性質.

Theorem 2.6 (*Preasympotic estimate on* V_h^1) 若 $f \in L^2(0,1)$, 令 $u \in H^2(0,1)$ 式 (2.10) 式的真解, $u_h \in V_h$ 是 (2.10) 式的有限元解, 如果 $hk \leq 1$, 則

$$|u-u_h|_1 \leq (\frac{h}{\pi}+C(\frac{hk}{\pi})^2)|u|_2, \tag{2.17}$$

其中 C 式和 h, k 無關的常數.

對於問題 (2.7), $u = \sin(kx)$ 爲真解, 則 u 滿足

$$Ak^l|u|_1 \leq \|u^{(l+1)}\| = |u|_{l+1} \leq Bk^l|u|_1,$$

常數 A, B 只與 u 的振幅有關, 我們稱爲解是震盪的. 若 (2.17) 式中的 k^2h 是有界的, 將上面的不等式帶回 (2.17) 式, 則對於震盪解我們有

$$\tilde{e} := \frac{|u-u_h|_1}{|u|_1} \leq \frac{hk}{\pi} + Ck\frac{(hk}{\pi)}^2 \tag{2.18}$$

Definition 2.7 (*Pollution*) 考慮 Helmholtz 方程, 在空間 V 定義範數 norm 爲 $\|.\|_V$ 的變分式, 假設真解 $u \neq 0, u \in V$ 存在且爲一, 有限元解 $u_h \in V_h \subset V$, 並且

$$\tilde{e} := \frac{\|u-u_h\|_v}{\|u\|_v} \leq C(k)\inf_{v\in V_h}\frac{\|u-v\|}{\|u\|}$$

成立. 如果 C 可以寫成

$$C(k) = C_1 + C_2 k^\beta \theta^\gamma$$

其中 $\beta > 0, \gamma \geq 0, \theta = hk$, 而且 C_1, C_2 和 h, k, 無關, 那麼有限元解稱爲 polluted, 而且 $C_2 k^\beta \theta^\gamma$ 被稱爲 pollution 項. 有 pollution 項表式數値解有散設的現象發生, (2.18) 式的右端的項包含振幅誤差 (amplitude error), 而 pollution 項包含了相位誤差 (phase error).

當問題 (2.7) 式中的 $k = 8\pi$, 則有誤差估計

$$\tilde{e} \leq C_1(hk) + C_2 k(hk)^2,$$

其中 C_1, C_2 和 h, k 無關. 以下是誤差分析:

N	8	16	32	64	128	256	512	1024
$\tilde{e_1}$	1.222E6	21.091	0.968	0.203	0.075	0.035	0.017	0.008
$N\tilde{e_1}$	9.773E6	337.455	30.967	12.969	9.626	8.820	8.565	8.464

我們在實驗數據方面, 也有上訴誤差估計的性質, 由 Theorem 2.1 的限制條件, 可粗略估計當 $N \geq k^2/c^* \approx 182$ 時, 有限元解散射的情況已經控制而且是以 $O(N^{-1})$ 穩定收斂 (在圖三中顯示在比 182 更少的元素就已經是以 N^{-1} 的速度收斂); 當 $N \leq k^2/c^*$ 時, 誤差估計中的 pollution 項的影響遠大於振幅誤差, 此時有限元解的震盪劇烈, 並且誤差甚大. 底下是以 log-log 座標所作的圖:

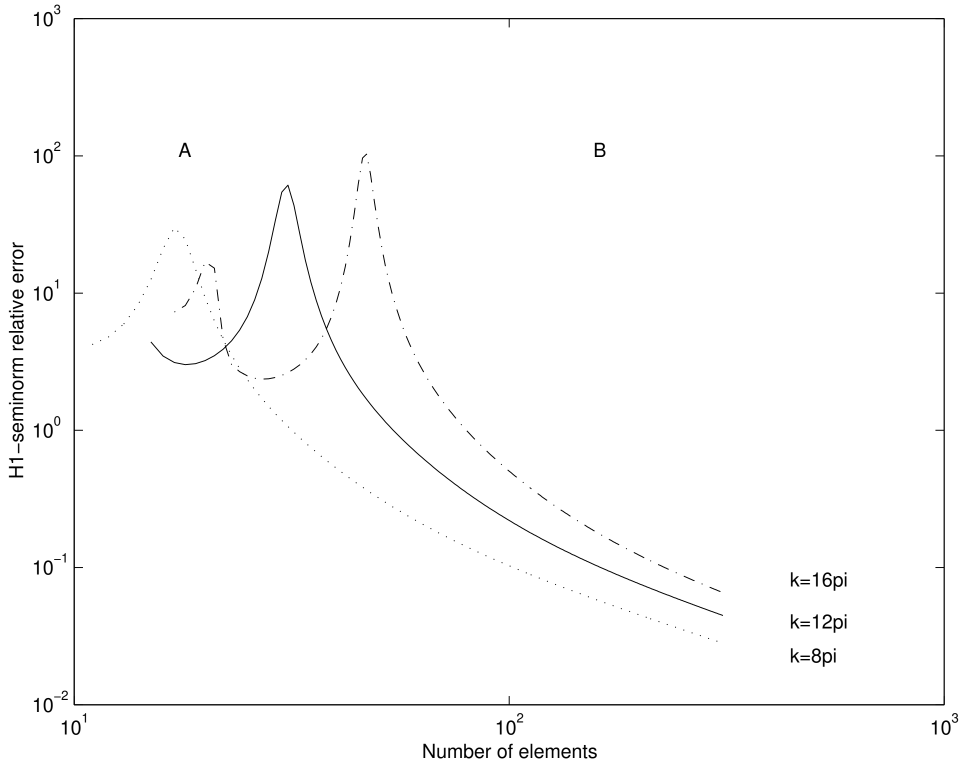

Fig 3

在圖三中, 當 k 值越大相對誤差診震盪越嚴重. 以 $k = 16\pi$ 爲例, 可將圖三分爲三個部分, 當 $N < A$ 時的有限元解是衰退波; 在 $A < N < B$ 時有限元解爲前進波, 誤差是超過 100% 作震盪, 此時的誤差估計中的 pollution 項大於振幅誤差; 當 $N > B$ 時 pollution 項已經受到控制, 收斂數度是以 $O(N^{-1})$ 穩定收斂. 這剛好與條件數的表現互相對應.

在 L^2 誤差方面, 首先我們考慮 L^2-norm

$$\|u\| = (\int_0^1 |u|^2 dx)^{1/2}.$$

Theorem 2.8 令 u 與 u_h 分別是 (2.10) 式的真解與分片線性有限元解, 假設 $hk < 1$, $f \in L^2(\Omega)$, 則

$$\|u - u_h\| \leq (1 + Ck)(\frac{h}{\pi})^2 |u|_2.$$

由 Theorem 2.8 可知道, 在 L^2 的空間中, 有限元解的最佳收斂速度爲 $O(N^{-2})$, 底下是我們的數值實驗,

N	8	16	32	64	128	256	512	1024
$\tilde{e}_2$	6.477	47.505	0.316	0.0365	0.0086	0.0021	5.3566E-4	1.3388E-4
$N^2\tilde{e}_2$	414.53	3.2946e+3	323.84	149.37	141.42	140.58	140.42	140.38

由上面的數據可知道, L^2-norm 與 H^1-seminorm 的誤差估計一開始都有類似上下震盪發生, 但開始收斂後, H^1-seminorm 會趨向穩定的 N^{-1}, 而 L^2-norm 則以固定的 n^{-2} 的數度收斂.

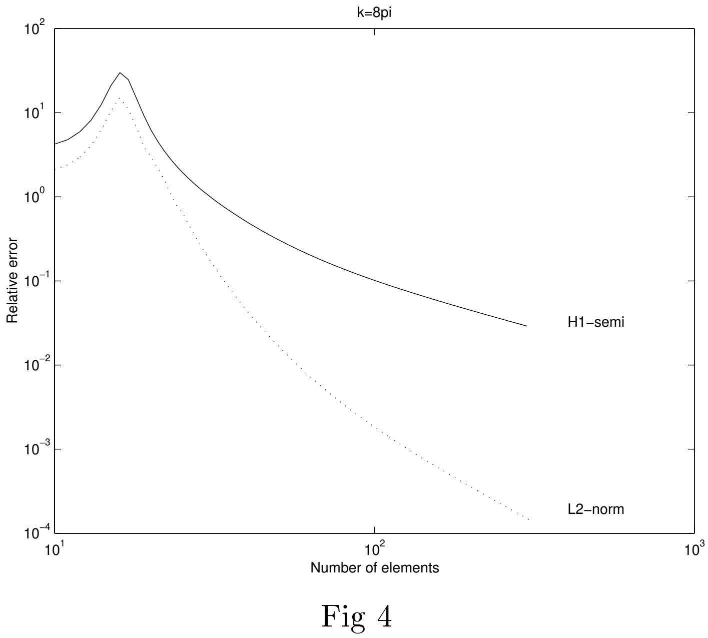

Fig 4

上圖是 $k = 8\pi$ 時的 L^2-norm 與 H^1-seminorm 的相對誤差.

第三章 Wavelet-Galerkin 方法

本章將介紹另一種 Galerkin 方法的基底: 提昇後的自格函數, 它不但具有一般有限元基底的良好性質 (連續性, 可微性與局部性), 並且具有導函數平移後幾乎正交與多重解析的能力. 我們先從較簡單的 Poisson 方程下手, 討論其對應的剛度矩陣 (stiffness matrix); 接著按照同樣的步驟, 應用在 Helmholtz 方程, 再推導出質量矩陣 (mass matrix). 並且使用 Wavelet-Galerkin 方法與 (1.19) 的性質, 使得剛度矩陣的條件數降低. 爲了與第二章比較, 我們選用相同的問題.

3-1 使用提昇自格函數的 Galerkin 方法

首先, 在 Poisson 方程方面, 我們一樣採用週期性的邊界條件, 我們考慮

$$\begin{gathered} -u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \\ u(x) \text{ 是1-週期函數} \end{gathered} \tag{3.1}$$

其中 $f(x) \in C^1(0,1)$ (爲了確保有唯一解, 我們通常需要再加入一些條件, 稍後在造出聯立方程的時候, 將有詳細的介紹).

我們選用 $p = 2$ 之提昇且週期化的自格函數 $\Phi(x)$ 爲例, 以第 j 層的自格函數 $\Phi_{j,k}$ 爲基底, 建構 V_j 空間,

$$V_j = \operatorname{span}\{\Phi_{j,k} \mid k = 0, \dots, 2^j - 1\}.$$

對於 $u_j \in V_j$ 有未知的 u_i, 使得

$$u_j = \sum_k u_k \Phi_{j,k}. \tag{3.2}$$

我們將 u_j 代入 (3.1) 式中, 得到

$$\int_0^1 (u_j'' + f(x))\Phi_{j,n}(x)dx = 0, \qquad 0 \le n \le N-1, \tag{3.3}$$

我們對 u_j 的導數項作分部積分推得

$$\Phi_{j,n}u_j'\Big|_0^1 - \int_0^1 u_j'\Phi_{j,n}'\,dx + \int_0^1 f(x)\Phi_{j,n}\,dx = 0, \qquad 0 \le n \le N-1 \tag{3.4}$$

上式等號左手邊第一項即爲自然邊界條件, 由於我們將基底 $\Phi_{j,n}$ 週期化的關係, 跨過 0 和 1 這兩端點的基底函數其實爲同一個, 因此這一項在方程中互相抵消掉了. 利用 u_j 的定義, 我們知道

$$u_j' = \sum_{m=0}^{N-1} \Phi_{j,m}' u_m = \sum_{m=0}^{N-1} u_m 2^{\frac{3j}{2}} \Phi'(2^j x - m), \tag{3.5}$$

將 (3.5) 式代入 (3.4) 式, 得到

$$2^{3j}\sum_{m=0}^{N-1}u_m\int_0^1 \Phi'(2^jx-m)\Phi'(2^jx-n)\,dx = 2^{\frac{j}{2}}\int_0^1 f(x)\Phi(2^jx-n)\,dx, \tag{3.6}$$

其中 (u_m) 爲未知向量. 對自格函數積分時, 我們可以利用變數變換將第 j 層轉換成第 0 層作積分, 就是以下的連接係數:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Phi'(2^jx-m)\Phi'(2^jx-n)\,dx &= \frac{1}{2^j}\int_0^4 \Phi'(x)\Phi'(x+\ell)\,dx,\\ \int_0^1 f(x)\Phi(2^jx-n)\,dx &= \frac{1}{2^j}\int_0^4 f(\frac{x+m}{2^j})\Phi(x+\ell)\,dx,\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中 $\ell = m-n$. 代回 (3.6) 式中, 就是

$$\sum_{m=0}^{N-1}u_m\int_0^4 \Phi'(x)\Phi'(x+(m-n))dx = 2^{\frac{-5j}{2}}\int_0^4 f(\frac{x+m}{2^j})\Phi(x+(m-n))dx.$$

令 $u=(u_m)$, 則得到一聯立方程式

$$Su = 2^{\frac{-5j}{2}}F,$$

其中 S 爲剛度矩陣, 其矩陣元素爲

$$S_{m,n} = \int_0^4 \Phi'(x)\Phi'(x+(m-n))\,dx, \quad 0\le m,n\le N-1 \tag{3.8}$$

負載向量 F 的元素爲

$$F_n = \int_0^4 f(\frac{x+m}{2^j})\Phi(x+(m-n))dx. \qquad 0\le n\le N-1 \tag{3.9}$$

在剛度矩陣方面, 因爲基底導函數 Φ' 平移幾乎正交的性質與基底週期化, 則剛度矩陣的形式爲

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1\\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{N\times N} \tag{3.10}$$

其中 $S_{1,N} = S_{N,1} = -1$ 是週期化所造成的. 如此, 我們已經將 Poisson 方程轉變爲解 $Su = F$ 的線性聯立方程. 但是週期化造成一個嚴重的問題, 就是矩陣 S 是一個 singular 矩陣 (很明顯地, S 的列向量之和爲零向量), 我們無法得到 S^{-1}, 當然也無法求得近似解 u. 所以我們必須再給定一個唯一解的條件, 通常是

$$\int_0^1 u_j \, dx = 1. \tag{3.11}$$

根據 (3.2) 式我們得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_h \, dx &= 2^{\frac{j}{2}} \sum_{m=0}^{N-1} u_m \int_0^1 \Phi(2^j x - m) \, dx \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} u_m 2^{\frac{-j}{2}} \int_0^4 \Phi(x) \, dx \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} u_m 2^{\frac{-j}{2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{m=0}^{N-1} u_m = 2^{\frac{j}{2}}.$$

將上式取代矩陣 S 的最後一列, 族 S 變成可逆矩陣, 即可得到唯一解.

接下來我們來看看 Helmholtz 方程, 一樣採用週期化的附加條件, 考慮

$$\begin{aligned}&u''(x) + k^2 u(x) = -f(x), \quad x \in (0,1) \\ &u(x) \text{ 是1-週期函數},\end{aligned} \tag{3.12}$$

其中 $f(x) \in C^1(0,1)$, $k = 2n\pi$, $n \in N$ (爲了確保有唯一解, 我們通常需要再加入一些條件, 稍後在造出聯立方程的時候, 將有詳細的介紹).

令

$$u_j = \sum u_m \Phi_{j,m}, \tag{3.13}$$

爲有限元解. 重複前面的步驟, 我們一樣將 u_j 代入 (3.12) 式中, 得

$$\int_0^1 (u_j'' + k^2 u_j + f(x)) \Phi_{j,n}(x) dx = 0, \qquad 0 \le n \le N-1, \tag{3.14}$$

我們對 u_j 的導數項作分部積分得到

$$\Phi_{j,n} u_j' \Big|_0^1 - \int_0^1 u_j' \Phi_{j,n}' dx + k^2 \int_0^1 u_j \Phi_{j,n} \int_0^1 f(x) \Phi_{j,n} dx = 0 \qquad 0 \le n \le N-1 \tag{3.15}$$

利用週期性的邊界條與 (3.5) 式, 整理後得到

$$2^{3j}\sum_{m=0}^{N-1}u_m\int_0^1\Phi'(2^jx-m)\Phi'(2^jx-n)\,dx-2^jk^2\sum_{m=0}^{N-1}u_m\Phi(2^jx-m)\Phi(2^jx-n)\,dx$$
$$=2^{\frac{j}{2}}\int_0^1 f(x)\Phi(2^jx-n)\,dx, \tag{3.16}$$

其中 u_m 爲未知節點值. 要求 (3.16) 式的積分一樣可以將第 j 層轉變爲第 0 層, 這樣我可以得到 (3.7) 式中的兩個式與

$$\int_0^1\Phi(2^jx-m)\Phi(2^jx-n)\,dx=\frac{1}{2^j}\int_0^4\Phi(x)\Phi(x+\ell)\,dx$$

其中 $\ell=m-n$. 代回 (3.16) 式中我們得到

$$2^{3j}\sum_{m=0}^{N-1}u_m\int_0^4\Phi'(x)\Phi'(x+(m-n))\,dx-2^jk^2\sum_{m=0}^{N-1}u_m\int_0^4\Phi(x)\Phi(x+(m-n))\,dx$$
$$=2^{\frac{j}{2}}\int_0^4 f(\frac{x+m}{2^j})\Phi(x+(m-n))\,dx,$$

令 $u=u_m$, 則可得到一線性聯立方程式

$$(2^{3j}S-2^jk^2M)u=F$$

其中 S 與 F 分別是剛度矩陣與負載向量, 且形式與 (3.9) 和 (3.10) 相同, 另外還有矩陣 M 爲質量矩陣, 其元素爲

$$m_{m,n}=\int_0^4\Phi(x)\Phi(x+(m-n))dx,\qquad 0\le m,n\le N-1 \tag{3.17}$$

在質量矩陣 M 方面, $\Phi(x)$ 與 $\Phi(x-k)$ 的涵蓋實際有相交的的時候爲, 才對應積分非零元素, 只有

$$\begin{aligned}s_{m,n}&=2^{\frac{j}{2}}\int_0^4\Phi(x)\Phi(x+\ell)\,dx\\&=2^{\frac{j}{2}}\int_0^4\Phi(x-\ell)\Phi(x)\,dx, \quad 0\le m,n\le N-1\\&=s_{n,m}\end{aligned}$$

且

$$\ell=m-n=0,-1,-2,-3,-N+3,-N+2,-N+1,\quad 0\le m,n\le N-1.$$

看似需要七種積分值, 但是實際上僅有四種形式, 分別是

$$m_{n,n} = 2^{\frac{j}{2}} \int_0^4 \Phi(x)\Phi(x)dx$$

$$m_{n,n+1} = m_{1,1+2^j-1} = 2^{\frac{j}{2}} \int_1^4 \Phi(x)\Phi(x-1)dx$$

$$m_{n,n+2} = m_{i,i+2^j-2} = 2^{\frac{j}{2}} \int_2^4 \Phi(x)\Phi(x-2)dx \qquad i = 1,2$$

$$m_{n,n+3} = m_{i,i+2^j-3} = 2^{\frac{j}{2}} \int_3^4 \Phi(x)\Phi(x-3)dx \qquad i = 1,2,3$$

其中 $0 \leq n \leq N$. 當 $k = 0, -1, -2, -3$ 時,這些元素完全落在區間 $\Omega = [0,1]$ 裡面, 其餘的是因爲 Φ 的涵蓋爲 4 和週期化的關係, 跨過邊界的三個元素基底都會與第一個元素基底有交集, 因此基底函數積分仍然有值. 這些週期化所形成的元素會出現在質量矩陣的右上角和左下角, 並且形成一個 3×3 上三角和下三角矩陣. 原本在 [0,1] 內的元素會在對角上形成七條對角化矩陣, 爲了方便表示, 我們令 $m_{n,n} = a, m_{n,n+1} = b, m_{n,n+2} = c, m_{n,n+3} = d$, 則我們有質量矩陣 M

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & \dots & d & c & b \\ b & a & b & c & d & 0 & 0 & \dots & 0 & d & c \\ c & b & a & b & c & d & 0 & \dots & 0 & 0 & d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & c \\ c & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & b \\ b & c & d & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & b & a \end{pmatrix}_{N \times N} \tag{3.18}$$

所以我們成功的把以自格函數爲基底的 Helmholtz 方程式轉爲解矩陣方程

$$Au = F. \qquad (3.19),$$

其中

$$A = (2^{3j}S - 2^j k^2 M)$$

以上的矩陣方程未考慮任何的邊界條件, 爲了確保解的唯一性, 我們必須加入一些條件, 例如當 (3.1) 式的 $f = 0$ 時, 則方程式的通解爲 $u = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx)$, c_1, $c_2 \in C$, 因此爲了讓解是 $u(x) = \sin(kx)$, 必須再加入

$$\int_0^1 xu\,dx = \frac{-1}{k}, \tag{3.20}$$

$$\int_0^1 x^2 u\,dx = \frac{-1}{k}, \tag{3.21}$$

才能有會有唯一解.

將 (3.14) 式與 (3.15) 式離散化後, 分別取代 A 及 F 的最後兩列, 根據 $u_j = \sum_i u_i \Phi_{ji}$, 我們得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 x u_j\,dx &= 2^{\frac{j}{2}} \sum_{m=0}^{N-1} \int_0^1 x\Phi(2^j x - m)\,dx\,u_m \\ &= 2^{\frac{-3j}{2}} \sum_{m=0}^{N-1} \int_0^{2^j} x\Phi(x-m)\,dx\,u_m \\ &= -\frac{1}{k}\end{aligned}$$

所以

$$2^{\frac{-3j}{2}} \sum_{m=0}^{N-1} u_m \int_0^{2^j} x\Phi(x-m)\,dx = -\frac{1}{k}$$

同樣的

$$2^{\frac{-7j}{2}} \sum_{m=0}^{N-1} u_m \int_0^{2^j} x^2\Phi(x-m)\,dx = -\frac{1}{k}$$

我們用這兩個式子取代矩陣 A 的最後兩列就可得到唯一解.

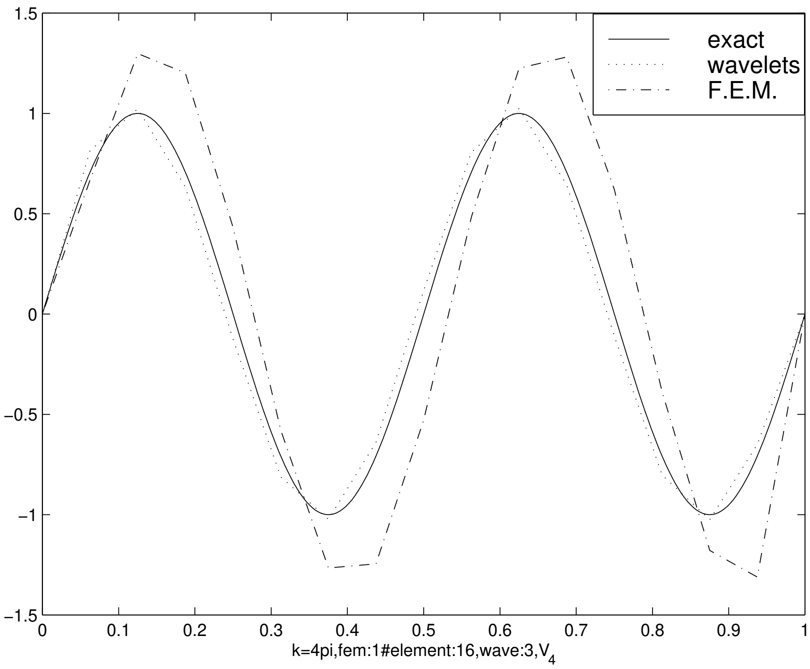

Fig 5

圖五是 $p=2$ 且 $j=4$ 的提昇後凌波函數與有限元分片線性基底在 16 個元素時的逼近解, 我們可以看出以 $\Phi(x)$ 爲基底的準確度遠優於分片線性爲基底的數值解.

3-2 Wavelet-Galerkin 法

這一節我們利用凌波轉換處理影像分解與合成的方法, 來處理剛度矩陣 S 與質量矩陣 M, 我們想造出一組分解矩陣 $\mathcal{W}$, 將以 $\Phi_{j,k}(x)$ 爲基底的剛度矩陣 S_J 與質量矩陣 M_J 轉換成以 $\Phi_{j-1,k}(x)$ 與 $\Psi_{j-1,k}$ 爲基底的矩陣 $\widetilde{\mathcal{S}}_j$ 與 $\widetilde{\mathcal{M}}_j$. 因爲

$$\Phi(x) = 2^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{2p} h_k \Phi(2x-k) \tag{3.22}$$

$$\Psi(x) = 2^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{2p-2} g_k \Phi(2x-k) \tag{3.23}$$

所以第 j 成的剛度矩陣 S_j 的一般項可以表示成

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi'(2^{j-1}x-n), \Phi'(2^{j-1}x-m)\rangle \\
&= \langle 2^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{2p} h_k \Phi'(2^j x-2n-k), 2^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{2p} h_l \Phi'(2^j x-2m-l)\rangle \\
&= 2 \sum_{k=0}^{2p} \sum_{l=0}^{2p} h_k h_l \langle \Phi'(2^j x-2n-k), \Phi'(2^j x-2m-l)\rangle \\
&= 2 \sum_{k=2n}^{2n+2p} \sum_{l=2n}^{2n+2p} h_{k-2n} h_{l-2n} \langle \Phi'(2^j x-k), \Phi'(2^j x-l)\rangle
\end{aligned}$$

對於所有的 $n, m = 0, 1, \ldots, 2^{j-1}-1$,

$$\begin{aligned}
&\langle \Psi'(2^{j-1}x-n), \Psi'(2^{j-1}x-m)\rangle \\
&= \langle 2^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{2p-2} g_k \Phi'(2^j x-2n-k), 2^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{2p-2} g_l \Phi'(2^j x-2m-l)\rangle \\
&= 2 \sum_{k=0}^{2p-2} \sum_{l=0}^{2p-2} g_k g_l \langle \Phi'(2^j x-2n-k), \Phi'(2^j x-2m-l)\rangle \\
&= 2 \sum_{k=2n}^{2n+2p-2} \sum_{l=2n}^{2n+2p-2} g_{2n-k} g_{2n-l} \langle \Phi'(2^j x-k), \Phi'(2^j x-l)\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\langle \Phi'(2^{j-1}x-n), \Psi'(2^{j-1}x-m)\rangle \\
&= \langle \sum_{k=0}^{2p} h_k \Phi'(2^j x - 2n - k), \sum_{l=0}^{2p-2} g_l \Phi'(2^j x - 2m - l)\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{2p} \sum_{l=0}^{2p-2} h_k g_l \langle \Phi'(2^j x - 2n - k), \Phi'(2^j x - 2m - l)\rangle \\
&= \sum_{k=2n}^{2n+2p} \sum_{l=2n}^{2n+2p-2} h_{2n-k} g_{2n-l} \langle \Phi'(2^j x - k), \Phi'(2^j x - l)\rangle
\end{aligned}
$$

對於所有的 $n, m = 0, 1, \ldots, 2^{j-1} - 1.$

將上面的等式轉換 n 次, 並看成二次式 (bilinear form),

$$\widetilde{\mathcal{S}}^{(n)} = \mathcal{W}_{(n)} S \mathcal{W}_{(n)}^T \qquad (3.23),$$

其中分解矩陣 (decomposition) 爲

$$\mathcal{W}_{(n)} = W_{n-1} W_{n-2} \ldots W_0, \qquad (3.24),$$

W_n 爲 $N \times N$ 矩陣,

$$W_n = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} H_n \\ G_n \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & I_{N-2^{j-n}} \end{pmatrix},$$

I_i 是 $i \times i$ 的單位矩陣, H_n 與 G_n 的維度爲 $2^{j-n-1} \times 2^{j-n}$, 分別是自格係數 h_k 與凌波係數 g_k 週期化後所組成的矩陣

$$H_n = \begin{pmatrix}
h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \ldots & h_{2p} & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & h_0 & h_1 & \ldots & h_{2p-1} & h_{2p} & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \ldots & 0 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
h_{2p} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & h_0 & \ldots & h_{2p-1} \\
h_{2p-2} & h_{2p-1} & h_{2p} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & h_{2p-3} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{pmatrix} \qquad (3.25)$$

$$G_n = \begin{pmatrix}
g_0 & g_1 & g_2 & \ldots & g_{2p-2} & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & g_0 & g_1 & \ldots & g_{2p-2} & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & g_0 & g_1 & \ldots & 0 \\
 & & & & \vdots & & & \\
g_{2p-2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & g_0 & \ldots & g_{2p-3} \\
g_{2p-4} & g_{2p-3} & g_{2p-2} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & g_{2p-5} \\
 & & & & \vdots & & &
\end{pmatrix} \qquad (3.26)$$

並且滿足

$$\frac{1}{2}\mathcal{W}_{(n)}\widetilde{\mathcal{W}}_{(n)}^{T} = I \tag{3.27),}$$

這裡的 $\widetilde{\mathcal{W}}_{(n)}$ 稱爲合成矩陣, 其形式爲

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{(n)} = \widetilde{W}_{n-1}\widetilde{W}_{n-2}\ldots\widetilde{W}_{0},$$

其中

$$\widetilde{W}_{(n)} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{H}_n \\ \widetilde{G}_n \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & I_{N-2^{j-n}} \end{pmatrix},$$

$\widetilde{H}_i$ 與 $\widetilde{G}$ 分別爲對偶自格係數 $\tilde{h}_k$ 與對偶凌波係數 $\tilde{g}_k$ 的係數所組成的矩陣, 組成的形式如 (3.25) 與 (3.26) 式.

藉由上面的轉換, 我們已經成功將剛度矩陣 S 降層

$$\widetilde{\mathcal{S}}^{(n)} = \mathcal{W}_{(n)}S\widetilde{\mathcal{W}}_{(n)}^{T}. \tag{3.27}$$

因此在 Poisson 方程方面, 原本解聯立方程 $Su = F$ 可以轉變爲解

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{j}^{(n)}\widetilde{u}^{(n)} = \widetilde{F}^{(n)} \tag{3.28}$$

則 $\widetilde{u}^{(n)} = \mathcal{W}_{(n)}u$. 如此一來, 可由新的線性系統 (3.28) 得到 $\widetilde{u}^{(n)}$, 並且因爲 (3.27), 所以我們可以很快得到近似解 u.

若以二維的凌波轉換來看, 我們可以將轉換一次式表示爲

$$\widetilde{\mathcal{S}}_{j}^{(1)} = \begin{pmatrix} U & W_x \\ W_y & W \end{pmatrix}$$

四塊子矩陣 U, W_y, W_x, W 的維度都是 $\frac{N}{2}\times\frac{N}{2}$. U, W 中的元素分別是 (1.23) 式和 (1.24) 式構成, 其他兩塊矩陣的元素就是 (1.23) 式構成. 再由Φ' 與 Ψ' 互相正交和 Ψ' 與其自己正則的關係, 可推得 W_x, W_y 爲零矩陣, 而 W 爲乘上一常數的單位矩陣. 隨著轉換次數的增加, 形成單位矩陣的範圍也隨之變大, 這也是我們認爲以 Φ 爲基底的剛度矩陣配合凌波轉換能降低剛度矩陣 S 的條件數和計算量的原因. 但在實際的運用上, 例如 Poisson 方程, 爲了確保解的唯一性和存在, 我們通常將剛度矩正 S 的最後一列換上確保唯一解的離散條件, 而這些條件會造成轉換上的負擔, 經過一次凌波轉換後, 會在 U, W_x 的最後兩列和 W_y, W 的最後一列形成非零元素, 而且非零元素會隨著轉換的次數而逐漸增加, 不僅再降低條件數方面大打折扣, 計算量更是增加了數倍.

同理, 藉由上面的分解矩陣 $\mathcal{W}_{(n)}$, 依然可以將質量矩陣 M_j 降 n 層

$$\widetilde{\mathcal{M}}_j^{(n)} = \widetilde{\mathcal{W}}_{(n)} M_j \mathcal{W}_{(n)}^T \tag{3.29}$$

因此原本的解矩陣方程 $A_j u = F$ 的問題轉換爲

$$\widetilde{\mathcal{A}}_j^{(n)} \widetilde{u}^{(n)} = \widetilde{F}^{(n)} \tag{3.30}$$

則 $\widetilde{u}^{(n)} = \mathcal{W}_{(n)}^T u$. 一樣可由 (3.27) 式很快得到近似解 u. 在影像處理的技巧理, 我們常常在降層後處理掉接近零的矩陣元素, 使得在影像壓縮過程中得到較高的壓縮率, 且在影像方面的誤差通常不會被我們的眼睛所察覺, 但在解微分方程的過程中, 我們需要保留所有的矩陣元素以造回真解, 因爲省略這些點將會在解微分方程的逼近解的過程中造成一些誤差 (Coifman 等人研究如此做, 我們不討論).

第四章 數值實驗

爲了比較分片線性有限元的差異, 我們計算與第二章相同的問題, 同樣的我們也給定週期性的條件, 利用提昇後的自格函數 $\Phi(x)$ 爲基底的 Scaling-Galerkin 法來逼近真解, 分別計算誤差與條件數的大小, 並且觀察他們與網格粗密的關係. 並且利用 Wavelet-Galerkin 方法, 降低剛度矩陣的條件數.

4-1 Scaling-Galerkin 方法誤差與條件數估計

這一小節, 我們一樣從較簡單的 Poisson 方程下手, 分析條件數與相對誤差, 接著再來實驗 Helmholtz 方程. 另外, 我們亦發現解析函數邊界平滑與不平滑的重要性.

Example 1: (Poisson 方程) 考慮

$$-u''(x) = (3x + x^2)\mathrm{e}^x, \qquad x \in (0, 1),$$

並給定與第二章相同的附加條件

$$\int u(x)\,dx = 1 \tag{4.1}$$

則真解爲

$$u = x(1-x)\mathrm{e}^x - 2 + \mathrm{e}.$$

根據 (3.8) 我們給定

$$u_j(x) = \sum_{m=0}^{N-1} u_m \Phi_{j,m}$$

爲 Galerkin 數值解. 我們代入 (3.14) 與 (3.16) 得到剛度矩陣 S 及負載向量 F, 並將 (4.1) 式離散化後分別取代 S 及 F 的最後一列, 則最後一列的元素爲

$$S_{N,i} = 1, \quad i = 1, \quad \ldots, N, \quad F_N = 2^{j/2}.$$

根據上述定義所做的實驗結果如下, 在條件數方面:

N	8	16	32	64	128	256	512
$\kappa(A)$	0.02E3	0.08E3	0.32E3	1.2800E3	5.1200E3	2.0480E4	8.1920E4
$\kappa(A)/N^2$	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31

由上面的數據可看出條件數 $\kappa(S)$ 一樣是 N^2 的速度增加. 接下來我們看看真解與逼近解之間的相對誤差, 在 H^1-seminorm 方面:

N	8	16	32	64	128	256	512	1024
e_1	0.1282	0.0521	0.00703	0.00463	0.00201	8.7193E-4	3.7953E-4	1.6520E-4
Ne_1	1.02	0.83	0.22	0.30	0.26	0.22	0.19	0.17

在 L^2-norm 方面,

N	8	16	32	64	128	256	512
e_2	0.0472	0.0106	0.00191	2.8783E-4	6.2642E-5	1.3633E-5	2.9671E-6
N^2e_2	3.021	2.71	1.92	1.18	1.03	0.90	0.78

在誤差方面, 如理論預期 H^1-seminorm 的收斂速度比 $O(N^{-1})$ 快, 而 L^2-norm 也是稍快於 $O(N^{-2})$ 的速度收斂.

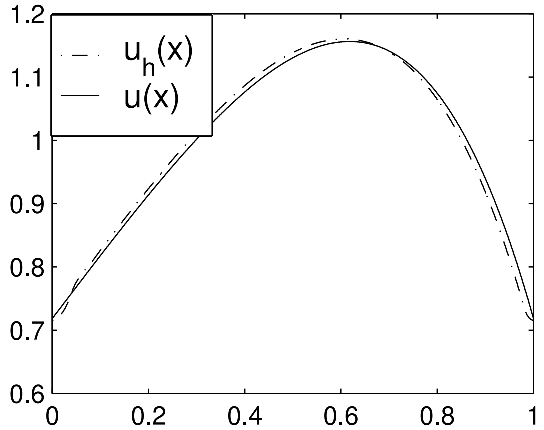

Fig 6

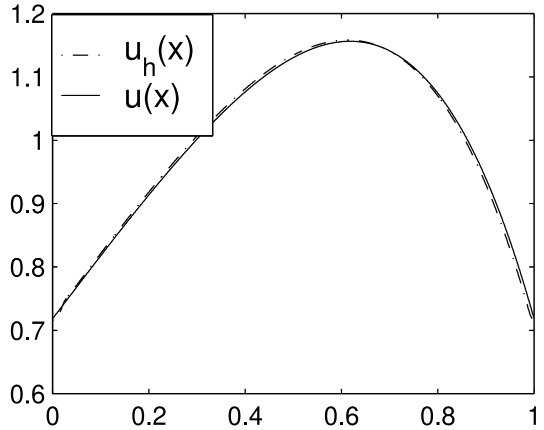

Fig 7

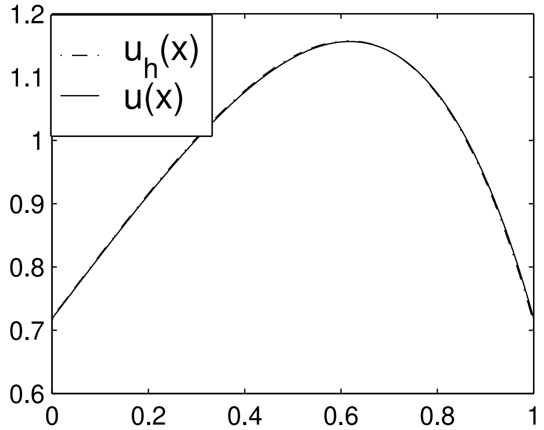

Fig 8

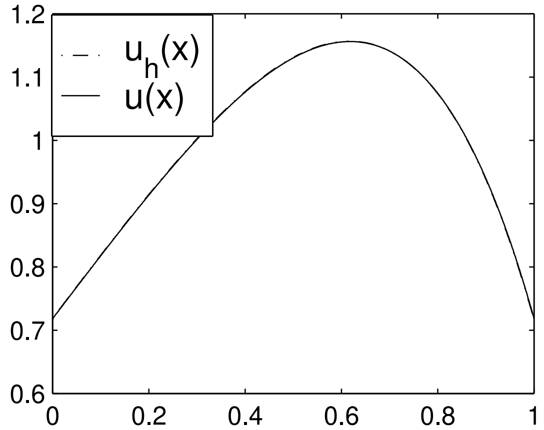

Fig 9

上圖 (6,7,8,9) 是第 4 層至第 7 層的有限元解 $u_j(x)$ 與真解 $u(x)$ 的比較. 首先, 在圖六中, u_j 在靠左近端點的 $u_j(x)$ 出現跳躍的情形, 這是因爲我們所解的題目並非平滑的週期性函數的緣故, 也是因爲這樣, 週期化的 $u(x)$ 可能連一階導數都不存在. 如果是這樣的話, 利用 Taylor 展開式來逼近週期化的 $u(x)$, 則誤差項從一階就開始了. 其次, 我們發現 $u_j(x)$

有類似平移的現象, 原因是提昇後的自格函數 $\Phi(x)$ 與 Daubechies 的正交自格函數一樣, 函數的能量都集中在左邊, 不是一對稱函數. 如果 $\Phi(x)$ 是個對稱函數就不會發生偏移的現象.

底下爲提昇後自格函數在 $p=2$ 時的圖形 :

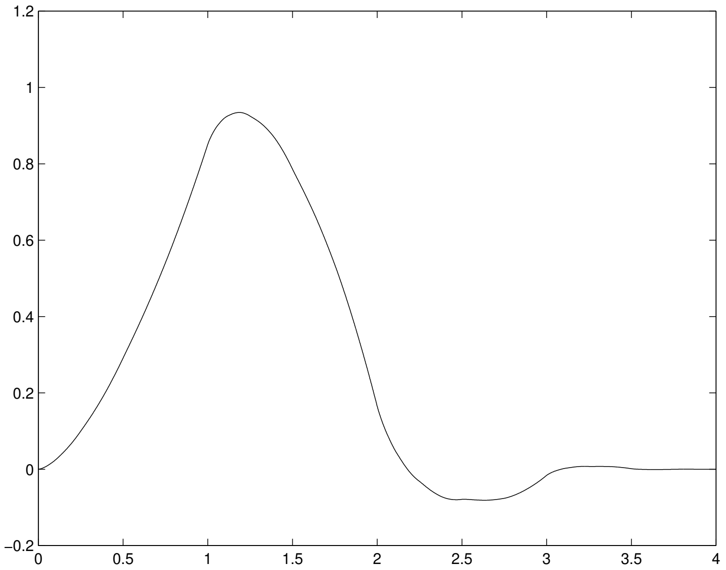

Fig 10

由上圖可知, 提昇後的凌波函數的質量都集中在左邊.

Example 2:(Helmholtz 方程)

$$u'' + k^2 u = 0, \quad x \in (0,1),$$

$$u(x) \text{ 是1-週期性函數,} \tag{4.2}$$

其中 $k = 2n\pi,\ n \in N$. 則上式的通解爲 $u = a\cos(kx) + b\sin(kx), a, b \in C$, 爲了確保唯一解 $u = \sin(kx)$, 我們必須再加入兩個附加條件:

$$\int_0^1 xudx = \frac{-1}{k} \tag{4.3}$$

$$\int_0^1 x^2 udx = \frac{-1}{k} \tag{4.4}$$

由 Scaling-Galerkin 方法, 造出矩陣方程 $Au = (F)$, 再將 (4.3) 及 (4.4) 離散化後分別取代 k 及 F 的最後兩列. 但從第二章的結果我們知道, 傳統的有限元素法的條件數會與網格的大小有關, 並且在當 $hk < 1$ 時, 條件數會以 N^2 的速度成長.

針對這一點, 我們做了一些實驗, 下表爲條件數的實驗結果,

$$k = 4\pi$$

N	8	16	32	64	128	256	512
$\kappa(A)$	9.0371E4	7.8371E5	6.6260E6	5.3315E7	4.2691E8	3.4149E9	2.7325E10
$\kappa(A)/N^3$	47.92	40.95	38.16	36.93	36.36	36.08	35.94

$$k = 8\pi$$

N	8	16	32	64	128	256	512
$\kappa(A)$	2.3016E7	3.4209E6	2.5189E7	2.0826E8	1.6894E9	1.3532E10	1.0828E11
$\kappa(A)/N^3$	4.49E4	835.17	768.70	794.44	805.56	806.58	806.77

由上面的數據符合理論推論: 要在 $hk < 1$ 的條件下, 才會使得使得整個矩陣方程形成穩定的系統, 並且條件數以 N^3 的速度成長. 但是這樣的成長速度顯然不令人滿意, 最主要的原因是最後兩列的離散條件造成矩陣的不平衡所導致. 由 (3.22) 與 (3.23) 可了解, 隨著 j 的增大, 離散邊界條件的點値會越小, 使得矩陣極不平衡, 解決的辦法是將 (3.22) 與 (3.23) 的 $2^{\frac{-3j}{2}}$ 與 $2^{\frac{-7j}{2}}$ 移除到右邊, 則我們得到以下的數値實驗:

$$k = 8\pi$$

N	8	16	32	64	128	256	512
$\mathcal{A}$	3.5565E5	1.5627E4	2.9441E4	6.2646E4	1.2802E5	2.5719E5	5.1540E5
$\mathcal{A}/N$	4.47E4	0.98E3	0.92E3	0.98E3	1.00E3	1.00E3	1.00E3

這樣的結果已經進步不少的, 但是依然會隨著 N 的速度成長, 當矩陣 A 的維度變大時, 求解 $Au = F$ 一樣有一定的難度.

下圖示是條件數在 $k = 8\pi, 12\pi, 16\pi$ 時對基底個數的表現圖:

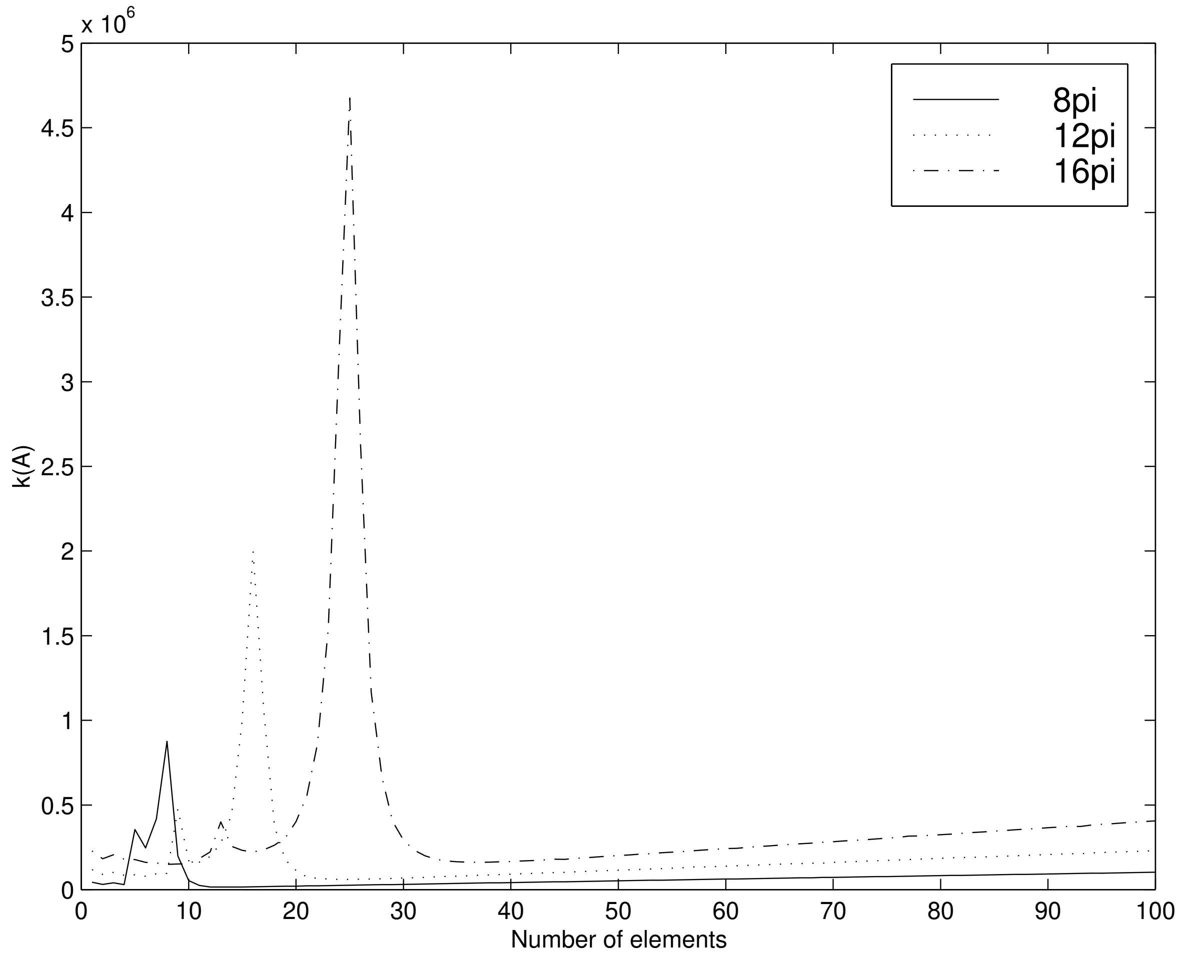

Fig 11

在圖十一中, 條件數也是在 $kh < 1$ 時才逐漸成 N 的速度成長, 並且也各有兩處較大的值峰(見 2-4 節有關的敘述).

接下來, 我們利用上面的方法, 以 $k = 8\pi$ 爲例, 得到以下的相對誤差實驗. 在 H^1-seminorm 方面:

N	8	16	32	64	128	256	512	1024
$\tilde{e}$	1.6771eE6	90.087	1.0914	0.1393	0.08571	0.01154	0.00417	0.00142
$N\tilde{e}$	1.34E7	1.44E3	34.97	8.92	10.98	2.94	2.08	1.46

在 L^2-norm 方面:

N	8	16	32	64	128	256	512
e	49.9156	185.505	0.9186	0.13272	0.01925	0.00261	3.9277E-4
$N^{2.5}e$	2.71E4	1.89E5	5.32E3	4.34E3	3.55E3	2.67E3	2.32E3

由上面的數據, 在 H^1-seminorm 方面, 相對誤差的收斂數度顯然比 $O(N^{-1})$ 要快, 在 L^2-norm 方面也比 $O(N^{-2.5})$ 稍快, 而且兩者誤差的收斂速度都比 Example 1 的結果好一點, 這應該是我們所解的問題是邊界平滑的緣故吧, 以致 $u_j(x)$ 在邊界沒有導數不連續的情形, 所以數值較準確. 以下四圖 (12,13,14,15) 是第 3,4,5,6 層的有限元解 $u_j(x)$ 與真解 $u(x)$ 的比較.

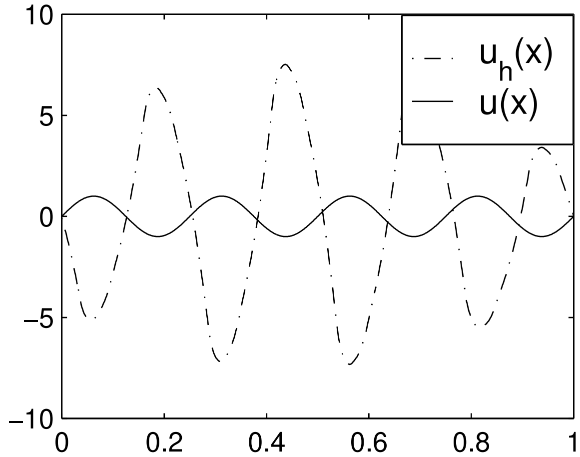

Fig 12

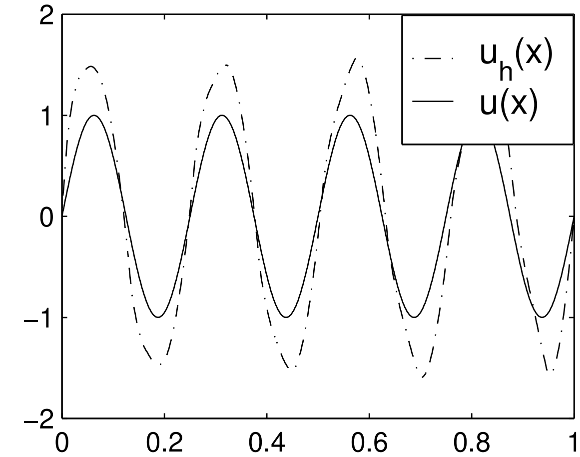

Fig 13

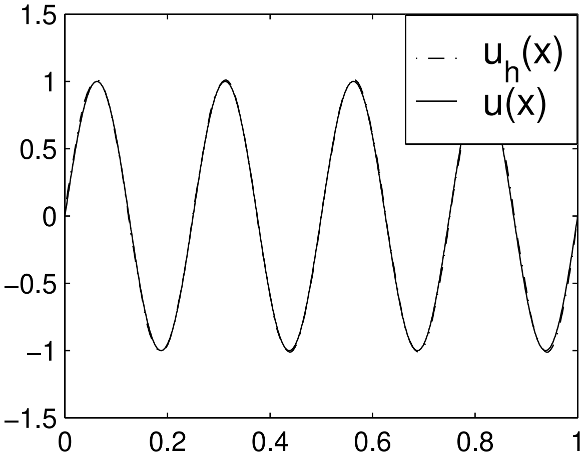

Fig 14

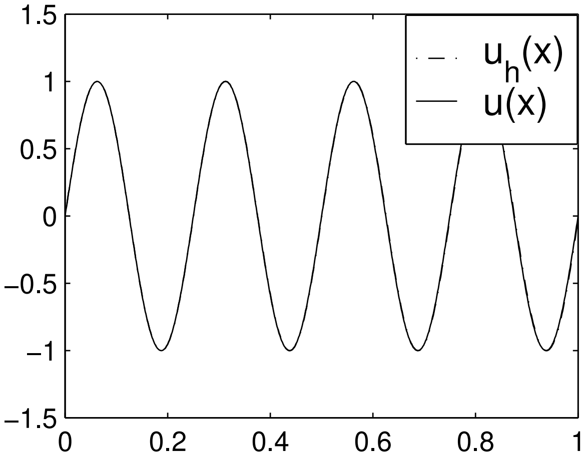

Fig 15

首先, 我們注意到靠近端點的跳躍的情形已經不見了, 這是因爲所解的題目邊界平滑的緣故. 其次, 在圖十二中, 很明顯的第三層的基底無法探測到真解的震盪, 以致近似解與真解的落差非常大. 到了第五層後的基底, 也就是 $kh < 1$, k 值的影響力已逐漸減弱, 使得情況獲得改善.

4-2 Wavelet-Galerkin 方法的估計

這一節我們應用 Wavelet-Galerkin 的方法對矩陣方程做基底變換. 利用凌波函數的導函數與其自己的平移及自格函數的導函數正交, 凌波函數快速基底轉換的這兩種性質, 使得經過轉換的剛度矩陣同時享有稀疏又有好的條件數. 但是在 Helmholtz 方程方面似乎成效不彰, 這似乎是因爲 Helmholtz 方程有未微分項 $u(x)$ 的緣故.

回顧前一章, 我們藉由分解矩陣 $\mathcal{W}_{(n)}$ 與 $\tilde{\mathcal{W}}_{(n)}$, 將原本的矩陣方程 $Au = f$ 轉變爲

$$\mathcal{A}^{(n)}\tilde{u} = \tilde{f}^{(n)},$$

其中

$$\mathcal{A}^n = \mathcal{W}_{(n)}A\mathcal{W}_{(n)}, \qquad \tilde{f}^{(n)} = \mathcal{W}_{(n)}f$$

這裡的 (n) 代表經過 n 次轉換, 則 $\tilde{u} = \mathcal{W}^{(n)}u$. 爲了和第一節的實驗結果做比較, 我們採用相同的例題, 對於 Example 1(Poisson 方程) 的剛度矩陣, 我們得到以下的實驗結果, 在條件數方面:

N	8	16	32	64	128	256	512
$\kappa(\mathcal{A})$	20	80	320	1280	5.1200E3	2.0480E4	8.1920E4
$\kappa(\mathcal{A}^{(1)})$	22.8056	87.197	344.767	1.3750E3	5.4962E3	2.1981E4	2.5720E5
$\kappa(\mathcal{A}^{(2)})$	23.9237	49.946	185.800	729.217	2.9029E3	1.1598E4	8.7918E4
$\kappa(\mathcal{A}^{(3)})$		102.148	213.164	780.312	3.0489E3	1.2123E4	4.6376E4
$\kappa(\mathcal{A}^{(4)})$			433.646	905.896	3.2872E3	1.6567E4	4.8421E4
$\kappa(\mathcal{A}^{(5)})$				1.8032E3	3.7694E3	1.3603E4	5.0904E4
$\kappa(\mathcal{A}^{(6)})$					7.3812E3	1.5431E4	5.2935E4

雖然條件數已經成功降低, 但是降低的速度顯然不令人滿意, 這是因爲 (4.1) 的離散條件取代了最後一列, 在轉換時會出現較多的非零元素, 這不僅僅在降低條件數上成效不彰, 更產生較多的計算量, 更重要的是無法由降低條件數中獲得較精確的解. 爲了改善這個缺點, 我們利用類似於影像處理的前置濾波器的想法. 想法上是找的一個預條件處理的矩陣 $\mathcal{T}$, 使得轉換後 的矩陣 $A\mathcal{T}$ 類似於原來未加 (4.1) 離散條件的剛度矩陣, 底下是我們找到的矩陣 $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -1/2^j & -1/2^j & \dots & -1/2^j & -1/2^j \end{pmatrix},$$

則

$$A\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

再利用凌波轉換的方法得到

$$\mathcal{W}\mathcal{A}\mathcal{T}\widetilde{\mathcal{W}}^T\tilde{u} = \tilde{f},$$

其中$\tilde{u} = \mathcal{W}\mathcal{T}^{-1}u$. 以下是我們的實驗結果,

N	8	16	32	64	128	256	512
$\kappa(\mathcal{A})$	32.134	116.461	440.688	1.7117E3	8.2871E3	2.6768E4	1.0666E5
$\kappa(\mathcal{A}^{(1)})$	40.052	140.606	612.894	2.5876E3	6.7158E3	1.0180E4	1.0748E5
$\kappa(\mathcal{A}^{(2)})$	16.174	53.93	219.016	908.962	1.9879E3	8.0707E3	3.5104E4
$\kappa(\mathcal{A}^{(3)})$		28.378	51.559	365.173	821.451	4.1209E3	1.6410E4
$\kappa(\mathcal{A}^{(4)})$			91.514	184.266	432.612	2.1673E3	8.6150E3
$\kappa(\mathcal{A}^{(5)})$				110.981	244.014	1.1796E3	4.6567E3
$\kappa(\mathcal{A}^{(6)})$					161.250	663.203	2.5470E3

在誤差分析方面, 我們以 L^2-norm 作代表, 我們選用 $N = 128$ 與 $N = 256$ 轉換 6 層後得到下面的結果:

N	$\|\|u_j - u\|\|/\|\|u\|\|$	$\|\|u_j^6 - u\|\|/\|\|u\|\|$
128	6.26429143138515E-5	6.264219142432285E-6
256	1.36338911552478E-5	1.36338908707559E-7

我們從上面實驗的數據, 在條件數方面已經改善了, 在解的誤差方面因爲矩陣方程的規模較小, 不容易有明顯的變化, 但是在大型的矩陣方程中, 這方面的變化就相當明顯, 因此藉由此種凌波轉換, 我們可以處理較大型的矩陣方程, 以獲得較精確的近似解.

另外, 我們亦發現與剛度矩陣 (未加離散條件) 類似的矩陣配合凌波轉換也可以得到不錯的結果, 例如我們利用差分法將 Poisson 方程離散化後, 所得到的線性方程

$$Au = f,$$

其中 u 爲未知向量, $f = h^2(f_i)$(h 爲節點的寬度, f_i 是函數 $f(x)$ 的離散點值), A 是 $N \times N$ 的對角化矩陣

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & b \end{pmatrix}$$

其中 $a, b \in R$ 是與邊界條件有關係.

則我們得到下面的實驗結果:

$\kappa(a)$ for the Dirichlet BVP($a=b=2$)

N	8	16	32	64	128	256	512
$\kappa(a)$	40	144	544	2.1120E3	8.3200E3	3.3024E4	1.3158E5
$\kappa(\mathcal{A}^{(n)})$	19.3054	31.9855	61.4352	121.5605	243.1536	489.6825	986.4827

$\kappa(a)$ for the mixed BVP($a=2, b=1$)

N	8	16	32	64	128	256	512
$\kappa(a)$	113.495	437.697	1.7087E3	6.7407E3	2.6765E4	1.0665eE5	4.2580E5
$\kappa(\mathcal{A}^{(n)})$	38.274	81.232	265.436	779.022	2.9479E3	7.7529E3	9.4100E3

在上面的實驗中, 用來實驗的矩陣幾乎一樣 (事實上只跟與邊界有關的元素 a 不同), 但是經過轉換後, 降低條件數的成效卻截然不同, 這在次說明了矩陣在凌波轉換前的預處理是非常重要的.

緊接著我們來看看 Example 2(Helmholtz 方程) 經過轉換後所得到的實驗結果:

N	8	16	32	64	128	256
$\kappa(\mathcal{A})$	3.8180E5	1.5641E4	2.9449E4	6.2646E4	1.2802E5	2.5719E5
$\kappa(\mathcal{A}^{(1)})$	3.3216E5	1.0867E4	1.5057E4	2.7956E4	5.6367E4	1.1309E5
$\kappa(\mathcal{A}^{(2)})$	1.1518E6	3.6639E4	3.3670E4	3.5074E4	6.5823E4	1.3455E5
$\kappa(\mathcal{A}^{(3)})$		1.1804E5	8.4351E4	1.2400E5	1.4948E5	2.8070E5
$\kappa(\mathcal{A}^{(4)})$			2.0744E5	2.8466E5	5.2318E5	6.2753E5
$\kappa(\mathcal{A}^{(5)})$				1.2040E5	7.0204E5	1.1930E6
$\kappa(\mathcal{A}^{(6)})$					2.8779E6	4.8686E6

這裡影響條件數 $\kappa(a)$ 增大有兩個最主要的原因: (一)、是質量矩陣, (二)、取代矩陣方程的最後兩列離散條件. 爲了估計他們影響的程度, 將矩陣 A 的最後兩列換回原來的基底, 得到以下的實驗結果:

N	8	16	32	64	128	256
$\kappa(a)$	43.3604	26.86	1.4421E3	8.8477E4	5.6037E6	3.5771E8
$\kappa(\mathcal{A}^{(1)})$	48.7199	53.719	1.6040E3	9.1602E4	5.6565E6	3.5856E8
$\kappa(\mathcal{A}^{(2)})$	265.6911	53.494	811.074	2.5481E4	1.4641E6	9.0486E7
$\kappa(\mathcal{A}^{(3)})$		268.152	733.454	1.2955E4	4.0739E5	2.3422E7
$\kappa(\mathcal{A}^{(4)})$			3.6312E3	1.1313E4	2.0694E5	6.5190E6
$\kappa(\mathcal{A}^{(5)})$				5.5913E4	1.7919E5	3.3090E6
$\kappa(\mathcal{A}^{(6)})$					8.8543E5	2.8593E6

由上面的數據, 受到質量矩陣的拖累, 條件數下降的幅度很小, 再加了兩條離散條件後, 使得條件數不降反升. 很顯然, 我們利用提昇後的凌波函數爲基底的 Galerkin 方法配合凌波轉換作基底變換是無法將有質量矩陣的線性系統之條件數降低, 但至少條件數不會很快的上升.

Reference

1. 曾正男, ”一套提昇凌波函數逼近能力與平滑度的方法” 中央大學數學系碩士論文, (1997).

2. 蘇智穎, ”Helmholtz 方程的凌波-有限元素數值解與穩定性分析” 中央大學數學系碩士論文, (1998).

3. 單維彰, ”凌波初步” 全華科技圖書股份有限公司印行, (1998).

4. I.Fried, 'Bounds on the extremal eigenvalues of sound the F.E stiffness and mass matries ans their special condition number', Journal of sound and vibration, 22(4) 407-478(1972).

5. F.Ihelngburg and I.Babuška,'Finite element solution to Helmholtz equation with high wavebumber-part II:The hp-version of FEM', SIAM J.Numer.Anal., 34(1),315-358 (1997).

6. A.Zema, 'On the fundamental solutions for the differnece Helmholtz operator', SIAM J. Numer. Anal., 32(2),560-570(1995).

7. F.John, Partial Differential Equations, Fourth edition, Springer, New York, (1982).

8. I.Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, (1992).

9. S.C.Brenner and L.R.Scott, The Mathematical Throry of Finite Element Methods, Springer, New York, (1994).

10. G.Chen and J.Zhou, Boundary Element Methods, Academic Press Limited, London, (1992).

11. W.Frazier, An introduction to wavelets through liner Albebra, New York, (1999).

12. J.Douglas Jr., J.E.Santos, D.Sheen and L.Schreiyer, 'Frequence domain treatment of one-dimesion scaler wave', Math. Methods in Appl. Sci. 3(2),171-194(1993).